

Unidad 5

Monotonía, concavidad y trazado de gráficas

Objetivo

Dada una función, determinar su dominio, sus ceros, sus puntos críticos, sus puntos de inflexión, sus intervalos de monotonía, sus intervalos de concavidad y usar esta información para esbozar su gráfica.

Contenido

1. El teorema del valor medio.
2. Funciones crecientes y funciones decrecientes.
3. Criterio de la primera derivada para extremos locales.
4. Puntos de inflexión.
5. Concavidad y trazado de gráficas.
6. Criterio de la segunda derivada para extremos locales.

Indicadores de evaluación

1. Usar el teorema del valor medio para argumentar porqué la diferencia de dos funciones que tienen la misma derivada en un intervalo debe ser una constante.
2. Utilizar el teorema del valor medio para acotar el número de ceros de una función monótona.
3. Encontrar los puntos críticos de una función y usar el criterio de la primera derivada para clasificarlos.
4. Determinar los intervalos de monotonía de una función, mediante el signo de su primera derivada.
5. Determinar los valores máximos y mínimos locales y absolutos de una función en un intervalo dado.
6. Encontrar los puntos críticos de una función y usar el criterio de la segunda derivada para clasificarlos.
7. Determinar los puntos de inflexión de una función mediante el cambio de signo de la segunda derivada.

Unidad 8

Funciones logarítmicas y exponenciales

Objetivo

Usar los métodos del cálculo diferencial para obtener y analizar las gráficas de las funciones *exponencial* y *logaritmo natural*.

Contenido

1. Funciones inversas y sus derivadas.
2. Logaritmos naturales.
3. Derivadas logarítmicas.
4. La función exponencial.

Indicadores de evaluación

1. Esbozar la gráfica de una función invertible a partir de la gráfica de su inversa.
2. Decidir gráfica y algebraicamente si una función es inyectiva y encontrar su inversa.
3. Determinar gráfica y algebraicamente el dominio y el rango de una función y de su inversa.
4. Obtener la derivada de una función invertible a partir de la derivada de su inversa.
5. Definir las funciones logaritmo natural y exponencial y establecer sus propiedades fundamentales.
6. Calcular derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas.
7. Utilizar las propiedades básicas de las funciones exponenciales y logarítmicas para simplificar expresiones o resolver ecuaciones que involucren este tipo de funciones.
8. Utilizar el método de diferenciación logarítmica para calcular derivadas.
9. Dada una función exponencial o logarítmica, determinar su dominio, sus ceros, sus intervalos de positividad, sus asíntotas, sus intervalos de monotonía, sus extremos locales, sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y usar esta información para esbozar su gráfica.

Actividades

1. Estudia las secciones 7.1, 7.2 y 7.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 8, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar la unidad 8 antes de finalizar la Semana 8.

Tarea de la unidad 8

“Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes.”
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. A partir de las gráficas de las siguientes funciones, esboza las gráficas de las correspondientes funciones inversas:

$$(a) f(x) = 2 - x^2, x \geq 0; \quad (b) f(x) = x^2 - 2x - 1, x \leq 1.$$

2. Decide si las siguientes funciones son inyectivas y en caso afirmativo encuentra su inversa:

$$(a) f(x) = x^2 - 2x, x \leq 2; \quad (b) f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}, x \neq 3.$$

3. Determina gráfica y algebraicamente los dominios y rangos de las siguientes funciones y los de sus correspondientes inversas:

$$(a) f(x) = \sqrt{2 - x}, x \leq 2; \quad (b) f(x) = 4x - x^2, x \leq 2.$$

4. Si $f(x) = x^3 + 5x + 1$, encuentra $(f^{-1})'(-5)$. Nota que $f(-1) = -5$.

5. Utiliza las propiedades de los logaritmos para simplificar:

$$(a) \ln(8/2^5); \quad (b) 3^{\log_3 5}; \quad (c) \ln(2^{2/5}\sqrt{2}).$$

6. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones:

$$(a) y = x^2 \ln x; \quad (b) y = x^3 e^x + \ln(e^x \ln x); \quad (c) y = \frac{1 + e^x}{1 - e^{-x}}.$$

7. Simplifica las siguientes expresiones:

$$\ln(y^3) - 2 \ln y; \quad \ln(x^x e^{2 \ln x}); \quad e^{\ln(x+1)^2 - 2 \ln x}.$$

8. Utiliza diferenciación logarítmica para derivar las siguientes funciones:

$$(a) y = \left(\frac{t}{t^2 + 1}\right)^5; \quad (b) y = \sqrt{\frac{x \ln(x+1)e^{(x+2)}}{x^2 + 1}}; \quad (c) y = x^x e^{x \cos x}.$$

9. Para cada una de las funciones

$$(a) \quad y = x^2 e^{-2x}, \quad (b) \quad y = x \ln(x^2),$$

determina su dominio, sus ceros, sus intervalos de positividad, sus asíntotas, sus intervalos de monotonía, sus extremos locales, sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y usa esa información para esbozar su gráfica.

10. Resuelve para x en las siguientes ecuaciones:

$$\ln(x + 1) + \ln x = 4; \quad 2x \ln x + x = 0; \quad y = e^x - e^{-x}.$$

Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 7.1: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 19, 23, 25, 31, 32, 50, 53 y 54.
- Sección 7.2: 1, 3, 5, 11, 17, 23, 29, 55, 59, 63 y 67.
- Sección 7.3: 1, 3, 5, 9, 11, 13, 19, 53, 57, 61, 71, 82, 111, 114 y 115.

Unidad 9

Trigonométricas inversas. Regla de L'Hôpital y polinomios de Taylor

Objetivo

Obtener y analizar las gráficas de las funciones trigonométricas inversas, calcular límites de formas indeterminadas y aplicar el concepto de aproximación de una función mediante polinomios de Taylor.

Contenido

1. Funciones trigonométricas inversas.
2. Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital.
3. El Teorema de Taylor.

Indicadores de evaluación

1. Utilizar triángulos o el círculo trigonométrico para calcular valores importantes de las funciones trigonométricas inversas.
2. Calcular derivadas de funciones trigonométricas inversas.
3. Utilizar las propiedades básicas de las funciones trigonométricas inversas para simplificar expresiones que involucren este tipo de funciones.
4. Utilizar las propiedades básicas de las funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones que involucren este tipo de funciones.
5. Esbozar las gráficas de las funciones trigonométricas inversas.
6. Utilizar la regla de L'Hôpital para calcular límites de formas indeterminadas.
7. Encontrar e interpretar gráficamente la aproximación de los polinomios de Taylor de grados uno y dos (aproximación lineal y cuadrática) de una función en un punto dado.
8. Encontrar el polinomio de Taylor de grado n de una función en un punto dado.
9. Utilizar polinomios de Taylor para obtener aproximaciones de los valores de una función alrededor de un punto dado.

Actividades

1. Estudia la secciones 7.5, 7.6 y la parte de polinomios de Taylor de la Sección 10.8 de la Decimosegunda edición del Thomas y el material sobre polinomios de Taylor que se te entregará en el SAI. Resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 9, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar la unidad 9 antes de finalizar la Semana 9.

Tarea de la unidad 9

“Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes.”
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Por medio de un triángulo calcula:

$$(a) \operatorname{sen} \left(\cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right); \quad (b) \tan \left(\operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{-1}{2} \right) \right).$$

2. Encuentra y' en cada una de las siguientes ecuaciones:

$$(a) y = \arccos(x^2) - 5 \ln(\operatorname{sen}^{-1} x); \quad (b) y = 2x^3 \ln(\arctan x^2);$$

3. Simplifica

$$(a) \operatorname{sen}(\arctan(x/2)); \quad (b) \tan \left(\operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} \right) \right).$$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$2 + 3 \operatorname{sen} x = 1 + \operatorname{sen} x; \quad e^{2 \tan x} = 1 + e^{\tan x}.$$

5. Esboza las gráficas de las siguientes funciones:

$$y = -2 \arccos(x/3); \quad y = 2 - \arctan(2x).$$

6. Utiliza la regla de L'Hôpital para encontrar los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad (c) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \operatorname{sen} t}{t^3}.$$

7. Usa la regla de L'Hôpital para encontrar los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10}}{e^x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}; \quad (c) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 \ln t}{e^t}.$$

8. Encuentra la linealización de $f(x)$ en los puntos dados:

$$(a) f(x) = x^2 - 4x, \quad x = 1; \quad (b) f(x) = \tan x, \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Enseguida esboza la gráfica de cada una de las funciones dadas, conjuntamente con las correspondientes linealizaciones en el punto dado.

9. Encuentra el polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 0$ de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = (1+x)^3; \quad (b) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}; \quad (c) \quad f(x) = \arctan(2x).$$

10. Encuentra el polinomio de Taylor de grado n en $x = 0$ de las siguientes funciones y estime el error si $|x| \leq 1/2$:

$$(a) \quad f(x) = \operatorname{sen} x; \quad (b) \quad f(x) = e^x; \quad (c) \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

11. Usa los resultados del ejercicio anterior para encontrar el polinomio de Taylor de grado n en $x = 1$ de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = e^{x+2}; \quad (b) \quad f(x) = \frac{1}{4-x}; \quad (c) \quad f(x) = \operatorname{sen}(2-2x).$$

12. Utiliza aproximaciones de Taylor de grado 3 para obtener, sin calculadora, un valor aproximado de

$$(a) \quad \sqrt{17}; \quad (b) \quad (28)^{2/3}; \quad (c) \quad \tan(63^\circ).$$

¿En cuántos decimales coinciden las aproximaciones con los resultados que se obtienen directamente de tu calculadora?

Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 7.5: 1, 6, 11, 16, 21, ..., 66, 67 y 74.
- Sección 7.6: 3, 6, 9, 12, ..., 42.
- Sección 10.8: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Unidad 10

Evaluación global

Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar todos los temas, conceptos y métodos estudiados en el curso.

Contenido

Todos los temas del curso.

Indicadores de evaluación

1. Calcular derivadas de funciones definidas por *sumas, productos, cocientes, potencias y composiciones*, así como de *funciones implícitas*.
2. Calcular derivadas de *funciones trascendentes y sus inversas*.
3. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.
4. Determinar los intervalos de derivabilidad de una función.
5. Dada la posición de un objeto que se mueve en línea recta, determinar su velocidad y aceleración instantáneas.
6. Resolver problemas de tasas relacionadas.
7. Encontrar los puntos críticos y determinar los valores extremos absolutos de una función en un intervalo cerrado finito.
8. Utilizar la derivada para resolver problemas de optimización aplicada.
9. Decidir si una función es inyectiva y encontrar su inversa, así como el dominio, el rango, la derivada y la gráfica de la inversa.
10. Simplificar expresiones que involucren funciones trascendentes y sus inversas.
11. Resolver ecuaciones que involucren funciones trascendentes y sus inversas.
12. Usar la regla de L' Hôpital para calcular límites de formas indeterminadas.
13. Determinar el dominio, los ceros, los intervalos de positividad, las asíntotas, los intervalos de monotonía, los extremos locales, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de una función dada (algebraica o trascendente) y usar esa información para esbozar su gráfica.

14. Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.
15. Utilizar polinomios de Taylor para obtener aproximaciones de los valores de una función alrededor de un punto dado.

Actividades y tarea

1. Revisa cuidadosamente el material del curso siguiendo lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que aún no dominas. ¡APROVECHA ESTA ÚLTIMA OPORTUNIDAD PARA REVISAR A PROFUNDIDAD LOS TEMAS QUE NO TE QUEDARON CLAROS EN EL CURSO Y RESUELVE TODAS TUS DUDAS! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Recuerda que la calificación que obtengas en esta unidad será tu tercera calificación parcial.*
2. El requisito para presentar el examen de esta unidad es que entregues un ensayo sobre la controversia L'Hôpital–Bernoulli sobre la *regla de L'Hôpital*. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Recuerda que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*
3. Es muy recomendable aprobar esta unidad antes de finalizar la Semana 10.