112033 MATEMATICAS DISCRETAS Docente: Dr. Carlos Barrón Romero
Solución del Examen Global 13 de noviembre de 2013

Instrucciones. De acuerdo con sus examenes parciales reprobados debe contestar las partes 1,2 y 3. La parte global es obligatoria. El marco de sus respuestas son los objetivos de la UEA que transcribo a continuación:

- Comprender los principios básicos de la lógica de predicados.
- Describir los conceptos y técnicas elementales de la matemática discreta.
- Aplicar la inducción matemática a la solución de problemas combinatorios.
- Relacionar y combinar conceptos y técnicas de la matemática discreta para la resolución de problemas y el diseño de algoritmos.

Responda en forma resumida, que su respuesta refleje los objetivos de la UEA, use el sentido común y describa con claridad la explicación o el desarrollo de su solución. El valor de cada pregunta está entre "[", "]".

Parte Global

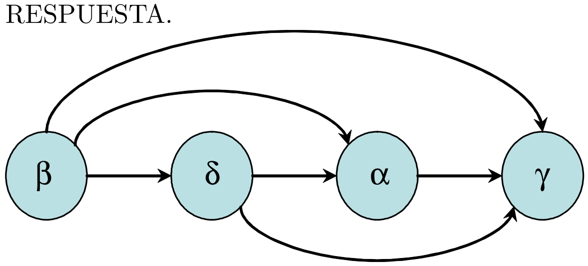
1. Traducir a la notación de lógica símbolica.

   (a) [1.0] Sócrates es humano y es alumno de la UAM.
   RESPUESTA.
   Convención: S: Sócrates, h: humano, a: alumno de la UAM.
   la traducción de Sócrates es humano y es alumno de la UAM es
   h(S)∧a(S).

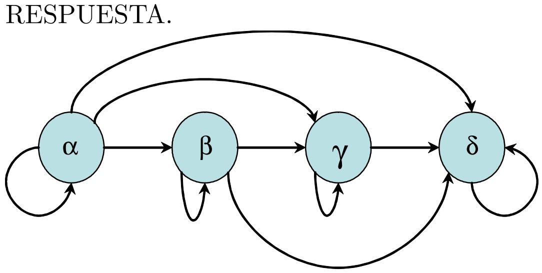
   (b) [1.0] Por favor, ¿abres la puerta?
   RESPUESTA.
   Un pregunta no es traducible.

2. Para V={$\alpha, \beta, \gamma, \delta$}. Explicar su respuesta mediante digrafos.

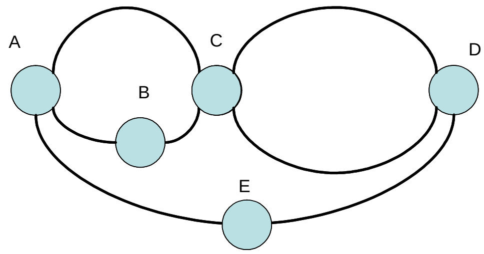
   (a) [1.0] Construir una relación de orden estricta total de forma que el elemento minimal sea β y el elemento máximal γ.
   RESPUESTA.



   (b) [1.0] Construir una relación de orden no estricta total apropiada de forma que el elemento minimal sea α y el maximal sea δ.
   RESPUESTA.



3. Explicar (justificar por un criterio apropiado o por exploración exhaustiva) si tiene o no para el grafo siguiente:



RESPUESTA. Los grados de los vertices son:
gr(A)=4,gr(B)=2,gr(C)=4,gr(D)=3,gr(E)=2.

(a) [1.0] un ciclo Euleriano.
RESPUESTA.
No tiene ciclo Euleriano porque no todos los grados de los vertices son pares.

(b) [1.0] un camino Euleriano.
RESPUESTA.
Tiene un camino Euleriano porqué es conexa y tiene exactamente 2 vertices de grado impar.

(c) [1.0] un ciclo Hamiltoneano.
RESPUESTA.
Un ciclo Hamiltoneano es A, E, D, C, B, A.

(d) [1.0] un camino Hamiltoneano.
RESPUESTA.
Un camino Hamiltoneano es A, E, D, C, B.

Parte 1

1. Explicar y evaluar con falso o verdadero los siguientes enunciados (de conjuntos o lógicos).

(a) [0.5] Sean A y B dos conjuntos, Si $A \cap B = \phi$, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.
RESPUESTA.
Por el principio de inclusión y exclusión $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Como por hipótesis $A \cap B = \phi$ se tiene $|A \cap B| = 0$. Por tanto $|A \cup B| = |A| + |B|$.
El enunciado: $A \cap B = \phi \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$ es verdadero.

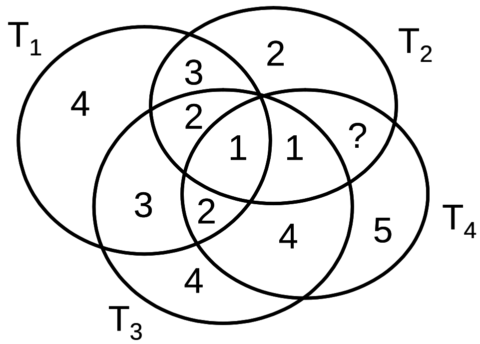
(b) [0.5] Sean A y B dos conjuntos, si $A \subset B$ entonces $a \in A \Rightarrow a \notin B$.
RESPUESTA.
No es posible que $a \in A \Rightarrow a \notin B$, ya que $A \subset B$, significa que $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.
El enunciado: $A \subset B \Rightarrow (a \in A \Rightarrow a \notin B)$ es falso.

2. Sea el conjunto Γ =$\{x \in \mathbb{Z}|\ (x \leq 2) \vee (-2 \geq x)\}$ donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros.

(a) [0.5] Explicar porqué axioma el conjunto Γ está bien definido.
RESPUESTA.
Por el axioma de especificación o regla.

(b) [0.5] Determinar o calcular los elementos del conjunto Γ.
RESPUESTA.
Por el axioma de especificación o regla, evaluamos los elementos x de $\mathbb{Z}$ para los cuales es verdadero $(x \leq 2) \vee ([-2 \geq x] \equiv [x \leq -2])$. Se tiene que $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 2\} = \{2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots\}$

3. Una cadena de tiendas tiene un gran total de 52 elementos entre sus cuatro tiendas ($|\cup_{i=1}^{4} T_i| = 52$). Vea la siguiente figura:



(a) [1.0] Calcular $|T_1|$, $|T_2|, |T_3|$ y $|T_4|$.
RESPUESTA.
Del dibujo se tiene
$|T_1| = 4 + 3 + 2 + 1 + 2 + 3 = 15$,
$|T_2| = 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + ? = 9 + ?$
$|T_3| = 3 + 2 + 1 + 1 + 4 + 4 + 2 = 17$ y
$|T_4| = 1 + 1 + 2 + 4 + 5 + ? = 13 + ?$.
Para determinar ? La suma de las particiones es $52 = 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 4 + 5 + ? = 31 + ?$.
Por tanto $? = 52 - 31 = 21$. Finalmente, sustituyendo ? se tiene
$|T_2| = 9 + 21 = 30$.
$|T_4| = 13 + 21 = 34$.

(b) [1.0] Calcular el número de elementos del área "?".
RESPUESTA.
Para determinar ? La suma de las particiones es $52 = 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 4 + 5 + ? = 31 + ?$.
Por tanto $? = 52 - 31 = 21$.

4. [1.0] Se tienen dos algoritmos A y B, que realizan $n^2 + 5$ y n^3 operaciones respectivamente. Explicar y demostrar por el Principio de Inducción Matemática que se puede generalizar que el algotimo A realiza menos operaciones que B a partir de un cierto valor n (número natural).

(a) RESPUESTA.
En l siguiente tabla se comporan A y B.

n	A	B
	$n^2 + 5$	n^3
1	$1^2 + 5 = 6$	1
2	$2^2 + 5 = 9$	$2^3 = 8$
3	$3^2 + 5 = 14$	$3^3 = 27$

El paso inicial de la demostración por el Principio de inducción Matemática corresponde cuando $n = 3$.
Hipóteis de Inducción (HI): $n^2 + 5 < n^3, n > 3$.
Paso de inducción. Sea $n + 1$, $(n+1)^2 + 5 = n^2 + 2n + 1 + 5$, como $1 < n < n^2 < n^3$, se tiene $n^2 + 2n + 1 + 5 < n^3 + 2n^2 + n + 5 = n^3 + (2n^2 + 2) + (n + 2) + 1 < n^3 + 3n^2 + n + 2n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$. ya que $(2n^2 + 2) < 3n^2$ y $(n + 2) < 3n$ con $n > 3$.
Se tiene para $n + 1, (n+1)^2 + 5 < (n+1)^3$.

Parte 2

1. Dada un baraja inglesa de 52 cartas (A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,R, sin comodín).

   (a) [1.0] Encontrar de cuantas formas se pueden acomodar en circulo 5 cartas (de la baraja inglesa). Explicar su modelo combinatorio y su resultado.
   RESPUESTA.
   $\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2598\,960$
   $(5-1) = 4! = 24$. Y $(2598\,960)\,24 = 62\,375\,040$.

Selecccion de 5 cartas del maso	Circulo de 5 cartas	Total
$\binom{52}{5}$	$(5-1)!$	$\binom{52}{5}(5-1)! = 62375040$

   (b) [1.0] Encontrar de cuantas formas se tiene una tercia (de Q o R) y un par. Explicar su modelo combinatorio y su resultado.
   RESPUESTA.
   Para una tercia de Q y un par se tiene:
   $\binom{4}{3} = 4$, selección de una Q.
   $\binom{4}{2}12 = 6\,(12) = 72$, selección de un par de las 12 cartas que no son Q.

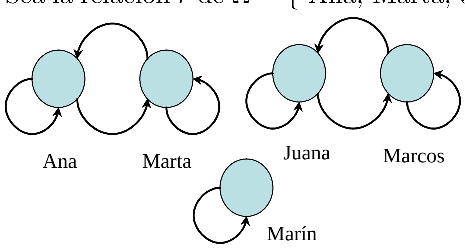
Selecccíón de tercia de Q	un par	Total
$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{2}12$	$\binom{4}{3}\binom{4}{2}12 = 288$.

   De forma similar para una tercia de R y un par se tienen 288.
   El total de Full con Q o R es $(288)\,2 = 576$.

2. Una cadena comercial tiene tres tiendas. La tienda 1 tiene dos empleados (Ana y Marta), la tienda 2 tiene dos empleados (Juana y Marcos) y la tienda 3 tiene un empleado (Marín).

   (a) [1.0] Construir una familia de tres clases o particiones para todos los empleados.
   RESPUESTA.
   Sean $T_1 = \{\text{Ana, Marta}\}$, $T_2 = \{\text{Juana, Marcos}\}$ y $T_3 = \{\text{Marín}\}$.

   (b) [1.0] Para la familia de clases del inciso anterior construir una relación de equivalencia y dibujarla con un digrafo.
   RESPUESTA.
   Sea la relación r de $\Omega = \{$ Ana, Marta, Juana, Marcos, Marín.$\}$ dada por $x\ r\ y$ si $(x \in T_i) \wedge (y \in T_i)$ con $i = 1, 2, 3$.



3. Sean $L = \{a, b, y\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, $R_1 = \{(a,1), (a,2), (b,3), (y,3)\}$ y $R_2 = \{(1,a), (2,y), (3,y)\}$.

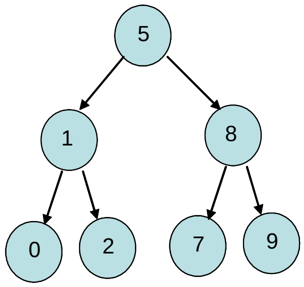
   (a) [1.0] Calcular la composición $R_1 \circ R_2$ e identificar el producto cruz al que pertenece.
   RESPUESTA.
   $R_1 \circ R_2 \subset L \times L$, $R_1 \circ R_2 = \{(a,a), (a,y), (b,y), (y,y)\}$.

   (b) [1.0] Calcular la composición $R_2 \circ R_1$ e identificar el producto cruz al que pertenece.
   RESPUESTA.
   $R_2 \circ R_1 \subset N \times N$, $R_2 \circ R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,3)\}$.

Parte 3

1. [1.0] Construir un árbol binario ordenado de altura 2 con las dígitos 9,0,7,1,2,8,5 de forma que el recorrido en-orden los imprima ordenados.

   (a) RESPUESTA.

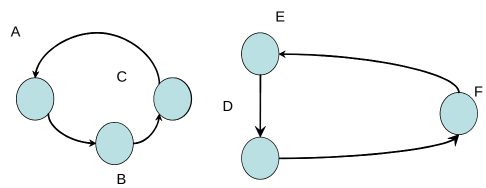


2. Sea la serie de Fibonaci: $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \ldots$ Una posible función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (incompleta) que la construye es
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

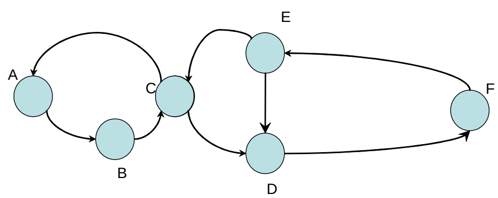
   (a) [1.0] Demuestrar que la serie es computable, es decir, que corresponde con una función recursiva primitiva.
   RESPUESTA.
   Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por
$$f(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ +\left(f(\text{ant}(n)), f(\text{ant}(\text{ant}(n)))\right) & n > 1. \end{cases}.$$

   (b) [1.0] Calcular con todo detalle f_7.
   RESPUESTA.
   Se tiene $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13$.

3. [1.0] Explicar y construir como transformar por clausura (con minimos ajustes) en un digrafo fuertemente conexo al siguiente digrafo:



RESPUESTA.



El digrafo anterior es una clausura del de la pregunta y es fuertemente conexo, ya que hay caminos de ida y vuelta entre todos los pares de vertices (V_1, V_2), tal como se indica en la siguiente tabla:

V_1, V_2	Ida	Vuelta
A,B	A,B	B,C,A
A,C	A,B,C	C,A
A,D	A,B,C,D	D,F,E,C,A
A,E	A,B,C,D,F,E	E,C,A
A,F	A,B,C,D,F	F,E,C,A
B,C	B,C	C,A,B
B,D	B,C,D	D,F,E,C,A,B
B,E	B,C,D,F,E	E,C,A,B
B,F	B,C,D,F	F,E,C,A,B
C,D	C,D	D,F,E,C
C,E	C,D,F,E	E,C
C,F	C,D,F	F,E,C
D,E	D,F,E	E,D
D,F	D,F	F,E,D
E,F	E,D,F	F,E

4. [1.0] Explicar cuantas aristas tiene un grafo de n vertices, con $n > 3$, si $\sum_{i=1}^{n} \text{grad}(v_i) = 4n$.

RESPUESTA.
Por el teorema del Handshaking se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \text{grad}(v_i) = 2\,|A|$ donde A es el conjunto de aristas.
Como $\sum_{i=1}^{n} \text{grad}(v_i) = 4n$, $\sum_{i=1}^{n} \text{grad}(v_i) = 2\,|A|$, se tiene $4n = 2\,|A|$. Por tanto, el número de arsitas es $|A| = 2n$.