TERCER EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Trimestre 12-P. Julio 16 de 2012.

Grupo: CTG01   Profesor: Dr. Carlos Barrón Romero
SOLUCION

(1) Para la función

$$g\left(x\right) = \frac{\left(x-1\right)^2}{2-x}.$$

en el intervalo $[0,4]$.
Determine
a) **(10)** Sus asíntotas sobre el eje Y.
RESPUESTA.
Se indetermina en $x=2$.
$\lim_{x\to 2^-} g\left(x\right) = \infty$
$\lim_{x\to 2^+} g\left(x\right) = -\infty$
b) **(20)** Sus puntos máximos y mínimos locales y globales, con sus valores de g en esos puntos.
RESPUESTA.
$\frac{d}{dx}g\left(x\right) = \left(x-1\right)\frac{3-x}{(2-x)^2}$.
$\frac{d^2}{dx^2}g\left(x\right) = \frac{2}{(2-x)^3}$.
Los puntos críticos se obtienen de $g'\left(x\right)=0$, $\left(x-1\right)\frac{3-x}{(2-x)^2}=0$. Y son $x=1$, $x=3$.
En $x=1$, $\frac{d^2}{dx^2}g\left(1\right) = \frac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0$. Se trata de un mínimo local con $g(1)=0$.
En $x=3$, $\frac{d^2}{dx^2}g\left(3\right) = \frac{2}{(2-3)^3} = -2 < 0$. Se trata de un máximo local con $g(3). = -4$
Como $\lim_{x\to 2^-} g\left(x\right) = \infty$ y $\lim_{x\to 2^+} g\left(x\right) = -\infty$, no hay máximo o mínimo globales.
c) **(20)** Sus zonas de monotonía en $[0,4]$.
RESPUESTA.
Debemos analizar g' en los intervalos entre los puntos 0,1,2,3 y 4.

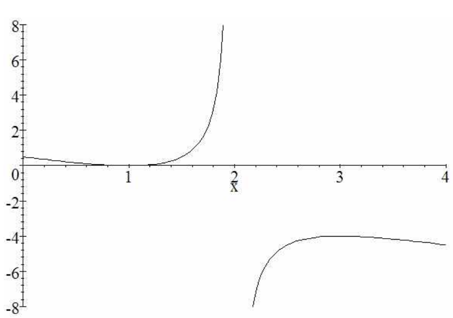
Con $x\in[0,1), g'\left(x\right) = \left(x-1\right)\frac{3-x}{(2-x)^2}$. Los signos de los factores son $\left(-\frac{+}{+}\right) < 0$, g es decreciente.

Con $x\in(1,2), g'\left(x\right) = \left(x-1\right)\frac{3-x}{(2-x)^2}$. Los signos de los factores son $\left(+\frac{+}{+}\right) > 0$, g es creciente.

Con $x\in(2,3), g'\left(x\right) = \left(x-1\right)\frac{3-x}{(2-x)^2}$. Los signos de los factores son $\left(+\frac{+}{+}\right) > 0$, g es creciente.

Con $x\in(3,4), g'\left(x\right) = \left(x-1\right)\frac{3-x}{(2-x)^2}$. Los signos de los factores son $\left(+\frac{-}{+}\right) < 0$, g es decreciente.

Su gráfica es



d) **(10)** $\frac{d}{dx}\left[g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$. Donde $g(0)=\frac{1}{2}$.
RESPUESTA.
$g'(x)=(x-1)\frac{3-x}{(2-x)^2}$.
$g'(0)=(0-1)\frac{3-0}{(2-0)^2}=-\frac{3}{4}$. Como $g(0)=\frac{1}{2}$ se tiene
$\frac{d}{dx}\left[g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}$.

(2)(10). Calcular el límite:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\left(t^{10}\right)^{\frac{1}{2}}}{e^{2t}}$$

RESPUESTA.
Aplicando la regla de la Hôpital:
$\lim_{t\to\infty}\frac{\left(t^{10}\right)^{\frac{1}{2}}}{e^{2t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^5}{e^{2t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{5t^4}{2e^{2t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{20t^3}{4e^{2t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{60t^2}{8e^{2t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{120t}{16e^{2t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{120}{32e^{2t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{15}{4e^{2t}}=0$

(3)(20). Calcular la derivada de la función

$$h(x)=\frac{\arcsin\left(x^2+1\right)\left(3-2x^3\right)^5}{e^{2x}}.$$

RESPUESTA.
$\frac{d}{dx}(h(x))=\frac{d}{dx}\left[e^{\ln\left(\frac{\arcsin\left(x^2+1\right)\left(3-2x^3\right)^5}{e^{2x}}\right)}\right]=$
$\frac{\arcsin\left(x^2+1\right)\left(3-2x^3\right)^5}{e^{2x}}\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\arcsin\left(x^2+1\right)\right)+5\ln\left(3-2x^3\right)-\ln\left(e^{2x}\right)\right)=$
$\frac{\arcsin\left(x^2+1\right)\left(3-2x^3\right)^5}{e^{2x}}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2+1\right)^2}}2x}{\arcsin(x^2+1)}+\frac{5}{3-2x^3}\left(-6x^2\right)-2\right)=$
$\frac{\arcsin\left(x^2+1\right)\left(3-2x^3\right)^5}{e^{2x}}\left(\frac{2x}{\sqrt{-x^2(x^2+2)}\arcsin(x^2+1)}-\frac{30x^2}{3-2x^3}-2\right)$.
Note que
$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\arcsin\left(x^2+1\right)\right)\right)=\frac{2x}{\sqrt{(-x^2(x^2+2))}\arcsin(x^2+1)}$
$\frac{d}{dx}\left(5\ln\left(3-2x^3\right)\right)=-30\frac{x^2}{3-2x^3}$
$\frac{d}{dx}\left(-\ln\left(e^{2x}\right)\right)=-2$

(4)(10). Calcular una aproximación de $\sqrt{35}$ por una serie de Taylor de grado 1.
RESPUESTA.
Sea $f(x)=\sqrt{x}$. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Un desarrollo de grado 1 es $f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)$.
Con $x=36$ y $h=-1$ se tiene
$\sqrt{35}=\sqrt{36-1}=f(36+h)=f(36)+(-1)f'(36)$. Sustituyendo
$\sqrt{36}-1\frac{1}{2\sqrt{36}}=6-\frac{1}{12}=\frac{71}{12}\approx 5.9167$