Tercer examen parcial de Introducción al Cálculo

(Examen extra, para verificar su nivel de aprendizaje)
Profesor Carlos Barrón Romero
Trimestre 13I
Nombre:____
Matrícula:__________

1. Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{(3x+9)(x-6)}$$

Encuentre:

RESPUESTA.

$f(x) = \frac{x^2-9}{(3x+9)(x-6)} = \frac{1}{3}\frac{x-3}{x-6}$

a. [5] Su dominio: $\mathbb{R}\setminus\{6\}$

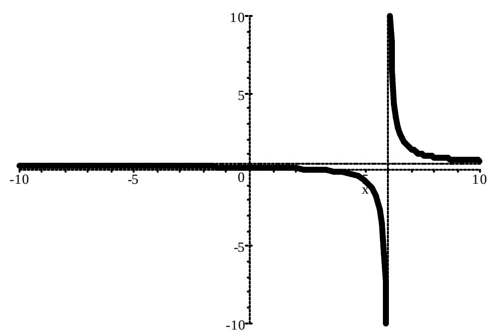
b. [5] Su rango: $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$

c. [5] Sus ceros: $x = 3$.

d. [10] Sus asíntotas verticales y horizontales: $x = 6$ y $y = \frac{1}{3}$.

e. [5] Sus intervalos de positividad: $(-\infty,3] \cup (6,\infty)$

f. [5] Sus intervalos de continuidad: $(-\infty,6) \cup (6,\infty)$



g. [5] Esboze su gráfica:

2. [20] Dada la función:

$$p(x) = \frac{2x-1}{x^2}$$

$\frac{d}{dx}\frac{2x-1}{x^2} = -2\frac{x-1}{x^3}$

Explique en que intervalos tiene derivada o si la tiene en todos los $x \in \mathbb{R}$.

RESPUESTA.

En $x = 0$ no esta definida, pero en $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$ es continua y suave y por tanto derivable.

3. [20] Calcule por una aproximación lineal en $x = 0.9$ el valor de la función:

$$g(x) = x^4$$

usando el punto $(1,1) = (1,g(1))$. Es decir, cálcule la recta tangente en $(1,1)$ de g y evaluelá con $x = 0.9$.

RESPUESTA.

Pendiente en $(1,1) = (x_0,y_0)$

$m = \lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^4-(1)^4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1+4h+6h^2+4h^3+h^4-1}{h} =$

$\lim_{h\to 0}\left(4 + 6h + 4h^2 + h^3\right) = 4$

De $y_0 = mx_0 + b$, se tiene $1 = 4(1) + b$. $b = -3$.

La recta tangente es $y = 4x - 3$. La aproximación pedida es

$y = 4(0.9) - 3 = 3.6 - 3 = 0.6$.

4. [20] Mediante una gráfica explique como pueden ser los valores de la derivada de una función suave y continua que es creciente en (a, x_0) y decreciente en (x_0, b).

RESPUESTA.

Sea f creciente en (a, x_0) y decreciente en (x_0, b).

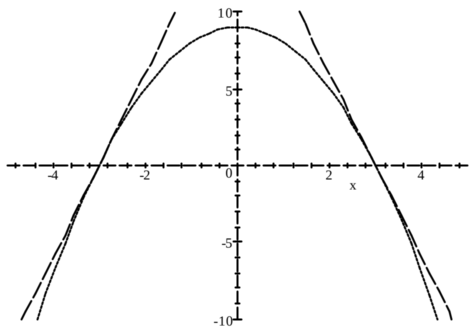
Por ejemplo si $x_1 < x_2 < x_0$, se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$ por ser creciente.

Luego la pendiente $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ es positiva y las derivadas en (a, x_0) son positivas.

Por otro lado, $x_0 < x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$ por ser decreciente.

Luego la pendiente $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ es negativa y las derivadas en (x_0, b) son negativas.

Por ejemplo $f(x) = 9 - x^2$, se tiene la figura:



Las pendientes con $x < 0$ son positivas, f es creciente, $f'(x) > 0$.

Las pendientes con $x > 0$ son negativas, f es decreciente, $f'(x) < 0$.