Problema del diseño de una lata cilíndrica

(Algo acerca de la matemática aplicada, A.N. Tijonov, D.P. Kostomárov, Ed. Mir, Moscú)

Dos criterios:

a) Menor superficie.

b) Menor Longitud de costuras:

Volumen: $V = \pi r^2 h.$

Superficie: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$

Longitud: $L = 4\pi r + h.$

a) Fijo el volumen y despejo h: $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Sustituyendo h en S, se obtiene $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$,

$S(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$.

Se obtiene los puntos críticos.

$\frac{d}{dr} S(r) = \frac{d}{dr}\left(2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}\right) = -2\frac{-2\pi r^3 + V}{r^2}$.

$S'(r) = -2\frac{-2\pi r^3+V}{r^2}$,

$2\frac{-2\pi r^3+V}{r^2} = 0$, $2\frac{-2\pi r^3+V}{r^2}$, $-2\pi r^3 + V = 0$, $r^3 = \frac{V}{2\pi}$,

$r_a = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Se usa la segunda derivada para identificar si es mínimo.

$\frac{d}{dr} S'(r) = \frac{d}{dr}\left(-2\frac{-2\pi r^3+V}{r^2}\right) = 4\frac{\pi r^3+V}{r^3}$.

$S''(r) = 4\frac{\pi r^3+V}{r^3}$.

$S''(r_a) = 4\frac{\pi\frac{V}{2\pi}+V}{\frac{V}{2\pi}} = 12\pi > 0.$

Con el radio $r_a = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ tiene el mínimo de S.

b) Similarmente, se fija el volumen, $h = \frac{V}{\pi r^2}$

Sustituyendo h en L, se obtiene $L(r) = 4\pi r + \frac{V}{\pi r^2}$.

Se buscan los puntos críticos.

$\frac{d}{dr} L(r) = \frac{d}{dr}\left(4\pi r + \frac{V}{\pi r^2}\right) = -2\frac{-2\pi^2 r^3+V}{\pi r^3}$,

$L'(r) = -2\frac{-2\pi^2 r^3+V}{\pi r^3}$

$-2\frac{-2\pi^2 r^3+V}{\pi r^3} = 0$, $-2\pi^2 r^3 + V = 0$, $2\pi^2 r^3 = V$,

$r_b = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}$

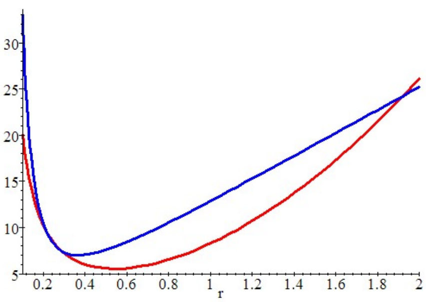
Se usa la segunda derivada para identificar si es mínimo.

$\frac{d}{dr} L'(r) = \frac{d}{dr}\left(-2\frac{-2\pi^2 r^3+V}{\pi r^3}\right) = 6\frac{V}{\pi r^4}$

$L''(r) = 6\frac{V}{\pi r^4}$.

$L''(r_b) = 6\frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}^4} > 0.$

Con el radio $r_b = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi^2}}$ se tiene el mínimo de L.



Gráficas de $S(r)$ (en rojo) y de $L(r)$ (en azul), con $V = 1$

Con $V = 1$.
$r_a = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 0.541\,93$
$r_b = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi^2}} = 0.370\,02$