Responder para la siguiente función

$$h(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

Dominio

El Dominio está dado por el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ (números reales) donde se puede realizar el cálculo de h.

En este caso el divisor se analiza:

$1-x^2=0$, $x^2=1$. Por tanto $x_1=-1$, $x_2=1$.

El dominio de h es $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Asíntotas

Dado que se indetermina en $x_1=-1$, $x_2=1$, se analiza en estos puntos y en $-\infty, \infty$.

Para $x \to -\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\frac{1}{x^2}-1} = \infty.$

Por una tabla de valores:

$h(-10^3) = 1000.0$
$h(-10^5) = 1.0\times10^5$
$h(-10^8) = 1.0\times10^8$
$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$

Para $x \to -1^-$.

$\lim_{x\to-1^-} h(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to-1^-} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x}{\frac{1}{x^2}-1} = \infty.$

Por una tabla de valores:

$h(-1.01) = 6.3381$
$h(-1.0001) = 5001.3$
$h(-1.0000001) = 5.0\times10^6$
$\lim_{x\to-1^-} h(x) = \infty$

Para $x \to -1^+$.

$\lim_{x\to-1^+} h(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to-1^+} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to-1^+} \frac{x}{\frac{1}{x^2}-1} = -\infty.$

Por una tabla de valores:

$h(-0.99) = -48.759$
$h(-0.99999) = -49999.0$
$h(-0.9999999999) = -5.0\times10^9$
$\lim_{x\to-1^+} h(x) = -\infty$

Para $x \to 1^-$.

$\lim_{x\to1^-} h(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to1^-} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to1^-} \frac{x}{\frac{1}{x^2}-1} = \infty.$

Por una tabla de valores:

$h(0.99) = 48.759$
$h(0.99999) = 49999.0$
$h(0.9999999999) = 5.0\times10^9$
$\lim_{x\to1^-} h(x) = \infty$

Para $x \to 1^{+}$.

$\lim_{x\to 1^{+}} h(x) = \lim_{x\to 1^{+}} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^{+}} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to 1^{+}} \frac{x}{\frac{1}{x^2}-1} = -\infty.$

Por una tabla de valores:

$h(1.01) = -51.259$
$h(1.0001) = -5001.3$
$h(1.0000001) = -5.0 \times 10^6$
$\lim_{x\to -1^{+}} h(x) = -\infty$

Para $x \to \infty$.

$\lim_{x\to \infty} h(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to \infty} \frac{x}{\frac{1}{x^2}-1} = -\infty.$

Por una tabla de valores:

$h(10^3) = -1000.0$
$h(10^5) = -1.0 \times 10^5$
$h(10^8) = -1.0 \times 10^8$
$\lim_{x\to \infty} h(x) = -\infty$

Rango.

De lo anterior se deduce que el rango de h es $\mathbb{R}$.

Puntos críticos

Se calcula la primera derivada de h :

$\frac{d}{dx}h(x) = -x^2\frac{-3+x^2}{(-1+x^2)^2}$.

$h^{'}(x) = 0$, se tiene $-x^2\frac{-3+x^2}{(-1+x^2)^2} = 0$. Se tiene $-x^2(-3+x^2) = 0$. Los puntos críticos son las raíces reales y son $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$.

Puntos de inflexión

Se calcula la segunda derivada de h :

$\frac{d}{dx}h'(x) = \frac{d}{dx}\left(-x^2\frac{-3+x^2}{(-1+x^2)^2}\right) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3} = 2x\frac{3+x^2}{(1-x^2)^3}$.

$h''(x) = 0$, se tiene $2x\frac{3+x^2}{(1-x^2)^3} = 0$. De donde $2x(3+x^2) = 0$. El punto de inflexión es la única raíz real de $-2x(3+x^2)$, que es $x_4 = 0$.

Puntos máximos y mínimos

Los candidatos son los puntos críticos son $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$.($x_1 = 0$, resulto ser un punto de inflexión).

$h''(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3}$

$h''\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3} > 0$ y $h'\left(-\sqrt{3}\right) = 0$, se tiene un mínimo local en $x_2 = -\sqrt{3}$.

$h''\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} < 0$ y $h'\left(\sqrt{3}\right) = 0$, se tiene un máximo local en $x_3 = \sqrt{3}$.

Zonas de monotonía

(donde tiene inversa)

Usando la información que se tiene, las zonas a analizar son $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$, $(-1, 1)$, $\left(1, \sqrt{3}\right)$ y $\left(\sqrt{3}, \infty\right)$.

Con $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $h'(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3} < 0$, por tanto h es decreciente.

Por una tabla de valores:

$h'(-1000) = -1.0$
$h'(-10) = -0.98969$
$h'\left(-\sqrt{3.1}\right) = -7.0295 \times 10^{-2}$
$x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $h'(x) < 0$, h es decreciente.

Con $x \in \left(-\sqrt{3}, -1\right)$, $h'(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3} > 0$, por tanto h es creciente.
Por una tabla de valores:

$h'\left(-\sqrt{2.9}\right) = 8.0332 \times 10^{-2}$
$h'\left(-\sqrt{2}\right) = 2.0$
$h'(-1.1) = 49.113$
$x \in \left(-\sqrt{3}, -1\right)$, $h'(x) > 0$, h es creciente.

Con $x \in (-1, 1)$, $h'(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3} \geq 0$, por tanto h es creciente.
Por una tabla de valores:

$h'(-0.99) = 4999.1$
$h'(0) = 0$
$h'(0.99) = 4999.1$
$x \in (-1, 1)$, $h'(x) \geq 0$, h es creciente.

Con $x \in \left(1, \sqrt{3}\right)$, $h'(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3} > 0$, por tanto h es creciente.
Por una tabla de valores:

$h'(1.1) = 49.113$
$h'\left(\sqrt{2}\right) = 2.0$
$h'\left(\sqrt{2.99}\right) = 7.5503 \times 10^{-3}$
$x \in \left(1, \sqrt{3}\right)$, $h'(x) > 0$, h es creciente.

Con $x \in \left(\sqrt{3}, \infty\right)$, $h'(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3} < 0$, por tanto h es decreciente.
Por una tabla de valores:

$h'\left(\sqrt{3.1}\right) = -7.0295 \times 10^{-2}$
$h'(10) = -0.98969$
$h'(1000) = -1.0$
$x \in \left(\sqrt{3}, \infty\right)$, $h'(x) < 0$, h es decreciente.

Zonas de concavidad

$h''(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3}$.
Usando la información que se tiene, las zonas a analizar son $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$.
Porque en $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$ se tiene un mínimo y un máximo respectivamente.
Con $x \in (-\infty, -1)$, $h''(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3} > 0$, por tanto h es cóncava hacia arriba.
Por una tabla de valores:

$h''(-1000) = 2.0 \times 10^{-9}$
$h''\left(-\sqrt{3}\right) = 2.5981$
$h''(-1.1) = 1000.1$
$x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $h''(x) > 0$, h es cóncava hacia arriba.

Con $x \in (-1, 0)$, $h''(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3} < 0$, por tanto h es cóncava hacia abajo.

Por una tabla de valores:

$h''(-0.99) = -1.0 \times 10^6$
$h''(-0.5) = -7.7037$
$h''(-0.01) = -0.06002$
$x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $h''(x) < 0$, h es cóncava hacia abajo.

Con $x \in (0,1)$, $h''(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3} > 0$, por tanto h es cóncava hacia arriba.

Por una tabla de valores:

$h''(0.01) = .06002$
$h''(0.5) = 7.7037$
$h''(0.99) = 1.0 \times 10^6$
$x \in (0,1)$, $h''(x) > 0$, h es cóncava hacia arriba.

Con $x \in (1,\infty)$, $h''(x) = -2x\frac{3+x^2}{(-1+x^2)^3} < 0$, por tanto h es cóncava hacia abajo.

Por una tabla de valores:

$h''(1.01) = -1.0 \times 10^6$
$h''(10) = -2.1231 \times 10^{-3}$
$h''(10000) = -2.0 \times 10^{-12}$
$x \in (0,1)$, $h''(x) > 0$, h es cóncava hacia abajo.

Gráfica de la función