Observe cómo se utilizaron aquí las diferentes reglas para las desigualdades. Al multiplicar por un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad. Así también ocurre al tomar recíprocos de una desigualdad en la que ambos lados son positivos. La desigualdad original se cumple si y sólo si $(1/3) < x < (1/2)$. El conjunto solución es el intervalo abierto $(1/3, 1/2)$. ■

Ejercicios A.1

1. Exprese $1/9$ como un decimal que se repite; para ello, utilice una barra para indicar los dígitos que se repiten. ¿Cuáles son las representaciones decimales de $2/9, 3/9, 8/9, 9/9$?

2. Si $2 < x < 6$, ¿cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son necesariamente verdaderas? ¿Cuáles no necesariamente son verdaderas?

a. $0 < x < 4$ **b.** $0 < x - 2 < 4$

c. $1 < \frac{x}{2} < 3$ **d.** $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

e. $1 < \frac{6}{x} < 3$ **f.** $|x - 4| < 2$

g. $-6 < -x < 2$ **h.** $-6 < -x < -2$

En los ejercicios 3 a 6, resuelva las desigualdades y muestre los conjuntos solución en la recta real.

3. $-2x > 4$ **4.** $5x - 3 \leq 7 - 3x$

5. $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$ **6.** $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$

Resuelva las ecuaciones en los ejercicios 7 a 9.

7. $|y| = 3$ **8.** $|2t + 5| = 4$ **9.** $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$

En los ejercicios 10 a 17, resuelva las desigualdades expresando los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos. Además, muestre cada conjunto en la recta real.

10. $|x| < 2$ **11.** $|t - 1| \leq 3$ **12.** $|3y - 7| < 4$

13. $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \leq 1$ **14.** $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$ **15.** $|2s| \geq 4$

16. $|1 - x| > 1$ **17.** $\left|\frac{r + 1}{2}\right| \geq 1$

En los ejercicios 18 a 21, resuelva las desigualdades. Exprese los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos y muéstrelos en la recta real. Utilice el resultado $\sqrt{a^2} = |a|$ cuando sea apropiado.

18. $x^2 < 2$ **19.** $4 < x^2 < 9$

20. $(x - 1)^2 < 4$ **21.** $x^2 - x < 0$

22. No caiga en el error de pensar que $|-a| = a$. ¿Para qué números reales a es verdadera esta ecuación? ¿Para cuáles números reales es falsa?

23. Resuelva la ecuación $|x - 1| = 1 - x$.

24. **Una demostración de la desigualdad del triángulo** Dé la razón que justifique cada uno de los pasos numerados en la siguiente demostración de la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned}
|a + b|^2 &= (a + b)^2 && (1)\\
&= a^2 + 2ab + b^2 &&\\
&\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 && (2)\\
&= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 && (3)\\
&= (|a| + |b|)^2 &&\\
|a + b| &\leq |a| + |b| && (4)
\end{aligned}$$

25. Demuestre que $|ab| = |a||b|$ para cualquier número a y b.

26. Si $|x| \leq 3$ y $x > -1/2$, ¿qué puede decir acerca de x?

27. Grafique la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$.

28. Demuestre que para cualquier número a, se cumple $|-a| = |a|$.

29. Sea a cualquier número positivo. Demuestre que $|x| > a$ si y sólo si $x > a$ o $x < -a$.

30. **a.** Si b es un número real distinto de cero, demuestre que $|1/b| = 1/|b|$.

b. Demuestre que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ para cualesquiera números reales a y $b \neq 0$.

A.2 Inducción matemática

Es posible demostrar que muchas fórmulas como

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2},$$

se cumplen para todo entero positivo n aplicando un axioma denominado *principio de inducción matemática*. Una demostración que utilice tal axioma se denomina *demostración mediante inducción matemática* o *demostración por inducción*.

Los pasos para demostrar una fórmula por inducción son los siguientes:

1. Verifique que la fórmula se cumple para $n = 1$.

2. Demuestre que si la fórmula se cumple para cualquier entero positivo $n = k$, entonces también se cumple para el entero que sigue, $n = k + 1$.