Solución Primer Examen Parcial de Introducción al Cálculo

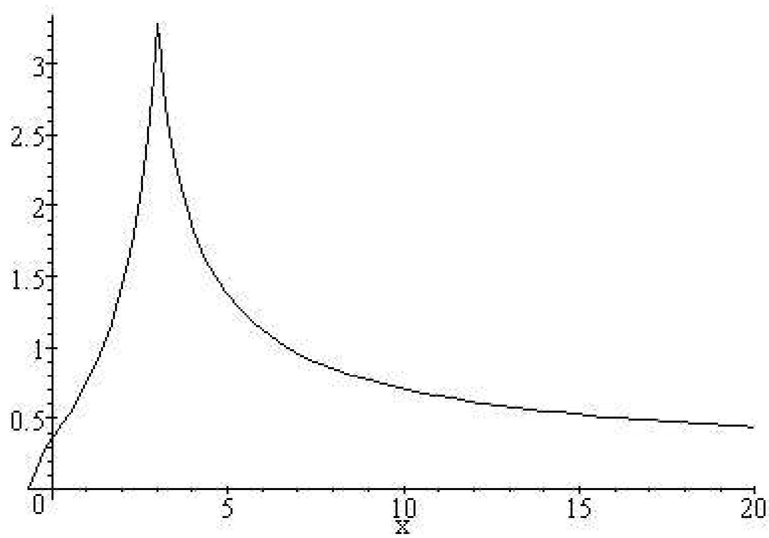
Profesor Carlos Barrón Romero
Trimestre 13I

1. Encuentra el (a) dominio, (b) rango, (c) ceros, (d) asíntotas y (e) esboza la gráfica de:

   (a) [20]

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+3x}}{1+|x-3|}$$

RESPUESTA 1.a.
(a) Dominio. El denominador nunca se anula. Como se requiere que $2+3x \geq 0$. Se tiene $x \geq -\frac{2}{3}$.
Por tanto el dominio de f es $[-\frac{2}{3}, \infty)$.
(b) Rango.
En $x = -2/3, f(-2/3) = 0$ y entre -2/3 y 3 crece.
En $x = 3, f(3) = \frac{\sqrt{2+9}}{1+|3-3|} = \sqrt{11}$. Y luego con $x \geq 3$ decrece.
El rango de f es $[0, \sqrt{11}]$.
(c) Ceros. El único cero de f ocurre en $x = -2/3$.
(d) Asíntotas. La asíntota es cuando $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x}}}{\frac{1}{x}+\left|1-\frac{3}{x}\right|} = 0$. Es la recta constante $y = 0$.
(e) Gráfica:
$f(x)$
0
$f(0) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
$f(1) = \frac{1}{3}\sqrt{5}$
$f(2) = \sqrt{2}$
$f(3) = \sqrt{11}$
$f(4) = \frac{1}{2}\sqrt{14}$
$f(5) = \frac{1}{3}\sqrt{17}$
$f(8) = \frac{1}{6}\sqrt{26}$
$f(14) = \frac{1}{6}\sqrt{11}$



(b)

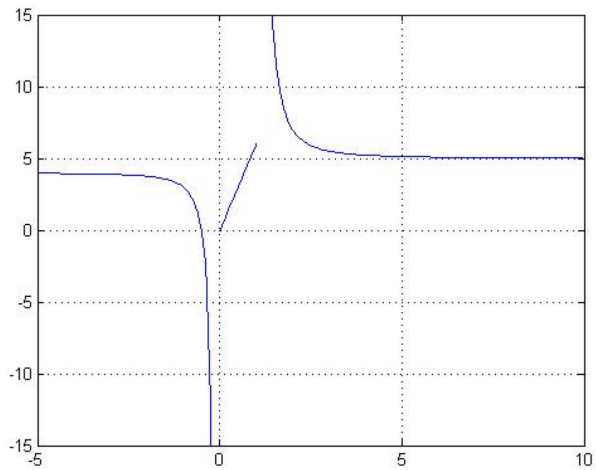
$$g\left(x\right)=\begin{cases} 4-\frac{1}{x^2} & x\in[-5,0) \\ 6x & x\in[0,1] \\ 5+\frac{2}{(x-1)^2} & x\in(1,\infty) \end{cases}$$

RESPUESTA 1.b.

(a) Dominio. Esta dado por los datos en intervalos y no tiene problemas en su definición. Por tanto el dominio de g es $[-5,\infty)$.

(e) Gráfica:

Su gráfica es en tres partes.



(b) Rango. El rango de g es $\mathbb{R}$.

(c) Ceros. Tiene dos ceros g uno en $[-5,0)$. Donde $f(x)=4-\frac{1}{x^2}=0$. Por tanto, $x=-\frac{1}{2}$. Y el otro en $[0,1]$, con $x=0$, $f(0)=6*0=0$.

(d) Asíntotas. Tiene una en este caso con $\lim_{x\to\infty} g(x)=5+\frac{2}{(x-1)^2}=5$. Es la recta constante $y=5$. Y tiene dos verticales en $x=0$ y en $x=1$..

2. Encuentre los intervalos donde se cumplen las desigualdades siguientes.

(a) [10]

$$1\geq\frac{2x}{|5x+6|}.$$

RESPUESTA 2.a.

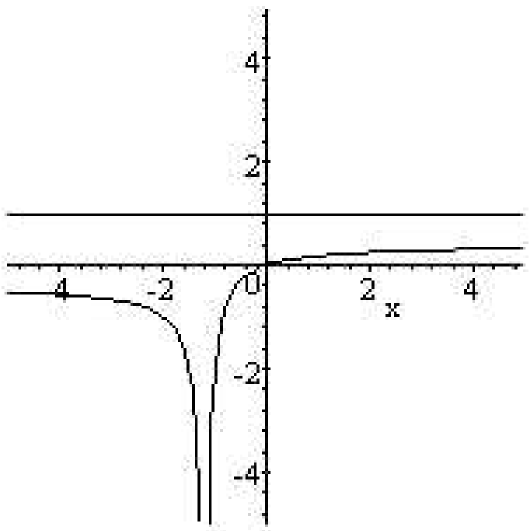
Se tiene $1\geq\frac{2x}{|5x+6|}$, $|5x+6|\geq 2x$. Dos casos.

(I) $5x+6\geq 2x$, $3x\geq -6$, $x\geq -2$.

(II) $-(5x+6)\geq 2x$, $-7x\geq 6$, $x\leq -\frac{6}{7}$.

Por tanto $x\in(-\infty,-\frac{6}{7}]\cup[-2,\infty)=\mathbb{R}$.

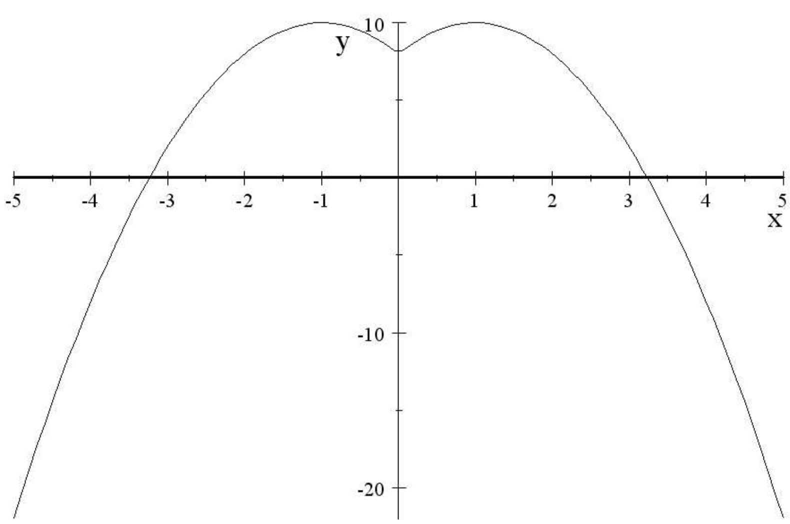
Note que la relación se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$. Ya que $\frac{2x}{|5x+6|}$ es menor a 1 como lo muestra la siguiente gráfica.



(b) [10]

$$8 - 2x^2 \leq -|4x| .$$

RESPUESTA. 2.b.
Se tienen dos casos:
(I) $8 - 2x^2 \leq -4x$, $8 \leq -4x + 2x^2$, $4 \leq -1 + 1 - 2x + x^2$, $5 \leq (x-1)^2$, $\sqrt{5} \leq |x-1|$, dos casos: $\sqrt{5} \leq x - 1$ y $\sqrt{5} \leq -(x-1)$.
De donde $\sqrt{5} + 1 \leq x$ o $\sqrt{5} \leq -x + 1$, $x \leq -\sqrt{5} + 1$.
$x \in [\sqrt{5} + 1, \infty)$ o $x \in (-\infty, -\sqrt{5} + 1)$.
(II) $8 - 2x^2 \leq 4x$, $8 \leq 4x + 2x^2$,$4 \leq -1 + 1 + 2x + x^2$, $5 \leq (x+1)^2$, $\sqrt{5} \leq |x+1|$, dos casos $\sqrt{5} \leq x + 1$ y $\sqrt{5} \leq -(x+1)$.
De donde $\sqrt{5} - 1 \leq x$ y $x \leq -\sqrt{5} - 1$. y el intervalo es $(-\infty, -\sqrt{5} - 1] \cup [\sqrt{5} + 1, \infty)$.
Note que $8 - 2x^2 + |4x| \leq 0$. significa que los dos casos deben estar bajo la recta $x = 0$. Lo cual ocurre en los extremos izquierdo y derecho de la siguiente gráfica.



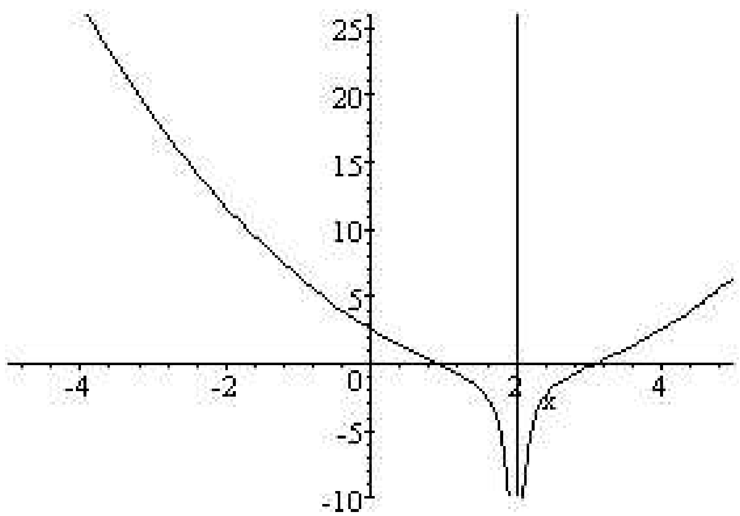
3. [30] Sean $f\left(x\right)=x^{2}-4x+4$ y $g\left(x\right)=\frac{3}{4}x-1/\sqrt{x}$. Encuentra el dominio, rango, asíntota vertical y esboza la gráfica de $g\circ f$.

(a) RESPUESTA 3.

$g\circ f(x)=g\left(x^{2}-4x+4\right)=g((x-2)^{2})=\frac{3}{4}\left(x-2\right)^{2}-1/\sqrt{\left(x-2\right)^{2}}=\frac{3}{4}\left(x-2\right)^{2}-1/\left|x-2\right|.$

Gráfica.

$g\circ f(-4)=26.8333$
$g\circ f(-3)=18.55$
$g\circ f(-2)=11.75$
$g\circ f(-1)=6.41667$
$g\circ f(0)=2.5$
$g\circ f(1.5)=-1.8125$
$g\circ f(1.9)=-9.9925$
$g\circ f(2.1)=-9.9925$
$g\circ f(2.5)=-1.8125$
$g\circ f(4)=2.5$



Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Rango: $\mathbb{R}$.

Tiene una asíntota vertical en $x=2$.