Reporte Solución de la Clase 5. Ejercicios de Lógica y Conjuntos.
Profesor: Carlos Barrón Romero.
Se supone un conjunto universo de discurso adecuado Ω.

1. Demuestre la asociatividad: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

   RESPUESTA.

   Sean $A = \{z \in \Omega | P_A(z)\}, B = \{z \in \Omega | P_B(z)\}$ y $C = \{z \in \Omega | P_C(z)\}$

   Por el Axioma de extensión se mostrará que i) $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$ y ii) $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$.

   Leyendo en esta dirección i) $\Rightarrow$ii) y leyendo al reves ii) $\Rightarrow$ i).

   Sea $x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap \{z \in \Omega | P_B(z) \wedge P_C(z)\} \Leftrightarrow x \in \{z \in \Omega | P_A(z) \wedge (P_B(z) \wedge P_C(z))\} \Leftrightarrow x \in \{z \in \Omega | (P_A(z) \wedge P_B(z)) \wedge P_C(z)\} \Leftrightarrow x \in \{z \in \Omega | P_A(z) \wedge P_B(z)\} \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$. Por tanto, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

2. Simplifique: $(\Omega \cap A) \cup (B \cap A)$.

   RESPUESTA.

   Usando que $(\Omega \cap A) = A$ y que $B \cap A \subset A$, se tiene $(\Omega \cap A) \cup (B \cap A) = A \cup (B \cap A) = A$.

3. Demuestre que son equivalentes: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

   RESPUESTA.

   Sean $A = \{z \in \Omega | P_A(z)\}$ y $B = \{z \in \Omega | P_B(z)\}$.

   Por el Axioma de extensión se mostrará que i) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ y ii) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

   Leyendo en esta dirección i) $\Rightarrow$ii) y leyendo al reves ii) $\Rightarrow$ i).

   Sea $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in \{z \in \Omega | z \in A \cup B \wedge z \notin A \cap B\} \Leftrightarrow x \in \{z \in \Omega | (P_A(z) \vee P_B(Z)) \wedge \rceil (P_A(Z) \wedge P_B(Z))\} \Leftrightarrow x \in \{z \in \Omega | (P_A(z) \vee P_B(Z)) \wedge (\rceil P_A(Z) \vee \rceil P_B(Z))\} \Leftrightarrow$

   $x \in \{z \in \Omega | P_A(z) \wedge (\rceil P_A(Z) \vee \rceil P_B(Z)) \vee P_B(Z) \wedge (\rceil P_A(Z) \vee \rceil P_B(Z))\} \Leftrightarrow$

   $x \in \{z \in \Omega | (P_A(z) \wedge \rceil P_A(Z)) \vee (P_A(z) \wedge \rceil P_B(Z)) \vee (P_B(Z) \wedge \rceil P_A(Z)) \vee (P_B(Z) \wedge \rceil P_B(Z))\} \Leftrightarrow$

   $x \in \{z \in \Omega | (P_A(z) \wedge \rceil P_B(Z)) \vee (P_B(Z) \wedge \rceil P_A(Z))\} \Leftrightarrow$

   $x \in \{z \in \Omega | (P_A(z) \wedge \rceil P_B(Z))\} \cup \{z \in \Omega | (P_B(Z) \wedge \rceil P_A(Z))\} \Leftrightarrow$

   $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Por tanto, $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Deduzca la validez del argumento:

   (a) Solo tengo amigos que son músicos.
   (b) Juan es mi amigo.
   (c) Ninguno de mis vecinos es músico.
   (d) $\therefore$ Juan no es mi vecino.

   RESPUESTA.

   Notación.

   A: Amigo.

   M: Musico.

   V: Vecino.

   j: Juan.

   Las proposiciones son en notación funcional:

a.) A(x)$\rightarrow$M(x).

b.) A(j).

c) V(x)$\rightarrow$ $\rceil$M(x).

De a) y b) se tiene que

A(x)$\rightarrow$M(x).

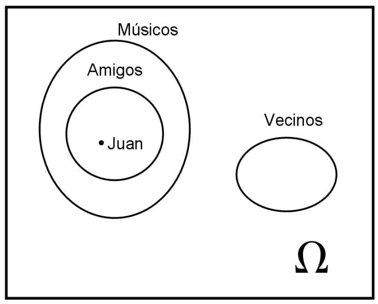
A(j) $\therefore$(e.) M(J)

De c.) V(x)$\rightarrow$ $\rceil$M(x)$\equiv$ (f.) M(x)$\rightarrow\rceil$V(x).

Finalemente de e.) y f.)

M(x)$\rightarrow\rceil$V(x)

M(J)$\therefore$ $\rceil$V(J) se obtiene d.) que Juan no es mi vecino.



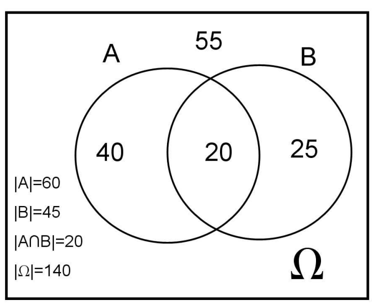
Pregunta 4. Diagrama de Ven que verifica la respuesta de que Juan no es mi vecino.

5. En una universidad cada estudiante de humanidades debe de acreditar un curso A de matemáticas y un curso B de ciencias. De una muestra de 140 estudiantes de segundo año se observo:

   60 acreditaron A, 45 acreditaron B, 20 acreditaron A y B.

   Encuentre el numero de estudiantes que acreditaron sólo A, sólo B, los que acreditaron las dos, solo una (A o B) y los que no acreditaron ninguna.

   RESPUESTA.



Pregunta 5. Diagrama de Ven con las cardinalidades de los conjuntos que sustentan las respuestas.

Los datos indican que $|\Omega| = 140$, $|A| = 60$, $|B| = 45$, $|A \cap B| = 20$.

Las respuestas que se piden son:

sólo A =40 (=60 − 20),

sólo B=25(=45 − 20),

los que acreditaron las dos=20,

solo una (A o B)=65(=40 + 25),

y los que no acreditaron ninguna=55(=140−(60 + 45 − 20)=140-85).

6. Diferencia A\B={x∈ Ω | x∈A ∧ x∉B} y Diferencia simétrica: A△B = A\B ∪ B\A.

   (a) ¿Que propiedades algebraicas cumplen y cuales no, las operaciones anteriores? Escriba ejemplos.
   RESPUESTA.
   A\B es no counmutativa porque si A={1,2,3} y B={2,4} se tiene A\B={1,3} y B\A={4}.
   Se cumple (A∪B)\C=A\C∪B\C, ya que si x∈(A∪B)\C ⇔ x∈(A∪B)∧x∉C ⇔ (x∈A∨x∈B)∧x∉C ⇔ (x∈A∧x∉C)∨(x∈B∧x∉C) ⇔ x∈A\C∪B\C.
   No se cumple la distributividad despues de \ con ∪. Es decir, A\(B∪C)≠A\B∪A\C.
   Por ejemplo con A={1,2,3}, B={2,4} y C={1,5}.
   Se tiene A\(B∪C)={3} y A\B∪A\C={1,3}∪{2,3}={1,2,3}.
   A△B es conmutativa, ya que A\B ∪ B\A=B\A ∪ A\B = B△A.

   (b) Escriba una definición equivalente de la diferencia simétrica por operadores de lógica y el axioma de especificación.
   RESPUESTA.
   Usando A= $\{z \in \Omega | P_A(z)\}$ y B= $\{z \in \Omega | P_B(z)\}$.
   Como A△B = A\B ∪ B\A.
   La respuesta es A△B = {z∈ Ω|$(P_A(z) \wedge \rceil P_B(z)) \vee (P_B(z) \wedge \rceil P_A(z))$}.

7. P={ Y | Y1 }; S={ Y | Y2 }; T={ Y | Y3 } bajo el sistema de fórmulas lógicas:

   N1⊗ M2 = 1, L2 ⊗ R4 = 1, R3 ⊗ N2 = 1 donde ⊗ es el or exclusivo (es 1 cuando solo una de las proposiciones es verdadera, de otra forma es 0), Y es la primera letra de Natacha, Maya, Lida y Rita. Xn es la fórmula de la proposición X ocupa el lugar n, donde n=1, 2, 3 y 4.

   RESPUESTA.

   Por prueba y error, suponiendo que N1=, L2=1, R3= 1. Se tiene M2 =0 ya que

   N1⊗ M2 = 1, ahora R4=0 de L2 ⊗ R4 = 1 y N2=0 de R3 ⊗ N2 = 1.

   Por tanto P={N}, S={L}, T={R}, es decir Natacha primer lugar, Lida segundo lugar y Rita tercer lugar.

8. Sea A= {David, Guillermo, José, Dora}. ¿Cuales de los siguientes enunciados son verdaderos y cuales son falsos?

   RESPUESTA. La respuesta se da al lado de la pregunta.

   (a) D∈A es falso.
   (b) David∈A es verdadero.
   (c) A∈José es falso.
   (d) D∉A es verdadero.
   (e) José∉A es falso.