Tercer examen parcial de Introducción al Cálculo

(Examen extra, para verificar su nivel de aprendizaje)

SOLUSCION.

1. Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{(2x-4)\,(x+4)}$$

$f(x) = \frac{x^2-16}{(2x-4)(x+4)} = \frac{1}{2}\frac{x-4}{x-2}$

Encuentre:

RESPUESTA:

Primero, simplifico la división.

$f(x) = \frac{x^2-16}{(2x-4)(x+4)} = \frac{(x-4)(x+4)}{(2x-4)(x+4)} = \frac{x-4}{2x-4}$, o sea $f(x) = \frac{x-4}{2x-4}$

a. Su dominio.

$\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Se inbdetermina en $2x-4=0, x=2$.

b. Su rango.

$\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

c. Sus ceros.

En $x=4$, ya que en el denominador se tiene $x-4=0$.

d. Sus asíntotas verticales y horizontales.

Se analiza su comportamiento con $x \to \infty, x \to -\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\frac{x-4}{x-2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\frac{x-4}{x-2} = \frac{1}{2}$

Tien2 una asintota horizontal en $y = \frac{1}{2}$

En $x=2$, se analizan los limites izquierdo y derecho:

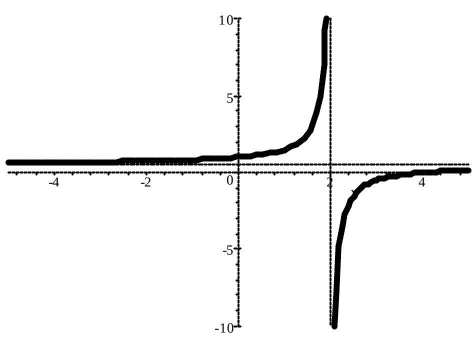
$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2}\frac{x-4}{x-2} = \infty$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2}\frac{x-4}{x-2} = -\infty$

Se trata de una asintota vertical con $x=2$.

e. Sus intervalos de positividad: $(-\infty, 2) \cup [4, \infty)$

f. Sus intervalos de continuidad: $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$



g. Esboze su gráfica.

2. Dada la función:

$$y = |x|$$

a. Explique si tiene derivada en cero.

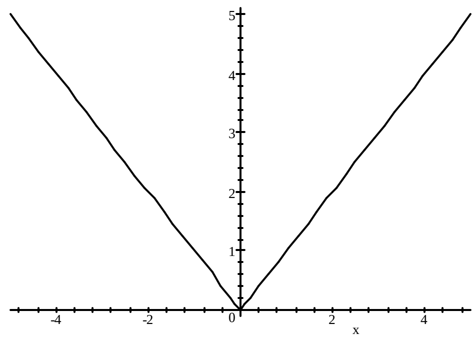
RESPUESTA.

La derivada en $x = 0$ debe existir, pero

$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$ y

$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$

No tiene derivada en $x = 0$.



Otra forma. La gráfica de $|x|$ es

Y no es suave en $x = 0$. y sus derivadas son las rectas $-x$ en $(-\infty, 0)$ y x en $(0, \infty)$.

b. En que intervalos tiene derivada $|x|$.

Para $x < 0$, se tiene

$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-x+h-(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h)-(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$

Para $x > 0$

$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$

Tiene derivada en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

3. Dada la función:

$$y = |x|^2$$

Explique si tiene derivada en todos los x$\in \mathbb{R}$.

Note que $x^2 = |x|^2$. Por tanto, sea $x \in \mathbb{R}$

$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h|^2-|x|^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh+h^2}{h} =$

$\lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$.

Y tiene derivada $2x$.

Otra forma, se trata de una función continua y suave en todo $\mathbb{R}$, por tanto es derivable en todo $\mathbb{R}$.

4. Calcule una aproximación lineal en $x = 17$ para la función:

$$g(x) = \sqrt{x}$$

usando el punto $(16,4) = (16, g(16))$, o sea $g(16) = \sqrt{16} = 4$.

RESPUESTA.

Se calcula la derivada en el punto $(16,4)$ para obtener la pendiente:

$m = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{16+h}-\sqrt{16}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{16+h}-\sqrt{16}}{h} \frac{\sqrt{16+h}+\sqrt{16}}{\sqrt{16+h}+\sqrt{16}} = \lim_{h \to 0} \frac{16+h-16}{h\sqrt{16+h}+\sqrt{16}} =$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{16+h}+\sqrt{16}} = \frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{16}} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}$.

La ordenada al origen se obtiene de $4 = \frac{1}{8}(16) + b$, $b = 2$.

La recta en el punto $(16,4)$ es entonces $y = \frac{1}{8}x + 2$.

La aproximación lineal en $x = 17$ se obtiene de $y = \frac{1}{8}(x) + 2$ y es

$\frac{1}{8}(17) + 2 = \frac{17+16}{8} = \frac{33}{8}$.