UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

2do examen parcial: 1138040 Métodos Matemáticos Avanzados en Ingeniería de Procesos

Profesor Carlos Barrón Romero 9 de julio de 2013 Trimestre 13P

Nombre:____ Matrícula:____________

NOTAS: Cada pregunta vale un dos puntos.
El marco de sus respuestas es clara notación matemática y mostrar los objetivos de la UEA:
"Al final del curso el alumno será capaz de:
1. Describir conceptos y herramientas de matemáticas avanzadas para el análisis de procesos en ingeniería.
2. Aplicar herramientas matemáticas en el análisis de procesos en ingeniería."

1. Sea $V_{[0,T]} = \{X(t) \mid X(t)$ es una función de $t \in [0,T]$, $T > 0$ y es una variable aleatoria en $\mathbb{R}$ con $p_x(t) = p(X = x|t)\}$.

   Note que toda $X(t) \in V_{[0,T]}$, tiene asociada $p_x(t) = \begin{cases} p(X = x|t) = \int_0^t f(x,\tau)\, d\tau & t \in [0,T] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$, donde $f(x,t)$ es una función de distribución de probabilidad apropiada. Explicar para $Z \in V_{[0,T]}$, porqué se cumple la ecuación diferencial: $\frac{d}{dt} p_z(t) = f(z,t)$.

2. Derivar la ecuación diferencial estocástica ($\frac{d}{dt} p_x(t)$) de la probabilidad de una variable aleatoria $X(t)$ que cambia ligeramente en el intervalo t a $t + \Delta t$, para constantes L, K_0, K_1 y K_2 de la siguiente forma:

   $$p_x(t + \Delta t) = L\left(K_0 p_x(t) + K_1 p_{x-1}(t) + K_2 p_{x-2}(t)\right) \Delta t$$

   donde $p_x(t), p_{x-1}(t)$ y $p_{x-2}(t)$ son funciones de probabilidad en $x, x-1$ y $x-2$.

   (a) Además explicar, ¿si es posible o no, omitir el parámetro L mediante una modificación adecuada del modelo anterior?

3. Construir un ejemplo numérico para una compañía de transportes que distribuye sus productos en tres ciudades en función de sus ordenes de pedido. La política de servicio es que cuando lo pidan, se envía inmediatamente, ya sea a la misma ciudad o entre diferentes ciudades. O sea, en cualquier momento se puede tener un envio entre las ciudades o a la misma. Las ciudades son nombradas $1, 2$ y 3 (corresponden a los estados del sistema de envio).

   (a) Explicar como determinaría $p(j|i)$, es decir la probabilidad condicional de salir de la ciudad i para ir a la ciudad j con $i, j = 1, 2, 3$.
   (b) Dar valores y construir una matriz de transición de probabilidades $p(j|i)$.
   (c) Dibujar el diagrama de transición.
   (d) Calcular e interpretar el límite estocástico $p(j)$ para los valores del inciso b.
   (e) Explicar, ¿Con base en este modelo, como justificar un cambio en la política de servicio de la compañía?

4. Calcular otra forma equivalente de la integral $\iint_Q u \frac{\partial \delta z}{\partial t} \mathrm{d}x\mathrm{d}t$ donde $Q = [0,L] \times [0,T]$, $L > 0$, $T > 0$ y $u : Q \to \mathbb{R}$, $z : Q \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables, continuas y suaves que cumplen todo lo necesario para poder integrarlas o derivarlas.

5. Explicar como resolvería un problema de procesos con un ejemplo para los siguientes incisos:

   (a) Un método Matemático determinístico.
   (b) Un método basado en la técnica Monte Carlo o en la técnica de método de evolutivo.