agente viajero, entonces se puede resolver el problema de decisión del agente viajero, pero no al contrario. En consecuencia, se concluye que el problema del agente viajero es más difícil que el problema de decisión del agente viajero.

A continuación se considerará otro ejemplo: el problema 0/1 de la mochila que se presentó en el capítulo 5 y se define como sigue:

Dados M, W_i y P_i, $W_i > 0$, $P_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, $M > 0$, encontrar las x_i tales que $x_i = 1$ o 0, y $\sum_{i=1}^{n} P_i x_i$ se maximice, sujeta a $\sum_{i=1}^{n} W_i x_i \leq M$.

Resulta evidente que este problema 0/1 de la mochila es un problema de optimización. También tiene un problema de decisión correspondiente que se define de la siguiente manera:

Dados los M, R, W_i y P_i, $M > 0$, $R > 0$, $W_i > 0$, $P_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, determinar si existen los x_i, $x_i = 1$ o 0, tales que $\sum_{i=1}^{n} P_i x_i \geq R$ y $\sum_{i=1}^{n} W_i x_i \leq M$.

Puede demostrarse fácilmente que el problema 0/1 de la mochila es más difícil que el problema de decisión 0/1 de la mochila.

En general, los problemas de optimización son más difíciles de resolver que sus problemas correspondientes de decisión. En consecuencia, hasta donde tiene que ver la cuestión de si un problema puede resolverse con un algoritmo polinomial, simplemente pueden considerarse sólo problemas de decisión. Si el problema de decisión del agente viajero no puede resolverse con algoritmos polinomiales, se concluye que el problema del agente viajero tampoco. *Al estudiar problemas NP, sólo se analizarán problemas de decisión.*

En la siguiente sección se abordará el problema de satisfactibilidad, que es uno de los problemas de decisión más famosos.

8-3 EL PROBLEMA DE SATISFACTIBILIDAD

Éste es un problema importante porque fue el primer problema NP-completo que se descubrió.

Se considerará la siguiente fórmula lógica:

$$
\begin{aligned}
& x_1 \vee x_2 \vee x_3 \\
\& \quad & -x_1 \\
\& \quad & -x_2.
\end{aligned}
$$

La siguiente asignación hace verdadera la fórmula

$x_1 \leftarrow F$

$x_2 \leftarrow F$

$x_3 \leftarrow T.$

En seguida, se usará la notación $(-x_1, -x_2, x_3)$ para representar $\{x_1 \leftarrow F, x_2 \leftarrow F, x_3 \leftarrow T\}$. *Si una asignación hace verdadera una fórmula, se dirá que esta asignación satisface la fórmula; en caso contrario, no la satisface.*

Si por lo menos hay una asignación que satisface una fórmula, entonces se dice que esta fórmula es satisfactible; en caso contrario, es insatisfactible.

Una típica fórmula insatisfactible es

$$\begin{array}{ll} & x_1 \\ \& & -x_1. \end{array}$$

Otra fórmula insatisfactible es

$$\begin{array}{lrcr} & x_1 & \vee & x_2 \\ \& & x_1 & \vee & -x_2 \\ \& & -x_1 & \vee & x_2 \\ \& & -x_1 & \vee & -x_2. \end{array}$$

El problema de satisfactibilidad se define como sigue: dada una fórmula booleana, determinar si esta fórmula es satisfactible o no.

Más adelante en este apartado se analizarán algunos métodos para resolver el problema de satisfactibilidad. Primero se necesitan algunas definiciones.

Definición

Una literal es x_i o $-x_i$, donde x_i es una variable booleana.

Definición

Una cláusula es una disyunción de literales. Se entiende que ninguna cláusula contiene simultáneamente una literal y su negación.

Definición

Una fórmula está en su forma normal conjuntiva si está en forma de c_1 & c_2 & … & c_m donde cada c_i, $1 \leq i \leq m$, es una cláusula.

Es bien conocido que toda fórmula booleana puede transformarse en la forma normal conjuntiva. En consecuencia, se supone que todas las fórmulas ya están en forma normal conjuntiva.

Definición

Una fórmula G es una consecuencia lógica de una fórmula F si y sólo si siempre que F es verdadera, G es verdadera. En otras palabras, toda asignación que satisface a F también satisface a G.

Por ejemplo,

$$-x_1 \vee x_2 \quad (1)$$
$$\& \quad x_1 \quad (2)$$
$$\& \quad x_3 \quad (3)$$

es una fórmula en forma normal conjuntiva. La única asignación que satisface la fórmula anterior es (x_1, x_2, x_3). El lector puede percatarse fácilmente de que la fórmula x_2 es una consecuencia lógica de la fórmula anterior. Dadas dos cláusulas

$$c_1\colon\ L_1 \vee L_2 \ldots \vee L_j$$
y $$c_2\colon\ -L_1 \vee L'_2 \ldots \vee L'_k,$$

puede deducirse una cláusula

$$L_2 \vee \ldots \vee L_j \vee L'_2 \vee \ldots \vee L'_k$$

como consecuencia lógica de c_1 & c_2 si la cláusula

$$L_2 \vee \ldots \vee L_j \vee L'_2 \vee \ldots \vee L'_k$$

no contiene ningún par de literales que sean complementarias entre sí.

Por ejemplo, considere las cláusulas siguientes:

c_1: $-x_1 \vee x_2$

c_2: $x_1 \vee x_3$.

Entonces

c_3: $x_2 \vee x_3$

es una consecuencia lógica de c_1 & c_2.

La regla de inferencia anterior se denomina *principio de resolución*, y la cláusula c_3 generada al aplicar este principio de resolución a c_1 y c_2 se denomina *resolvente* de c_1 y c_2.

Se considerará otro ejemplo:

c_1: $-x_1 \vee -x_2 \vee x_3$

c_2: $x_1 \vee x_4$.

Entonces

c_3: $-x_2 \vee x_3 \vee x_4$

es una resolvente de c_1 y c_2. También es, por supuesto, una consecuencia lógica de c_1 & c_2.

Considere las dos cláusulas siguientes:

c_1: x_1

c_2: $-x_1$.

Entonces la resolvente es una cláusula especial porque no contiene ninguna literal y se denota por

$$c_3 = \boxed{}$$

que es una cláusula vacía.

Si de un conjunto de cláusulas es posible deducir una cláusula vacía, entonces este conjunto de cláusulas debe ser insatisfactible. Considere el siguiente conjunto de cláusulas:

$x_1 \vee x_2$ **(1)**

$x_1 \vee -x_2$ **(2)**

$-x_1 \vee x_2$ **(3)**

$-x_1 \vee -x_2$. **(4)**