Lógica: Guía de Cálculo de Predicados

Profesor. Carlos Barrón Romero

El marco de sus respuestas y comprensión de los temas de Lógica son los objetivos de la UEA de Lógica (clave 111222) que transcribo a continuación:

1. Comprender los principios básicos de la lógica matemática.
2. Demostrar la validez de argumentos mediante reglas formales.
3. Aplicar principios de lógica matemática en la elaboración de programas de cómputo.

Esquemas de la Lógica de enunciados.

El esquema o diagrama consta de dos partes, separadas por una raya $\dfrac{\text{Suposición}}{\text{Dedución}}$.

Los esquemas clásicos de inferencia.

Modus Ponendo Ponens $\dfrac{\begin{array}{c}p \to q\\ p\end{array}}{q}$. Doble Negación $\dfrac{p}{\neg\neg p}$ $\dfrac{\neg\neg p}{p}$.

Modus Tollendo Tollens $\dfrac{\begin{array}{c}p \to q\\ \neg q\end{array}}{\neg p}$. Regla de Adjunción $\dfrac{\begin{array}{c}p\\ q\end{array}}{p \wedge q}$.

Regla de Disjunción $\dfrac{p \wedge q}{p}, \dfrac{p \wedge q}{q}$.

Modus Tollendo Ponens $\dfrac{\begin{array}{c}p \vee q\\ \neg p\end{array}}{q}$ $\dfrac{\begin{array}{c}p \vee q\\ \neg q\end{array}}{p}$. Silogismo hipotético: $\dfrac{\begin{array}{c}p \to q\\ p \to r\end{array}}{p \to r}$.

Cálculo de predicados.

Ley de Ejemplificación Universal (EU) $\dfrac{\forall x, p\left(x\right)}{p\left(a\right)}$.

Dada un predicado universal, se obtiene una instancia o ejemplo de este. Note que x: representa un caso indeterminado, mientras que a: es un sustantivo, sujeto, cosa, objeto, o algo concreto en particular al cual se le aplica el predicado p arbitrario.

Ejemplo:

A. Todas las estrellas brillan con luz propia

B. Sirio es una estrella.

Luego:

Sirio brilla con luz propia.

Convenciones:

e: estrella, b: brilla con luz propia, s: sirio

A: $\forall x, e\left(x\right) \to b\left(x\right)$.
B: $e\left(s\right)$.
Con A, B y EU se obtiene un caso particular.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{A: } \forall x, e\left(x\right) \rightarrow b\left(x\right). \\ \text{B: } e\left(s\right).\end{array}}{\text{C: } e\left(s\right) \rightarrow b\left(s\right).}$$

Se obtiene una instancia del enunciado de A.

Con B, C y Modus Ponendo Ponens:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{C:} e\left(s\right) \rightarrow b\left(s\right). \\ \text{B: } e\left(s\right).\end{array}}{\text{D: } b\left(s\right).}$$

Luego entonces: $b(s)$, o sea, Sirio brilla con luz propia.

Ley de Generalización Universal (GU) $\frac{p\left(a\right)}{\forall x, p\left(x\right)}$.

Dada un enunciado acerca de un a: es un sustantivo, sujeto, cosa, objeto, o algo concreto, arbitrario en el sentido que puede ser cualquiera, se obtiene un predicado universal.

Ejemplo.

A: Ningún reptil tiene sangre caliente.

B: Todas las víboras son reptiles.

Luego.

Ninguna víbora tiene sangre caliente.

Convenciones:

r: reptil, s: sangre caliente y v: víboras.

A: $\forall x, r\left(x\right) \rightarrow \rceil s\left(x\right)$.

B: $\forall x, v\left(x\right) \rightarrow r\left(x\right)$.

Con A, B y EU para a cualquiera:

C: $r\left(a\right) \rightarrow \rceil s\left(a\right)$.

D: $v\left(a\right) \rightarrow r\left(a\right)$.

Con D, C y el Silogismo hipotético:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{D: } v\left(a\right) \rightarrow r\left(a\right). \\ \text{C: } r\left(a\right) \rightarrow \rceil s\left(a\right).\end{array}}{\text{E: } v\left(a\right) \rightarrow \rceil s\left(a\right).}$$

Con E y dado que a es arbitrario, por GU, se tiene

F: $\forall x, v\left(x\right) \rightarrow \rceil s\left(x\right)$.

Luego entonces: $\forall x, v\left(x\right) \rightarrow \rceil s\left(x\right)$, o sea, ninguna víbora tiene sangre caliente.

Ley de Ejemplificación Existencial (EE) $\frac{\exists x, p\left(x\right)}{p\left(a\right)}$.

Dada un predicado existencial que supone que existe un x que cumple tal predicado, se obtiene un enunciado para un a: sustantivo, sujeto, cosa, objeto, o algo concreto.

Ejemplo:

A: Todos los dictadores son ególatras.

B: Algunos dictadores son generales.

Luego:

Algún general es ególatra.

Convenciones:

d: dictadores, e: ególatra y g: general.

A: $\forall x, d\left(x\right) \rightarrow e\left(x\right)$.

B: $\exists x, d\left(x\right) \wedge g\left(x\right)$.

Con A y EU:

$$\frac{\text{A: } \forall x, d(x) \to e(x)\,.}{\text{C: } d(a) \to e(a)\,.}$$

Con B y EE:

$$\frac{\text{B: } \exists x, d(x) \wedge g(x)\,.}{\text{D: } d(a) \wedge g(a)\,.}$$

Con D y la regla de disjunción:

$$\frac{\text{D: } d(a) \wedge g(a)\,.}{\text{E: } d(a)\,.}.$$

Con D y la regla de disjunción:

$$\frac{\text{D: } d(a) \wedge g(a)\,.}{\text{F: } g(a)\,.}$$

Con C, E y modus ponendo ponens:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{C: } d(a) \to e(a)\,. \\ \text{E: } d(a)\,.\end{array}}{\text{G: } e(a)\,.}$$

Con G y F y la regla de adjunción:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{G:} e(a)\,. \\ \text{F: } g(a)\,.\end{array}}{\text{H: } e(a) \wedge g(a)\,.}$$

Por conmutatividad:

$$\frac{\text{H: } e(a) \wedge g(a)\,.}{\text{I: } g(a) \wedge e(a)\,.}$$

Luego entonces $g(a) \wedge e(a)$, o sea, algún general es ególatra.

Ley de Generalización Existencial (GE) $\frac{p(a)}{\exists x, p(x)}$.

Dada un enunciado para un a: sustantivo, sujeto, cosa, objeto, o algo concreto,.arbitrario, entonces se tiene un predicado existencial.

Ejemplo:

A: Todos los dictadores son ególatras.

B: Algunos dictadores son generales.

Luego:

Algún general es ególatra.

Con las mismas convenciones del ejemplo anterior, obtuvimos:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{A: } \forall x, d(x) \to e(x)\,. \\ \text{B: } \exists x, d(x) \wedge g(x)\,.\end{array}}{\text{I: } g(a) \wedge e(a)}...$$

De I y GE se tiene:

H: $\exists x, g(x) \wedge e(x)$.

Luego entonces $\exists x, g(x) \wedge e(x)$, o sea, algún general es ególatra.