112033 MATEMATICAS DISCRETAS

Docente: Dr. Carlos Barrón Romero

Lista de Ejercicios 3er examen Parcial

Instrucciones. El marco de sus respuestas son los objetivos de la UEA que transcribo a continuación:

-
- Comprender los principios básicos de la lógica de predicados.
- Describir los conceptos y técnicas elementales de la matemática discreta.
- Aplicar la inducción matemática a la solución de problemas combinatorios.
- Relacionar y combinar conceptos y técnicas de la matemática discreta para la resolución de problemas y el diseño de algoritmos.

Responda en forma resumida, que su respuesta refleje los objetivos de la UEA, use el sentido común y describa con claridad la explicación o el desarrollo de su solución. El valor de cada pregunta está entre "[", "]".

1. Sea el conjunto, $\Omega = \{A, B, C, D, E, F\}$ y sea M la matriz de adyacencia de la relación m,

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

   (a) [1.0] Construir por clausura si fuera necesario una relación de equivalencia (m_e) de m.

   (b) [1.0] Construir un árbol binario ordenado y balanceado para las clases de m_e. Tomando como llave, la letra de menor orden lexicográfico de cada clase.

   (c) [1.0] Escribir el resultado de recorrer el árbol del inciso anterior en pre-orden, en-orden y en pos-orden.

2. [1.0] Construir un árbol binario ordenado de altura 4 con números al azar entre 1 y 5. Dibuje con flechas a un lado de las aristas de su árbol el recorrido en-orden.

3. [1.0] Definir el producto de dos números naturales de forma computable. Sugerencia: En clase se definio la suma en forma de una función recursiva primitiva y se sabe que toda FRP es computable.

4. [1.0] Explicar un caso donde el uso de estructuras recursivas, por ejemplo un árbol, puede ser no eficiente para el diseño de un algoritmo. Explicar un caso donde el uso de estructuras recursivas, por ejemplo un árbol, es eficiente.

5. [1.0] Escribir ejemplo de eficiencia, solubilidad y computabilidad sobre temas o problemas vistos en el curso.

6. Sea la serie $g_0 = 0, g_1 = 1, g_2 = 3, g_3 = 6, g_4 = 10, \ldots$ Una posible función que la construye es

$$g(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ g(n-1) + n & n > 1 \end{cases}.$$

   (a) [1.0] Demuestrar que la serie es computable, es decir, que corresponde con una función recursiva primitiva.

   (b) [1.0] Calcular con tododetalle los terminos 7 y 9.

   (c) [1.0] Explicar cuanto vale $\lim_{n\to\infty} \frac{10^9}{g_n}$ y porqué no es computable calcularlo por iteraciones: $\frac{10^9}{g_n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

7. [1.0] Explicar con un modelo de grafos apropiado, como se pueden elegir o seleccionar las materias optativas de acuerdo al gusto de los alumnos, de manera que todos los alumnos tengan al menos una materia optativa para cursar. Es decir, suponga que cada trimestre se les pide a los alumnos una lista de las materias optativas que les gustaría llevar y con esa información el coordinador designa las materias optativas para todos los alumnos. ¿Es posible elegir un grupo de materias que sea una cubierta mínima (o sea que cubra a todos los alumnos y que satisfaga que al menos hay una materia al gusto de cada alumno)? Justifique si esto se responde con: Sea G el grupo de materias. M_m (subconjunto de M, materias optativas) es una cubierta mínima si para todo vértice de M_m, sus aristas (m_k, a_j) [que une el grupo m_k con el alumno a_j], la unión de los vértices de alumno (o sea todos los a_j) es A, donde A es el conjunto (de vértices) de todos los alumnos. Explicar con un diagrama, un programa o un procedimiento para uno ejemplo o varios ejemplos. ¿cuantos pasos se tardaría su programa en verificar que se tiene una cubierta mínima? (Mi apuesta es que debe ser menor a $|M| \cdot \max\{\text{gra}(m_k)\}$ o a $|A| \cdot \max\{\ \text{gra}(a_j)\}$ dependiendo como lo haga).

8. Dado $G = (V, \overrightarrow{A})$ con $\overrightarrow{A} \subset V \times V$.

   (a) ¿Explicar bajo que condiciones se satisface la ecuación $d(a,b) + d(b,c) = d(a,c)$? Donde $a, b, c \in V$ y $d(i,j) = \begin{cases} \text{número de aristas} & \text{Si hay camino simple entre } i, j \in V \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

   (b) Explicar si este modelo le puede servir para contar vlos pasos de algunos casos sencillos de análisis de algoritmos.

9. Explicar para los siguientes digrafos:

   I.

   II.

   (a) [1.0] ¿es fuertemente conexo?

   (b) [1.0] ¿es unilateralmente conexo (o sea que solo se puede ir en una sola dirección entre todo par de vertices)?

   (c) [1.0] ¿es débilmente conexo (dibuje el grafo asociado)?

   (d) [1.0] ¿Son isomorfos los digrafos anteriores?

   (e) [1.0] Construya un digrafo isomorfo con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$ en lugar de las letras.

10. Explicar si tiene o no para el grafo siguiente:

    (a) [1.0] un ciclo Euleriano (Justifique por el Criterio de Euler apropiado),

    (b) [1.0] un camino Euleriano (Justifique por el Criterio de Euler apropiado),

    (c) [1.0] un ciclo Hamiltoneano (Justifique por exploración exhuastiva si no tuviera) y

    (d) [1.0] un camino Hamiltoneano (Justifique por exploración exhuativa si no tuviera).

11. [3.0] Explicar como modelar mediante digrafos o grafos el flujo de personas en un parque de diversiones de forma que se recorran todos los corredores. ¿Corresponde su modelación con ciclos o caminos Eulerianos o Hamiltoneanos?

12. [3.0] Dar una explicación de como modelar mediante digrafos o grafos el flujo de personas en un parque de diversiones de forma que se recorran todos los sitios de interes (asuma que este número esta dado y que corresponde a los vertices), pero de forma que las personas fluyan por corredores en la misma dirección para evitar ambotellamientos y además considere rutas de salidas de emergencia. ¿Corresponde su modelación con ciclos o caminos Eulerianos o Hamiltoneanos?

13. [2.0] Para un grafo regular (V, A) de grado 3 con $|V| \geq 4$. Explicar o demostrar (usando el teorema de Handshaking o por inducción), ¿cual la cardinalidad de $|A|$? O sea cuantas aristas tiene en función del número de vertices.

14. [3.0] Dar una explicación de como modelar mediante digrafos o grafos o grafos bipartitos el número de saludos de personas del mismo sexo en una fiesta de parejas.

    (a) [2.0] Suponga que los asistentes llegan en parejas (y como llega juntos no se saludan, se conoce el número de parejas que asisten a la fiesta, p). Cada pareja saluda a todos los demás individualmente. ¿Explicar cuantos saludos realiza el hombre y cuantos la mujer? ¿Explicar si son iguales el número de saludos de los hombres y el número de saludos de las mujeres?

    (b) [2.0] Suponga que los asistentes llegan en forma individual (se conoce ecuantas personas asisten a la fiesta, sea h: el número de hombres y m: el número de mujeres). Explicar: ¿Cuantos saludos realiza el hombre y cuantos la mujer? ¿cuando es igual, cuando es mayor y cuando es menor el número de saludos de un hombre con el de una mujer?

15. [2.0] Explicar como modelar mediante digrafos o grafos para justificar tener al menos una ruta o camino o circuito simple de un robot moviendose dentro de un tablero de ajedrez de forma que lo recorra pasando por un cuadro solo una vez. El robot se puede mover a los ocho cuadros vecinos de su posición, excepto en las orillas del tablero. En particular debe describir y explicar que tipo de subgrafo o subdigrafo cumple el recorrido.

    (a) [2.0] Saliendo de la esquina superior derecha y terminando en la esquina inferior izquierda.

    (b) [2.0] Saliendo de la esquina superior derecha y regresando a esta.

    (c) [2.0] Saliendo de un cuadro central para recorrer todo los demás cuadros del tablero.

    (d) [2.0] Construir algunas soluciones del tipo anterior para tableros de 2×2, $2 \times 3, 3 \times 3$ y 5×5.

16. [1.0] Construir el grafo plano de mayor número de aristas para $|V| = 5$.

17. [1.0] Explicar, demostrar y encontrar una fórmula para determinar los ciclos Hamiltoneanos de grafos completos K_n.

18. [1.0] Explicar si el grafo completo bipartito $K_{3,4}$ es u grafo plano.

19. [1.0] Explicar si todos los grafos regulares de grado 2 son grafos planos.