Segundo examen parcial de Introducción al Cálculo

Profesor Carlos Barrón Romero 18 de junio de 2013

Trimestre 13P

1. Esboza la gráfica de las siguientes funciones, determina sus ceros, su periodo, su rango y su dominio:

a. [30]

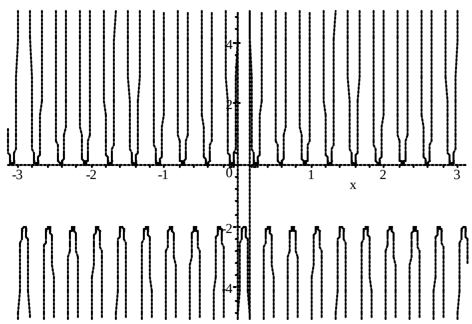
$$f(x) = \frac{\cos^2(6\pi x) - 1}{\sin^3(6\pi x)} - 1$$

RESPUESTA.

$f(x) = \frac{\cos^2(6\pi x) - 1}{\sin^3(6\pi x)} - 1 = -\frac{1}{\sin 6\pi x} - 1 = -\csc 6\pi x - 1.$

Es la grafica de una cosecante negativa, traslada a -1. El periodo de la cosecante es 2π.

Para este caso se tiene $6\pi p = 2\pi$, de donde el periodo es de f, p= $\frac{1}{3}$.



Ceros:

$x = -\frac{1}{12} + \frac{k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Por ejemplo:

$f(-\frac{1}{12}) = -\csc\left(6\pi\left(-\frac{1}{12}\right)\right) - 1 = -\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} - 1 = -\frac{1}{-1} - 1 = 1 - 1.$

Periodo:

$x = \frac{1}{3}$.

Rango:

$(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$.

Dominio:

$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. [20] Sean

$$a(x) = \cot(3\pi x)$$

$$b(z) = \sin(3\pi z)$$

Encuentra $(ab)(x)$, $(b \circ a)(x)$; así como los respectivos dominios, rangos de $(ab)(x)$, y $(b \circ a)(x)$.

RESPUESTA.

Se tiene $(ab)(x) = a(x)b(x) = \cot(3\pi x)\sin(3\pi x) = \cos(3\pi x)$.

Dominio de ab es $\mathbb{R}$.

Rango de ab es $[-1, 1]$.

Se tiene $(b \circ a)(x) = b(a(x)) = b(\cot(3\pi x)) = \sin(3\pi \cot(3\pi x))$.

Dominio de $b \circ a$ es $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Rango de $b \circ a$ es $[-1, 1]$.

3. [30] Selecciona o cálcula a y b para que la función siguiente:

a. $h(x) = \begin{cases} a + \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) & x \in [-1,0] \\ 4\left(x-b\right)^3 & x \in (0,1] \end{cases}$

Sea continua en $[-1,1]$, es decir demuestra o explica que es continua, esboza su gráfica y verifica que tiene límite en $x = 0$.

RESPUESTA.

Se construye de forma que el límite de h en $x = 0$, exista.

$\lim_{x\to 0} h(x)$ existe si coinciden sus límites laterales:

$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x)$, de donde

$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(a + \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right) = a.$

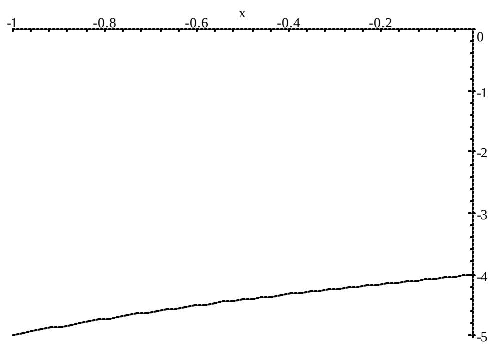
$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} 4\left(x-b\right)^3 = -4b^3.$

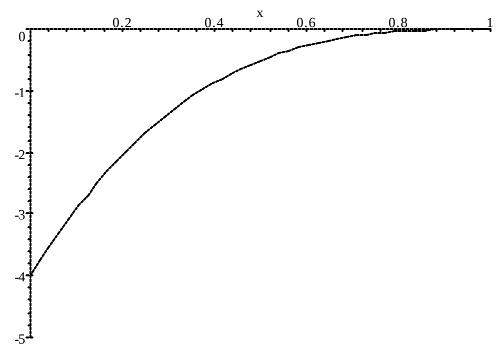
Se tiene $a = -4b^3$.

Tomando $b = 1$, se tiene $a = -4$.

Y se tiene $\lim_{x\to 0} h(x) = -4$.

Es continua en $x = 0$ por la selección de a y b, además es continua en $\left[-1,1\right]$ porqué se trata de las funciones continuas $-4 + \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ y $4\left(x-1\right)^3$.





4. [20] Cálcula los límites:

a.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\sqrt{\pi x}}$$

RESPUESTA.

Por sustitución directa ya que se trata de funciones continuas.

$\lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\sqrt{\pi x}} = \frac{\lim_{x\to 1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\lim_{x\to 1}\sqrt{\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

b.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{1-x}}$$

RESPUESTA.

Por sustitución directa ya que se trata de funciones continuas.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{1-x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\sin^2\left(\sqrt{x+1}\right)}{\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x}} = \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lim_{x\to 0}\left(x+1\right)}\right)}{\sqrt{\lim_{x\to 0}\left(1-x\right)}} = \sin^2 1.$