Segundo examen parcial de Introducción al Cálculo

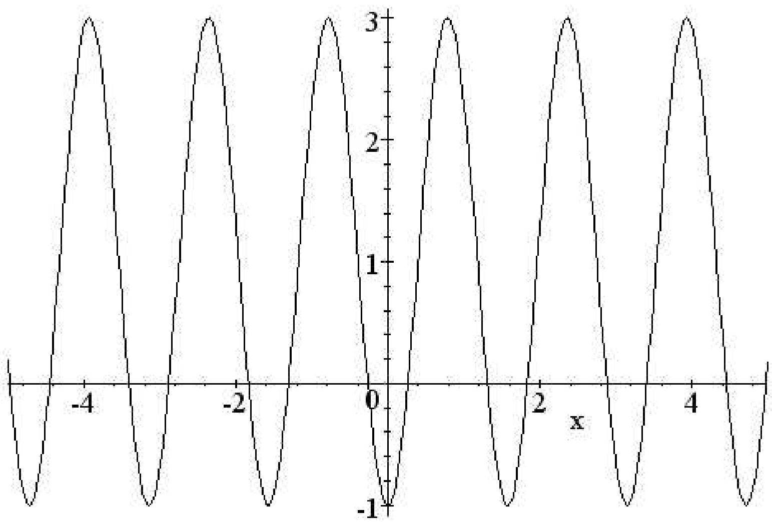
(Examen extra, para verificar su nivel de aprendizaje)
SOLUCION

1. Esboza la gráfica de las siguientes funciones, determina sus ceros, su amplitud, su periodo, su frecuencia, su rango, su dominio y su paridad:

   (a) [20]

   $$f(x) = 1 - 2\cos(4x)$$

   RESPUESTA.
   Esbozo de la gráfica.

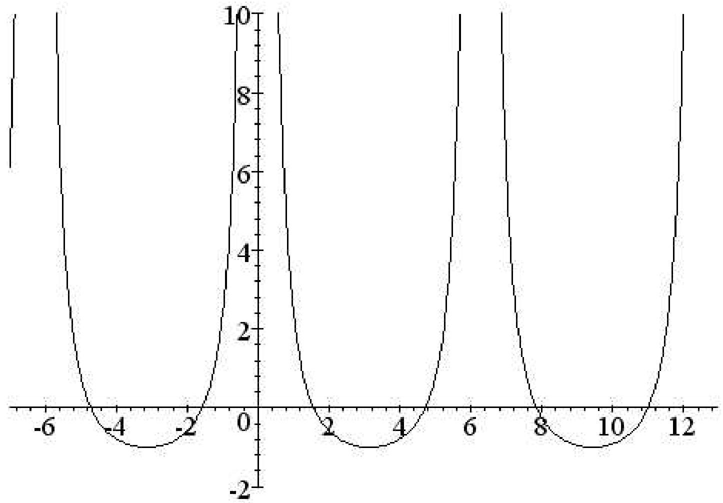
   Ceros.
   $1 - 2\cos(4x) = 0$, Solución $x_j = \frac{1}{12}\pi + j\pi; x_j = -\frac{1}{12}\pi - \pi$ con $j = 0, 1, 2, 3, ...$
   Amplitud: 2
   Periodo (T): $\frac{\pi}{2}$. El periodo es el valor angular mas pequeño tal que la función se repite, o sea,
   $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2\cos\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 - 2\cos(4x+2\pi) = 1 - 2(\cos(4x)\cos(2\pi) - \sin(4x)\sin(2\pi))$
   $= 1 - 2\cos(4x) = f(x)$
   Frecuencia(f): $\frac{2}{\pi}$ (El periodo y la frecuencia se relacionan como $f = \frac{1}{T}$
   Rango: $[-1, 3]$.
   Dominio: $\mathbb{R}$
   Paridad par: $f(-x) = 1-2\cos(4(-x)) = 1-2\cos(4x) = f(x)$.

   (b) [20]

   $$g(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

   RESPUESTA.
   Usando identidades trigonométricas:
   $g(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$, o sea:
   $g(\theta) = \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$.

Esbozo de la gráfica:



Ceros.
$\cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 0$, Solución $\theta_k = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ con $k \in \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...\}$ entero.
Amplitud: 1
Periodo(T): 2π. El periodo es el valor angular más pequeño tal que la función se repite, o sea, $g(\theta + 2\pi) = \frac{\cos(\theta+2\pi)}{\sin^2\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{2}\right)} = \frac{\cos(\theta)}{\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]^2} = \frac{\cos(\theta)}{\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\pi)+\sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^2} = \frac{\cos(\theta)}{\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\pi)\right]^2} = \frac{\cos(\theta)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = g(\theta)$.
Frecuencia(f): $\frac{1}{2\pi}$
Rango: $[-1, \infty)$.
Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{0, 2k\pi\}$ con $k \in \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...\}$ entero.
Paridad par: $g(-\theta) = \cot^2\left(\frac{-\theta}{2}\right) - 1 = \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = g(\theta)$.

2. [20] Sean

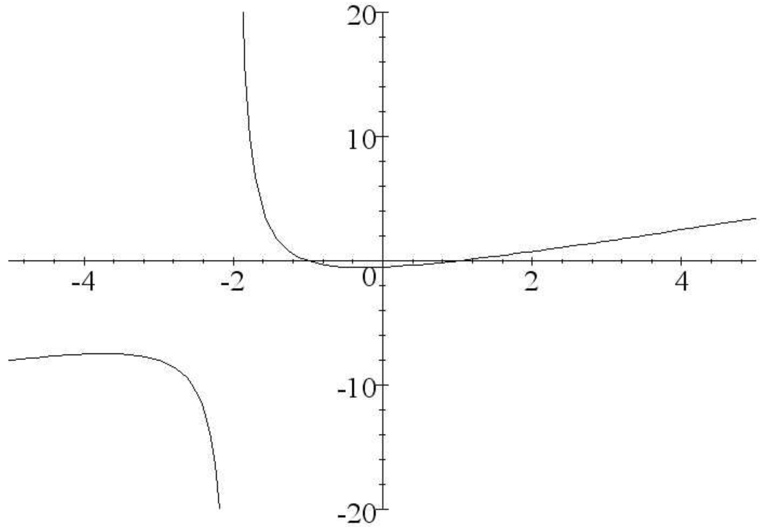
$$a(x) = \sin^{\frac{1}{2}}(x)$$
$$b(\theta) = \frac{\theta^2 - 1}{\theta + 2}$$

Encuentra $\left(\frac{a}{b}\right)(x), (a \circ b)(x)$; así como los respectivos dominios, rangos de $a, b, \left(\frac{a}{b}\right)(x)$, y $(a \circ b)(x)$.
RESPUESTA.
$\left(\frac{a}{b}\right)(x) = \frac{\sin^{\frac{1}{2}}(x)}{\frac{x^2-1}{x+2}} = \frac{(x+2)\sin^{\frac{1}{2}}(x)}{x^2-1}$.
$(a \circ b)(x) = a(b(x)) = a\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) = \sin^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)$.

	a	b
Dominio	$\mathrm{D}_a = [-(2j+2)\pi, -(2j+1)\pi] \cup [2j\pi, (2j+1)\pi]$, $j = 0, 1, 2, 3, ...$	$\mathbb{R}\setminus\{-2\}$
Rango	$[0, 1]$	$\mathrm{R}_b = (-\infty, b(\theta_2)] \cup [b(\theta_1), \infty)$

	$\frac{a}{b}$	$a \circ b$
Dominio	$\mathrm{D}_a\setminus\{-1, 1\}$	$(\mathrm{D}_a \cap \mathrm{R}_b)\setminus\{-2\}$
Rango	$\mathbb{R}$	$[0, 1]$

Para entender el rango de b se tiene la gráfica:

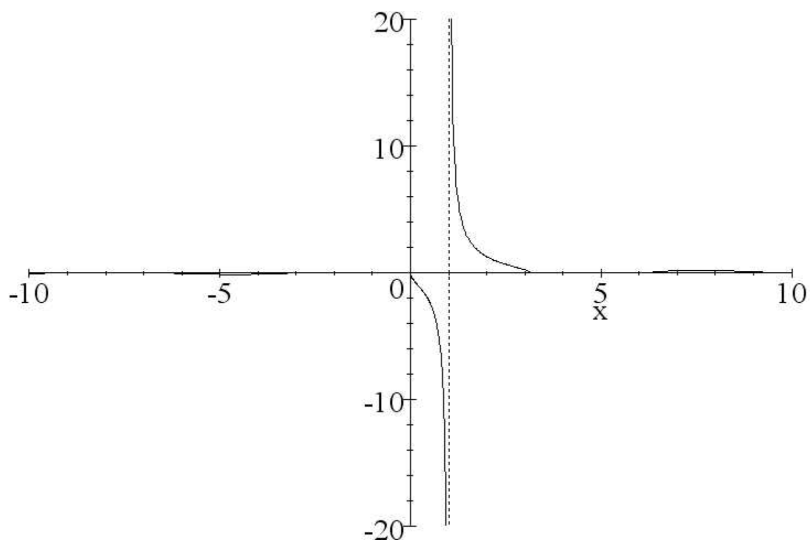


$\frac{d}{d\theta}b(\theta) = \frac{\theta^2+4\theta+1}{(\theta+2)^2}$, $\frac{\theta^2+4\theta+1}{(\theta+2)^2} = 0$, Puntos críticos: $\theta_1 = -2+\sqrt{3}, \theta_2 = -2-\sqrt{3}$

Máximo de b en $(-\infty,-2)$ es $\theta_2 = -2-\sqrt{3}$, $b(\theta_2) = b(-2-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\left(\left(-2-\sqrt{3}\right)^2 - 1\right)\sqrt{3} = -7.464\,09$.

Mínimo de b en $(2,\infty)$ es $\theta_1 = -2+\sqrt{3}$, $b(\theta_1) = b(-2+\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\left(\left(-2+\sqrt{3}\right)^2 - 1\right)\sqrt{3} = -0.535\,896$.

Para entender el rango de $\frac{a}{b}$ se tiene la gráfica:

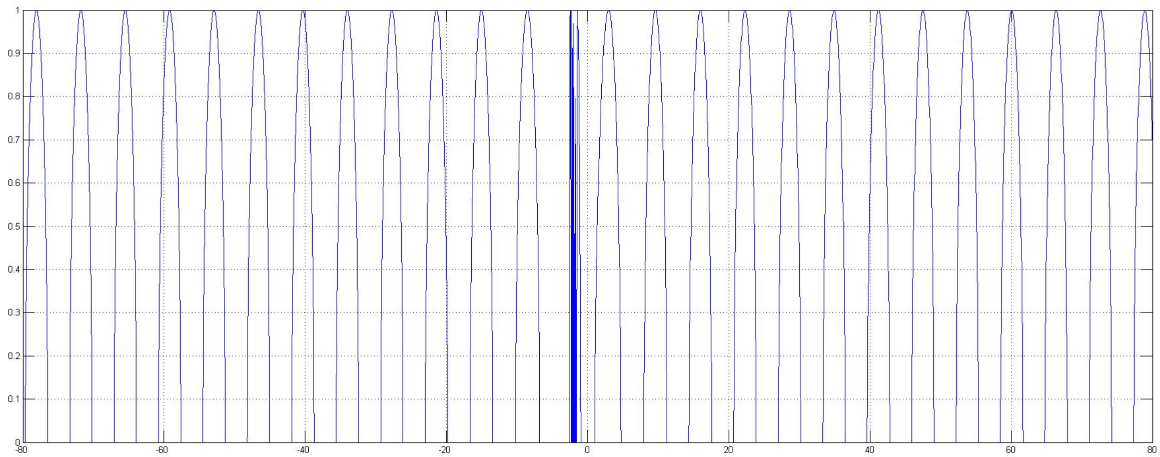


Note que en la asíntota vertical $x = 1$ se tiene $\lim_{x\to 1^-} \frac{a}{b}(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} \frac{a}{b}(x) = \infty$.

$a \circ b\,(x) = \sin^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)$

Esta función esta indeterminada en $x=-2$ y su dominio corresponde al Rango de b intersectado con el Dominio de a sin el punto $x=-2$.

Su grafica es



Note que oscila rapidamente alrededor de $x=-2$ y que solo corresponde con los valores donde el seno es positivo.

3. [30] Selecciona o calcula a, b y c para que la función siguiente:

(a) $h\,(x) = \begin{cases} a - x^2 & x \in [-5, 0) \\ b + x & x \in [0, 1] \\ c + 2(x-2)^2 & x \in (1, \infty) \end{cases}$

Sea continua en $[-5, \infty)$, es decir demuestra o explica que es continua, esboza su gráfica y que tiene limites en 0 y 1.

RESPUESTA.

Para que sea continua en 0: $\lim_{x\to 0^-} h\,(x) = \lim_{x\to 0^+} h\,(x)$.

Para que sea continua en 1: $\lim_{x\to 1^-} h\,(x) = \lim_{x\to 1^+} h\,(x)$.

$\lim_{x\to 0^-} h\,(x) = \lim_{x\to 0^-} a - x^2 = a$

$\lim_{x\to 0^+} h\,(x) = b + x = b$, de donde $a = b$.

$\lim_{x\to 1^-} h\,(x) = b + x = b + 1$

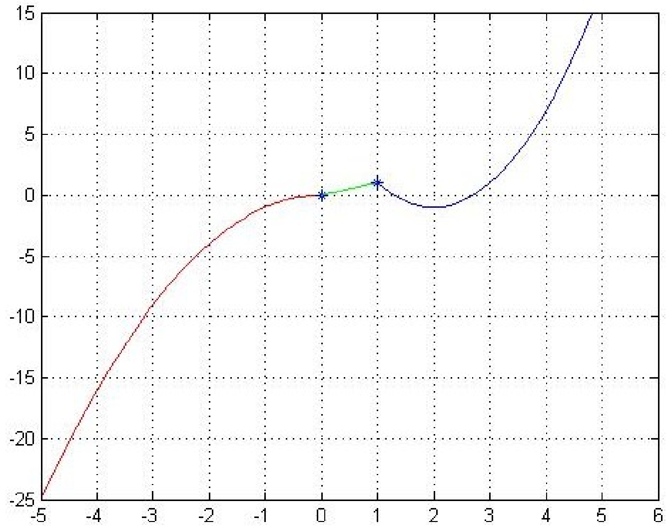
$\lim_{x\to 1^+} h\,(x) = c + 2(x-2)^2 = c + 2\,(1-2)^2 = c + 2$.

O sea $b + 1 = c + 2$, $b = c + 1$.

De donde se tienen las ecuaciones $a = b; b = c + 1$.

Tomando $c = -1$,se tiene $b = 0, a = 0$.

Esbozo de la gráfica con los parámetros $a = 0, b = 0, c = -1$ que hacen continua a la función h en $x = 0$ y $x = 1$.



4. [30] Calcula los límites:

(a)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

RESPUESTA.
$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ No es posible porque no se puede evaluar las raíz cuadrada en valores negativos.

(b)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

RESPUESTA.
$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$. Ya que para valores cercanos a cero el seno es proporcional a $\sqrt{x}$.

(c)

$$\lim_{x \to 1} \frac{ax^2 + bx}{\sqrt{x}}$$

RESPUESTA.
$\lim_{x \to 1} \frac{ax^2+bx}{\sqrt{x}} = a + b$.