Funciones logarítmicas Éstas son las funciones $f(x) = \log_a x$, donde la base $a \neq 1$ es una constante positiva. Las *funciones inversas* de las funciones exponenciales y el cálculo de tales funciones se analizan en el capítulo 7. La figura 1.23 muestra las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con diferentes bases. En cada caso, el dominio es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$.

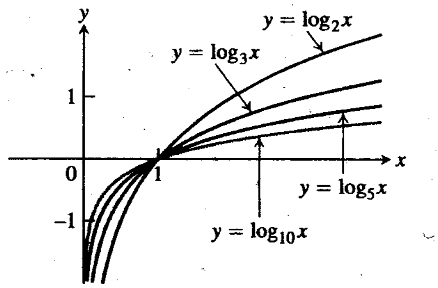


FIGURA 1.23 Gráficas de cuatro funciones logarítmicas.

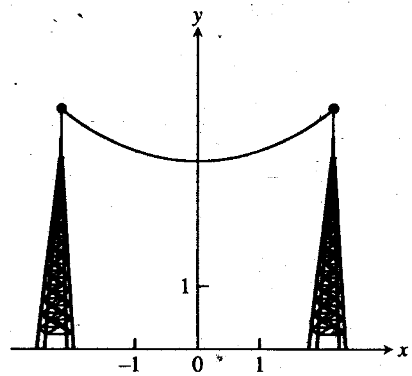


FIGURA 1.24 Gráfica de una catenaria o cable colgante. (La palabra latina *catena* significa "cadena").

Funciones trascendentales Se trata de funciones que no son algebraicas e incluyen las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales y logarítmicas, así como muchas otras funciones. Un ejemplo particular de una función trascendental es una **catenaria**. Su gráfica tiene la forma de un cable, como el de una línea telefónica o un cable eléctrico, que cuelga libremente bajo su propio peso de un soporte a otro (figura 1.24). La función que define la gráfica se analiza en la sección 7.7.

Funciones

En los ejercicios 1 a 6, determine el dominio y el rango de cada una de las funciones.

1. $f(x) = 1 + x^2$

2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

3. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$

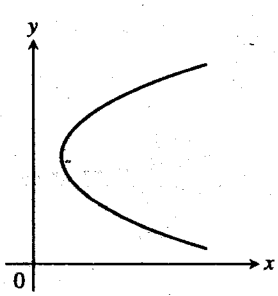
4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

5. $f(t) = \dfrac{4}{3 - t}$

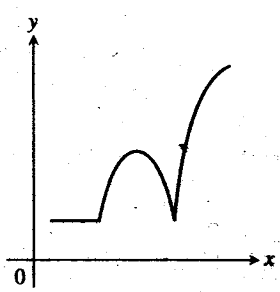
6. $G(t) = \dfrac{2}{t^2 - 16}$

En los ejercicios 7 y 8, ¿cuál de las gráficas representa la gráfica de una función de x? ¿Cuáles no representan a funciones de x? Dé razones que apoyen sus respuestas.

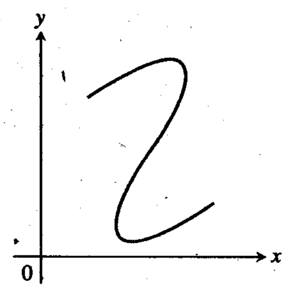
7. a.



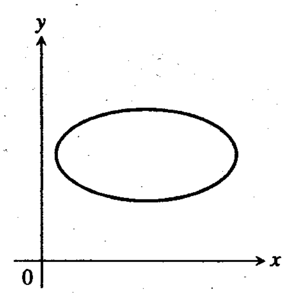
b.



8. a.



b.



Determinación de fórmulas para funciones

9. Exprese el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función del lado x del triángulo.

10. Exprese la longitud del lado de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del cuadrado. Exprese el área como una función de la longitud de la diagonal.

11. Exprese la longitud del lado de un cubo como una función de la longitud de la diagonal d del cubo. Exprese el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de la diagonal.

12. Un punto P en el primer cuadrante pertenece a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Exprese las coordenadas de P como funciones de la pendiente de la recta que une a P con el origen.

13. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de la recta $2x + 4y = 5$. Sea L la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$. Escriba L como función de x.

14. Considere el punto (x, y) que está en la gráfica de $y = \sqrt{x - 3}$. Sea L la distancia entre los puntos (x, y) y $(4, 0)$. Escriba L como función de y.

Las funciones y sus gráficas

En los ejercicios 15 a 20, determine el dominio y grafique las funciones.

15. $f(x) = 5 - 2x$
16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$
17. $g(x) = \sqrt{|x|}$
18. $g(x) = \sqrt{-x}$
19. $F(t) = t/|t|$
20. $G(t) = 1/|t|$

21. Determine el dominio de $y = \dfrac{x+3}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$.

22. Determine el rango de $y = 2 + \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$.

23. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x.

a. $|y| = x$ b. $y^2 = x^2$

24. Grafique las siguientes ecuaciones y explique por qué no son gráficas de funciones de x.

a. $|x| + |y| = 1$ b. $|x + y| = 1$

Funciones definidas por partes

En los ejercicios 25 a 28, grafique las funciones.

25. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

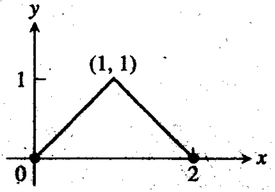
26. $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

27. $F(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \le 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$

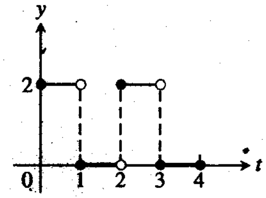
28. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \end{cases}$

Determine una fórmula para cada función graficada en los ejercicios 29 a 32.

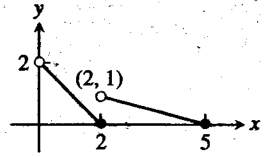
29. a.



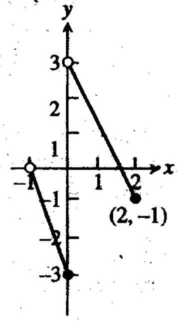
b.



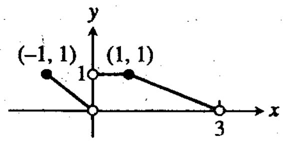
30. a.



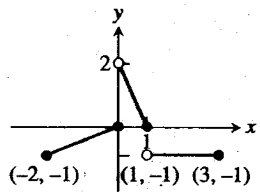
b.



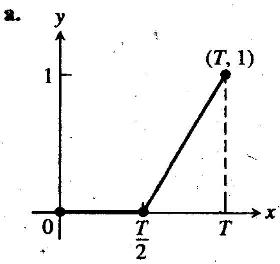
31. a.



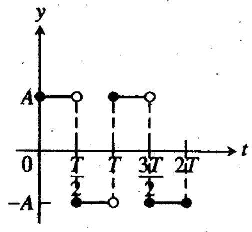
b.



32. a.



b.



Las funciones mayor entero y menor entero

33. ¿Para qué valores de x es

a. $\lfloor x \rfloor = 0$? b. $\lceil x \rceil = 0$?

34. ¿Cuáles valores x de números reales satisfacen la ecuación $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$?

35. ¿Es cierto que $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ para todo número real x? Justifique su respuesta.

36. Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \ge 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0. \end{cases}$$

¿Por qué $f(x)$ se denomina *parte entera* de x?

Funciones crecientes y funciones decrecientes

Grafique las funciones en los ejercicios 37 a 46. Si tiene simetrías, ¿qué tipo de simetría tienen? Especifique los intervalos en los que la función es creciente y los intervalos donde la función es decreciente.

37. $y = -x^3$
38. $y = -\dfrac{1}{x^2}$
39. $y = -\dfrac{1}{x}$
40. $y = \dfrac{1}{|x|}$
41. $y = \sqrt{|x|}$
42. $y = \sqrt{-x}$
43. $y = x^3/8$
44. $y = -4\sqrt{x}$
45. $y = -x^{3/2}$
46. $y = (-x)^{2/3}$

Funciones pares y funciones impares

En los ejercicios 47 a 58, indique si la función es par, impar o de ninguno de estos tipos. Justifique su respuesta.

47. $f(x) = 3$
48. $f(x) = x^{-5}$
49. $f(x) = x^2 + 1$
50. $f(x) = x^2 + x$
51. $g(x) = x^3 + x$
52. $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$
53. $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
54. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
55. $h(t) = \dfrac{1}{t - 1}$
56. $h(t) = |t^3|$
57. $h(t) = 2t + 1$
58. $h(t) = 2|t| + 1$

Teoría y ejemplos

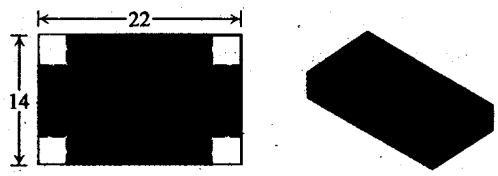
59. La variable s es proporcional a t, y $s = 25$ cuando $t = 75$. Determine t cuando $s = 60$.

60. Energía cinética La energía cinética K de una masa es proporcional al cuadrado de su velocidad v. Si $K = 12{,}960$ joules, cuando $v = 18$ m/s, ¿cuál es el valor de K cuando $v = 10$ m/s?

61. Las variables r y s son inversamente proporcionales, mientras que $r = 6$ cuando $s = 4$. Determine s cuando $r = 10$.

62. Ley de Boyle La ley de Boyle establece que el volumen V de un gas, a temperatura constante, aumenta cuando la presión P disminuye, de manera que V y P son inversamente proporcionales. Si $P = 14.7$ lb/in^2 cuando $V = 1000$ in^3, entonces ¿cuál es el valor de V cuando $P = 23.4$ lbs/in^2?

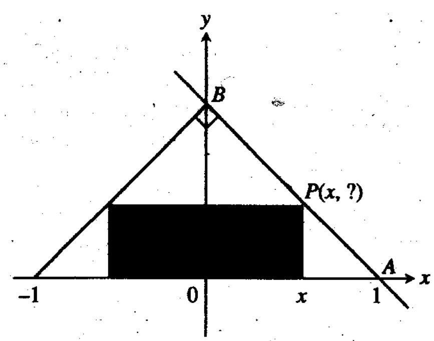
63. Una caja sin tapa se construye a partir de una pieza rectangular de cartón, cuyas dimensiones son 14 por 22 pulgadas (in). A la pieza de cartón se le cortan cuadrados de lado x en cada esquina y luego se doblan hacia arriba los lados, como en la figura. Exprese el volumen V de la caja como una función de x.



64. La siguiente figura muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa tiene una longitud de dos unidades.

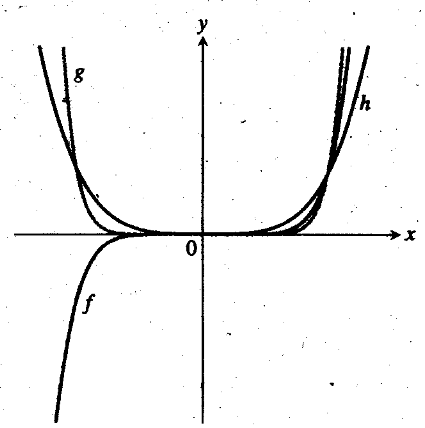
a. Exprese la coordenada y de P en términos de x. (Podría iniciar escribiendo una ecuación para la recta AB).

b. Exprese el área del rectángulo en términos de x.

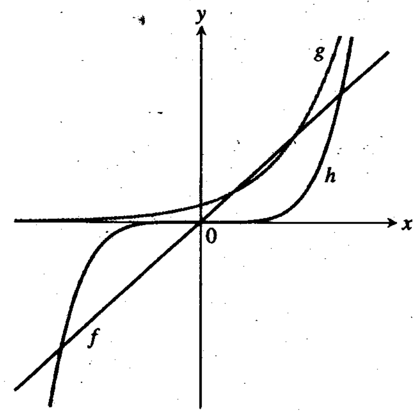


En los ejercicios 65 y 66 relacione cada ecuación con su gráfica. No utilice un dispositivo para graficar y dé razones que justifiquen su respuesta.

65. **a.** $y = x^4$ **b.** $y = x^7$ **c.** $y = x^{10}$



66. **a.** $y = 5x$ **b.** $y = \sqrt[5]{x}$ **c.** $y = x^5$



T 67. **a.** Grafique juntas las funciones $f(x) = x/2$ y $g(x) = 1 + (4/x)$ para identificar los valores de x que satisfacen

$$\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}.$$

b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inciso *a*).

T 68. **a.** Grafique juntas las funciones $f(x) = 3/(x - 1)$ y $g(x) = 2/(x + 1)$ para identificar los valores de x que satisfacen

$$\frac{3}{x - 1} < \frac{2}{x + 1}.$$

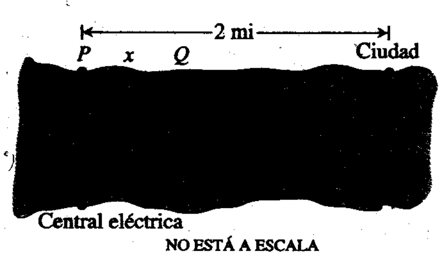
b. Confirme algebraicamente los hallazgos del inciso *a*).

69. Para que una curva sea *simétrica con respecto al eje x*, el punto (x, y) debe estar en la curva si y sólo si el punto $(x, -y)$ está en la curva. Explique por qué una curva que es simétrica con respecto al eje x no es la gráfica de una función a menos que la función sea $y = 0$.

70. Trescientos libros se venden en \$40 cada uno, lo que da por resultado un ingreso de (300)(\$40) = \$12,000. Por cada aumento de \$5 en el precio, se venden 25 libros menos. Exprese el ingreso R como una función del número x de incrementos de \$5.

71. Se va a construir un corral con la forma de un triángulo rectángulo isósceles con catetos de longitud de x pies (ft) e hipotenusa de longitud h ft. Si los costos de la cerca son de \$5/ft para los catetos y \$10/ft para la hipotenusa, escriba el costo total C de la construcción como una función de h.

72. Costos industriales Una central eléctrica se encuentra cerca de un río, donde éste tiene un ancho de 800 ft. Tender un cable de la planta a un lugar en la ciudad, 2 millas (mi) río abajo en el lado opuesto, tiene un costo de \$180 por ft que cruce el río y \$100 por ft en tierra a lo largo de la orilla del río.



a. Suponga que el cable va de la planta al punto Q, en el lado opuesto, lugar que se encuentra a x ft del punto P, directamente opuesto a la planta. Escriba una función $C(x)$ que indique el costo de tender el cable en términos de la distancia x.

b. Genere una tabla de valores para determinar si la ubicación más barata para el punto Q es menor a 2000 ft o mayor a 2000 ft del punto P.