APUNTES DE MÉTODOS MATEMÁTICOS AVANZADOS

Carlos Barrón Romero

ESPACIO LINEAL.

Sea V un conjunto, diferente de cero con una operación + (V,+) } Algebra Vectorial (I)

Sea C un campo de números (reales $\mathbb{R}$ o complejos C) (C, +, ·, 0, 1) (II)

I. (V,+) + suma de vectores.

Sean $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$

1. $\bar{a} + \bar{b} \in V$ Cerradura en V
2. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ Conmutatividad
3. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ Asociatividad

$$+(+(\bar{a}, \bar{b}), \bar{c}) = +(\bar{a}, +(\bar{b}, \bar{c}))$$

II. Sean α, β, λ ϵ C.

i. $\alpha + \beta \in C$; $\alpha\cdot\beta \in C$ Cerradura en C
ii. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$; $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$ Conmutatividad
iii. $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$ Asociatividad
$(\alpha\cdot\beta)\lambda = \alpha(\beta\cdot\lambda)$
iv. Unidades o elemento neutro
$\left.\begin{array}{l}\alpha + 0 = \alpha \\ \alpha \cdot 1 = \alpha\end{array}\right\}$ Por la derecha

(Proposición: Las unidades de un campo con conmutatividad son también por la izquierda)

Prop. $0 + \alpha = \alpha$

$1 \cdot \alpha = \alpha$

Demostración:

$0 + \alpha$ por ii $= 0+\alpha = \alpha+0$ … (a)

Y por iv $= \alpha+0 = \alpha$ … (b)

Por (a) y (b) $= 0+\alpha = \alpha +0 = \alpha \rightarrow 0+\alpha = \alpha$

(En forma similar para $1\alpha=\alpha$)

v. Inversos .

+) ∃! $-\alpha \in C$, tal que $\alpha+(-\alpha)=0$

*) ∀ $\beta \in C \setminus \{0\}$, ∃! B^{-1} tal que $\beta(\beta^{-1})=1$

Por la derecha

(En forma similar en C conmutativo son por la izquierda)

Resolución de ecuaciones.

$5+x=0$ $\qquad$ $5+(-5)= 0$ $\qquad$ ∴ $x=-5$

vi. Distributibidad de · sobre +

Expandir

$$\alpha(\beta+\lambda) = \alpha\beta + \alpha\lambda$$

Factorización

I, II. (V,+) (C,+,·,0,1). Si ∀ $\lambda \in C$, ∀$\bar{v} \in V$

III. $\lambda \bar{v} \in V$

Proposición ∃ $\bar{0} \in V$

Demostración por III para $\lambda=0$, $\bar{v} \in V$

Se tiene $0\bar{v} \in V$

El $\bar{0}$ debe cumplir que ∀$\bar{v} \in V$, ∃ $-\bar{v} \in V$ tal que $\bar{v}+(-\bar{v})= \bar{0}$

Y esto se cumple porque $\bar{v}+(-\bar{v})= 1\cdot\bar{v}+(-1)\bar{v}= (1+(-1))\bar{v}= 0\bar{v}$

Además $\bar{v}+\bar{0}= 1\cdot\bar{v}+0\cdot\bar{v}= [1+0]\bar{v}= 1\cdot\bar{v}= \bar{v}$

LINEALIDAD.

$\bar{a}$

$\bar{a}+\bar{a} = 2\bar{a} = (1+1)$

$\bar{a}$

$\lambda\bar{a} + \beta\bar{a} = (\lambda+\beta)$

Interpretación geométrica

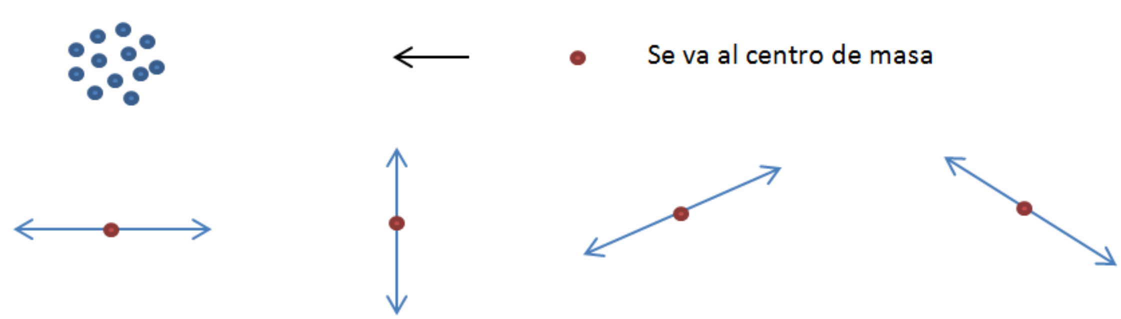
Dirección (depende de un origen) y magnitud (tamaño, peso y cantidad)

PRINCIPIO DE TRASLACIÓN DE VECTORES.

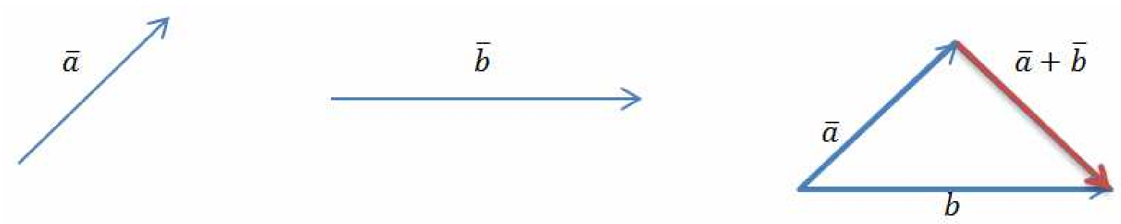
Los vectores se pueden trasladar a una referencia cualesquiera sin alterar su magnitud y dirección. Dicha traslación obedece al sentido común, diagrama de fuerzas del objeto o resolución de un problema.

¿Cuál es la dirección del $\bar{0}$?

Dado un sistema de una partícula a un cúmulo de partículas distantes, el vector de atracción de estos se dirige al centro de masa del cúmulo.

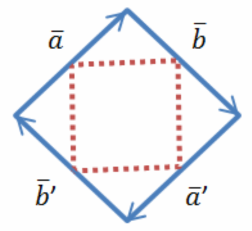


- El cero es un vector que tiene todas las direcciones



Cualesquiera dos fuerzas que apunten al cúmulo forman un triángulo isósceles y éste triángulo coincide con el centro de masa.

Dado un sistema cerrado de 2 vectores, los puntos medios forman un rombo.



$\bar{b} = -\bar{b}'$ $\qquad$ $\bar{x} = \frac{\bar{b}'}{2} + \frac{\bar{a}}{2}$

$\bar{a} = -\bar{a}'$ $\qquad$ $\bar{y} = \frac{\bar{b}}{2} + \frac{\bar{a}'}{2}$

Un conjunto V es un campo C, forman un espacio vectorial si:

$\bar{b}$

$\forall$ $\bar{a}$, $\in$ V $\forall$ α,β ∈ C

$\bar{a}$

$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \in V$ (α+β) $\bar{0} \in V$

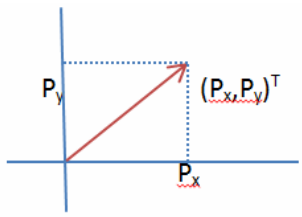
Un conjunto SCV de un sub-espacio vectorial si S es un conjunto vectorial

Ejemplos de espacios vectoriales:

$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{R} \right\}$

$\lambda \in \mathbf{R},\ P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$

$\lambda P = (\lambda P_x, \lambda P_y)^T$



$\sqrt{P_x^2 - P_y^2} = m$

$(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \cdot)$ Sea $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$

αP + βq = $\begin{pmatrix} \alpha P_x \\ \alpha P_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta q_x \\ \beta q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha P_x + \beta q_x \\ \alpha P_y + \beta q_y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ $\quad \therefore$ $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \cdot)$ Es un espacio vectorial

Para $\mathbf{R}^n$ $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}, +, \cdot)$, $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^n$ $\quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} P_1 + q_1 \\ P_2 + q_2 \\ \vdots \\ P_n + q_n \end{pmatrix}$

$\therefore$ $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \cdot)$ También es un espacio vectorial.

Si tenemos un espacio vectorial, con n componentes, pero sólo con P_1 y $P_2 \neq 0$ y P_3, P_4,..., P_n=0

$\mathbf{R}^2 \in \mathbf{R}^n$, $\qquad \mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \middle| P_1, P_2 \in \mathbf{R} \right\} \Rightarrow \mathbf{R}^2$ Es un espacio vectorial de $\mathbf{R}^n$, pero $\mathbf{R}^n \neq \mathbf{R}^2$

Una recta que pasa por el origen es un espacio vectorial y es un sub-espacio de $\mathbf{R}^2$

Una recta que pasa por el origen es un espacio vectorial, en el plano hay n espacios vectoriales.

Un plano que pasa por el origen es un espacio vectorial y es un sub-espacio de $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^5, \ldots, \mathbf{R}^n$. (Hiperplanos > 3 dimensiones).

A$\subset \mathbf{R}^n x \mathbf{R}^n$ $\qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\qquad$ Matrices $\mathbf{M}^{nxm}$

$\mathbf{B} \in \mathbf{M}^{nxm}$ $\qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \qquad \lambda\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\therefore (\mathbf{M}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ Es un espacio vectorial.

Sea $\mathbf{P}$ el conjunto de los polinomios

$\mathbf{P} = \{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 | a \in \mathbf{R}, i = 0, \ldots, n \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}\}$

P, q $\in \mathbf{P}$, $\mathbf{q(x)} = a'_n x^n + \cdots + a'_0$

$\mathbf{p(x)} + \mathbf{q(x)} = (a_n + a'_n)x^n + (a_{n-1} + a'_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + a'_1)x + a_0 + a'_0 \in \mathbf{P}$

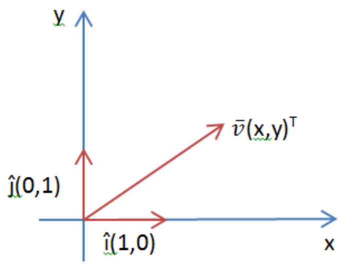
$\lambda \mathbf{p(x)} = \lambda a_n x^n + \lambda a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lambda a x + \lambda a_0$

y el polinomio cero: $0 = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \in \mathbf{P}$

$(\mathbf{P}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ Espacio vectorial para todos los polinomios (de dimensión infinita).

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL.

Es un conjunto de vectores que se pueden describir linealmente independientes $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \cdot)$



$\Rightarrow \bar{v} = (x\hat{i} + y\hat{j})$

$\hat{i}$ y $\hat{j}$ cumplen con ser LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Ejemplo: $\hat{i}=(1,0)$; $\hat{w}=(2,0)$

$\lambda_1\hat{i}+\lambda_2\hat{w}$ $\quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1/2 \quad \lambda'_1 = -1 \quad \lambda'_2 = 1/2$

$\lambda_1\hat{i}+\lambda_2\hat{w} = 1(1,0)^T+(-1/2)(2,0)^T = (1,0)^T+(-1,0)^T = (0,0)^T$

$\lambda'_1\hat{i}+\lambda'_2\hat{w} = -1(1,0)^T+(1/2)(2,0)^T = (-1,0)^T+(1,0)^T = (0,0)^T$

Luego $\hat{i}$ y $\hat{w}$ no son linealmente independientes

Una base debe ser:

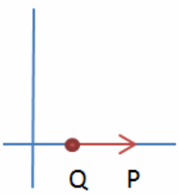
- Linealmente independientes.
- Generan a todos los vectores del espacio vectorial.

$\hat{I}$ y $\hat{j}$

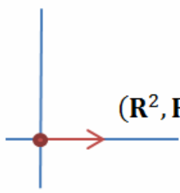
$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{matrix}\lambda_1 + 0 = \\ 0 + \lambda_2 = \end{matrix} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \lambda_1=0, \lambda_2=0$ $\qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$\therefore$ $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son linealmente independientes, más aún son base de $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \cdot)$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$

$\overline{QP}$
$\downarrow$
Origen



Por principio de traslación



$(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \cdot)$

Base de E(-E, C, +, ·)

B=$\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, |\}$ $\overline{v}_i$ son L.I. $\left\{ i.e.\overline{0} = \sum_{i=1} \lambda_i \overline{v}_i, \lambda_i = 0, \forall_i \text{ es la única solución} \right\}$

L(B)=E, donde L son todas las combinaciones lineales de los elementos de B.

Dimensión: D(E)=$|\mathbf{B}|, |\cdot|$ cardinalidad del conjunto (número de elementos del conjunto.

Tensores.

Arreglos de matrices, desde n=1, hasta n=p

Vectores $\overline{u} \in \mathbf{R}^n$ $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ $D(\mathbf{R}^n) = |\{\hat{\imath}, \hat{\imath}_2, \dots, \hat{\imath}_n\}| = n$

Matrices $\overline{v} \in \mathbf{R}^{nxm}$ $\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix}$ $D(\mathbf{R}^{nxm}) = n \cdot m$

Tensores $\overline{t} \in \mathbf{R}^{nxmxp}$ $\begin{pmatrix} t^1{}_{11} & \cdots & t^1{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^1{}_{n1} & \cdots & t^1{}_{nm} \end{pmatrix}$ $D(\mathbf{R}^{nxmxp}) = n \cdot m \cdot p$

$$\begin{pmatrix} t^p{}_{11} & \cdots & t^p{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^p{}_{n1} & \cdots & t^p{}_{nm} \end{pmatrix}$$

Propiedades.

$\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathbf{R}^4$ $(\lambda + \mu)\overline{u}_1 = \lambda \overline{u}_1 + \mu \overline{u}_1$ Existe el tensor nulo

Ejemplo de suma de tensores $\overline{t}, \overline{z} \in \mathbf{R}^{nxmxp}$

$$\begin{pmatrix} t^1{}_{11} & \cdots & t^1{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^1{}_{n1} & \cdots & t^1{}_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^1{}_{11} & \cdots & z^1{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z^1{}_{n1} & \cdots & z^1{}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^2{}_{11} & \cdots & t^2{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^2{}_{n1} & \cdots & t^2{}_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^2{}_{11} & \cdots & z^2{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z^2{}_{n1} & \cdots & z^2{}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^p{}_{11} & \cdots & t^p{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^p{}_{n1} & \cdots & t^p{}_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^p{}_{11} & \cdots & z^p{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z^p{}_{n1} & \cdots & z^p{}_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^1{}_{11} + z^1{}_{11} & \cdots & t^1{}_{1m} + z^1{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^1{}_{n1} + z^1{}_{n1} & \cdots & t^1{}_{nm} + z^1{}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} t^p{}_{11} + z^p{}_{11} & \cdots & t^p{}_{1m} + z^p{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^p{}_{n1} + z^p{}_{n1} & \cdots & t^p{}_{nm} + z^p{}_{nm} \end{pmatrix}$$

$\bar{t} + \bar{z} = (t^k{}_{ij} + z^k{}_{ij})$ $\quad i = 1, 2, \dots, n$

$j = 1, 2, \dots, m$

$k = 1, 2, \dots, p$

∴ Los espacios tensoriales también son espacios vectoriales.

D($\mathbf{R}^n$)=Dimensión de este espacio es n elementos.

L(B)=E $\quad$ E=$(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}, +, \cdot)$ $\quad$ B $= \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}^{\hat{\imath}_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}^{\hat{\imath}_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}^{\hat{\imath}_n} \right\}$

E es de dimensión finita si D(E) < ∞

L(B)= $\mathbf{R}$ $\quad$ **L(B)**$= \{x_1\hat{\imath}_1 + x_2\hat{\imath}_2 + \cdots + x_n\hat{\imath}_n | x_i \in \mathbf{R}\}$

L(B) $= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in \mathbf{R} \right\} = \mathbf{R}^n$

$\mathbf{R}^n \quad \hat{\imath}k = (e_i), e_i = \begin{cases} 0 \lambda \neq k \\ 1 \lambda = k \end{cases} \quad Vectores$

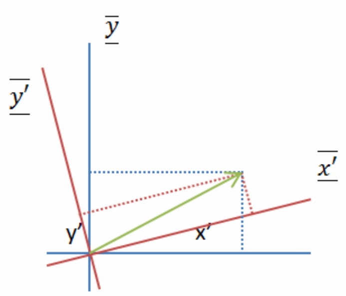
$\mathbf{R}^{nxm} \quad e_{ij} = (e_{kl}), e_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq i, & l \neq j \\ 1 & k = i, & l = j \end{cases} \quad En\ la\ diagonal\ \neq \mathbf{0}$

Un espacio matricial requiere nxm elementos, por lo tanto es finito.

$\mathbf{R}^{nxmxp} \quad e_{ij} = (e^{xy^z}), e^z{}_{yz} = \begin{cases} 1 & \begin{matrix} z = kn \\ i = yn \\ j = x \end{matrix} \\ 0 & En\ otro\ caso \end{cases}$

Un espacio tensorial requiere $nxmxp$ elementos, por lo tanto es finito.

Sistema de referencia:



$\|\overline{v}\|_{\overline{x\ y}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|\bar{v}|_{\underline{\overline{x'y'}}} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$|\bar{v}|_{\overline{x\,y}} = |\bar{v}|_{\underline{\overline{x'y'}}}$$

son unitarios

$$\mathbf{B} \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow[\text{Cambio de base}]{}} \mathbf{B}'$$

¿Por qué cambiar un Sistema de Referencia?

$\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B}'$ Cambio de base

Condiciones: B' debe ser linealmente independiente y generar $\mathbf{R}^2$, D(B)=D(B')

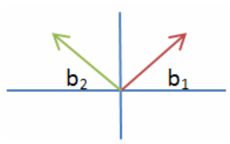
Base canónica de un polinomio

$\mathbf{P} = (\mathbf{P}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ $\mathbf{B} = \{a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n\}$ D($\mathbf{P}$)$= \infty$ ¿Por qué?

Supongamos que $n =$ 1x10^6 $(a_n x^{1x10^6}) = a_n x^{1x10^6+1}$ $\Rightarrow$ Queda fuera del rango

Ejemplo: Cambiar la base de B→B'

$$B' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{b_2} \right\}$$



b_1 y b_2 son linealmente independientes

Vector en B'

$$x'^{b_1} + y'^{b_2} = x'\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x' - y'\\ x' + y'\end{pmatrix} = (x' - y')\hat{\imath} + (x' + y')\hat{\jmath}$$

B' → B = $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1 - \lambda_2\\ \lambda_1 + \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right] = \begin{matrix}2\lambda_1 = 0\\ \lambda_1 = 0\end{matrix} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad Si\ \lambda_1 y\, \lambda_2 = 0$$

∴ Son linealmente independientes, tiene solución única y tiene inversa.

Cambio de base de B'→B'$^{-1}$ (ahora regresar)

$$\lambda'_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda'_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=C_1\hat{\imath}+C_2\hat{\jmath}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda'_1-\lambda'_2\\\lambda'_1+\lambda'_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{b_1}{1} & \overset{b_2}{-1}\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\lambda'_1\\\lambda'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}\leftarrow \textit{Dado esto}$$

Para encontrar $\lambda_1 y\, \lambda_2$ se resuelve

$$\big[\underbrace{b_1,b_2}_{B'}\big]\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda'_1\\\lambda'_2\end{pmatrix}}_{\lambda}=\underbrace{\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}}_{C}\quad\Rightarrow\quad B'\lambda=C\qquad B'^{-1}B'\lambda=B'^{-1}C\qquad I\lambda=B'^{-1}C$$

$$B'^{-1}C=\lambda$$

EIGENVALORES, EIGENVECTORES.

$Av=\lambda v$ Ecuación característica

$$\begin{aligned}\lambda&=escalar\ (eigenvalor\ \le n)\\A&=matriz\ nxn\\v&=vector\ \mathbf{R}^n\ (eigenvector\ n)\end{aligned}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}}^{A}\overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}^{v}=\overset{\lambda}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \therefore \textit{Hay un eigenvalor}$$

$$\begin{aligned}&Av-\lambda v=0\\&Av-\lambda Iv=0\\&(A-\lambda I)=v=0\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}&v\neq 0\\&\Rightarrow A-\lambda I=\bar{0}_{nxm}\\&\Rightarrow |A-\lambda I|=|\bar{0}_{nxm}|=0\end{aligned}$$

$$\left|\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{pmatrix}\right|=0$$

Desarrollando el determinante

$$[(a]_{11}-\lambda)\begin{vmatrix}a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \vdots\\a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \vdots\\a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}+\cdots$$

$P(\lambda)=C_n\lambda^n+C_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+C_1\lambda+C_0$ Polinomio característico de A

Las soluciones de P son los eigenvalores, puede tener soluciones complejas.

Suponiendo que por algún método se resolvió el polinomio característico y se tiene al menos un eigenvalor. ¿Cómo encontrar el eigenvector?

$$Av - \lambda_1 v = 0$$
$$Av - \lambda_1 v = 0$$
$$(A - \lambda_1 I) = v = 0$$

El eigenvector v, asociado a λ_1 se encuentra de:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además puede dividirse el polinomio entre el eigenvalor y puede obtenerse un polinomio de grado (n-1).

Estos problemas tienen su origen en funciones cuadráticos.

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 8y^2$$

Función escalar en $\mathbf{R}^2$.

$$\lambda_1 = 2, \qquad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \lambda_2 = 8, \qquad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se puede reducir la dimensión si los 2 o 3 valores conocidos son los que se aproximan.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad |A - I\lambda| = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 8-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(8-\lambda) = 0 \therefore \lambda_1 = 2 \ y \ \lambda_2 = 8$$

Sustituyendo en la matriz λ_1

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 8-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} v_1 = libre \neq 0 \\ v_2 = 0 \end{matrix}$$

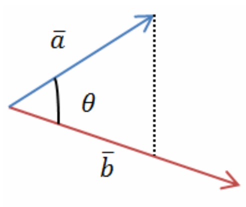
$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \bar{e}_1$$

Sustituyendo en la matriz λ_2

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 = libre \neq 0 \end{matrix}$$

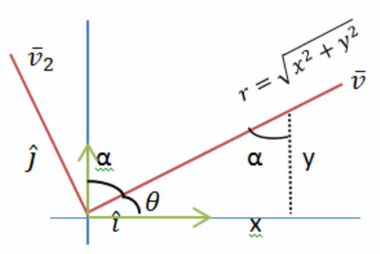
$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\bar{e}_2 = \lambda_2 \bar{e}_2$$

PRODUCTO INTERNO.



$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |a||b|\cos\theta$$

Definición geométrica del producto interno



$$v \cdot j = |v||j| \cos\alpha$$
$$= r \cdot |1| \cos\alpha$$
$$= r \sin\theta = y$$

$\bar{v} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ $\quad$ $\bar{v}_2 = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath}$ $\quad$ $\bar{v} \cdot \bar{v}_2 = (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) \cdot (x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath})$

$v^{-} \cdot v^{-}_1 2 = x\hat{\imath} \cdot x_1 2\, \hat{\imath} + x\hat{\imath}\, y_1 2\, \hat{\jmath} + y\hat{\imath} \cdot x_1 2\, \hat{\imath} + y\hat{\imath}\, y_1 2\, \hat{\jmath}) = x(x_1 2)\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + x(y_1 2)\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = y(x_1 2)\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + y(y_1 2)\hat{\jmath} \cdot$

$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \cos 0 = 1;\ \ \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = 1;\ \ \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \cos 90 = 0$

Ya no depende de la geometría seno y coseno.

V= (V, E,+, ·) espacio lineal

Un producto interno en V es una función bilineal tal que $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ en lugar de $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

ESPACIOS DE HILBERT. <, >: $V \times V \to \mathbf{E}$

I) $< \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}, \bar{c} >$
II) $< x, y > = < \overline{y, x} >$ se denota el conjugado de un número complejo
III) $< x, x > 0, x \neq 0$

NOTA: Nos restringiremos a E=$\mathbf{R}$ por lo que (II) es $< x, y > = < y, x >$.

$\mathbf{R}^n$, forma bilineal, matriz identidad I.

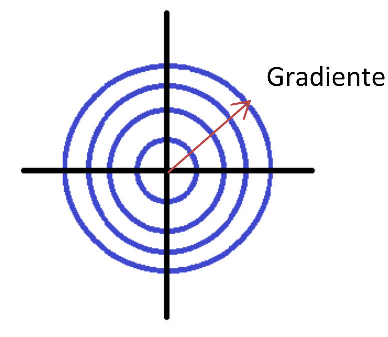
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T I \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}^n$, forma bilineal

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + \cdots + n x_n y_n$$

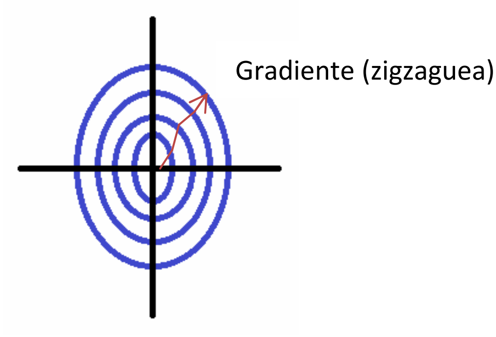
CURVAS DE NIVEL.

Métrica



$x^2 + y^2 = 0$

No métrica



$x^2 + Ly^2 = C$

Método del gradiente conjugado.

¿Es un espacio vectorial?

$<\propto \bar{a} + \beta\bar{b}, \bar{c}>_2 = \propto < \bar{a}, \bar{c}>_2 + \beta < \bar{b}, \bar{c}>_2$

$<\propto \bar{a} + \beta\bar{b}, \bar{c}>_2 = \begin{pmatrix} \propto a_1 + \beta b_1 \\ \propto a_n + \beta b_n \end{pmatrix}^T I \begin{pmatrix} C_1 \\ C_n \end{pmatrix} = \quad (\propto a_1 + \beta b_1)C_1 + (\propto a_2 + \beta b_2)C_2 + \cdots + (\propto a_n + \beta b_n)C_n$

$\propto (\bar{a}, \bar{c})_2 + \beta(\bar{b}, \bar{c})_2 = \propto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}^T I \begin{pmatrix} C_1 \\ C_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix}^T I \begin{pmatrix} C_1 \\ C_n \end{pmatrix} = \propto (a_1 C_1) + \propto (a_2 C_2) + \cdots + = \propto (a_n C_n) + \beta(b_1 C_1) + \beta(b_2$

$\therefore I = II$

Funciona con matrices “Matrices definidas positivas”

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$

$< x, x >_2 = x^T I x = x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2 > 0$

Si $x \neq 0, < x, x >_2 \neq 0$

En forma similar se unifican las otras propiedades para I y M. (El requisito es que M sea definida positiva $< x, x >_M = x^T M x > 0$).

NORMA DE V:

Es una función positiva $\|\cdot\|: V \to \boldsymbol{R}^{\dagger} += [0, \infty)$

$\bar{x} \in V$ Espacio de Banach

I) $\|\bar{x}\| \geq 0$
II) $\|\bar{x}\| = 0 <=> \bar{x} = 0$

III) $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda|\|\bar{x}\|$
IV) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Si V espacio lineal tiene un producto interno $<,>$ real, el espacio normado inducidos $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$ y al espacio se le llama _euclidiana_.

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$ $\qquad < x, x >_2 = x^T I x = x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2 > 0$

Note que $\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{<x,x>_2} = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 \ldots + x_n{}^2}$

Desigualdad de *Cauchy-Schuartz*.

$|<x,y>| \leq \|x\|\|y\|$

Desigualdad *Triangular*.

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ejemplo:

$\mathbf{R} \quad x, y \in \mathbf{R} \qquad < x, y >_1 = x \cdot y$

$|<x,y>| = |x \cdot y| \leq \|x\|\|y\| = |x||y|$

$x = -3 \qquad y = 2 \qquad \Rightarrow |-3 \cdot 2| \leq |3||2| = |-6| \leq |6|$

Trabajo: $\vec{F} \ \vec{d}$

Funciones escalares $\Phi: V \rightarrow \mathbf{R} \quad \Phi(v) \in \mathbf{R}$

Curvas de nivel: $\Phi(c) = \{v\Phi(c) = C\}$

Funciones vectoriales: $\vec{F} : v_1 \rightarrow v_2$ ésta asocia a cada vector de v_1 un vector de v_2

Ejemplo: $\mathbf{R}^n$

$$\hat{i}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \hat{i}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ \hat{i}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{i}_k = \begin{cases} ij = 1 & j = k \\ ij = 0 & j \neq k \end{cases} \qquad \vec{F} = \overrightarrow{\mathbf{R}^n} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

$$\vec{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1, \cdots, x_n)\hat{i}_1 + f_2(x_2, \cdots, x_2)\hat{i}_2 + \cdots + f_n(x_n, \cdots, x_n)\hat{i}_n$$

Ejemplo:

$$F(x,y,z)=(x-y)^2\hat{i}_1+(z^2+x-2)\hat{i}_2+(x^2+y^2+z^2)\hat{i}_3$$

$$Av=A_1v \quad , \quad A_2v \quad , \quad A_nv$$

¿Duda?

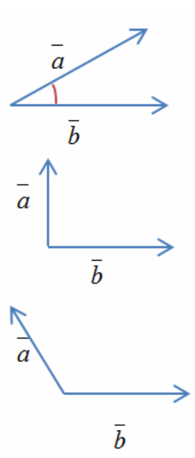
$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\rho\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}\lambda+r\\\beta+r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Un espacio vectorial en $\mathbf{R}^n$ tiene n vectores base porque si tiene n+1 se vuelve forzosamente linealmente dependiente.

$$V=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)|a_i\in\mathbf{R}\}$$

$b_1=(1,0,\cdots)$ $\qquad$ $b_2=(0,1,\cdots)$ $\qquad$ $b_n=(0,0,\cdots,1,\cdots)$ Dimensión finita

PRODUCTO INTERNO



$\bar{a}\cdot\bar{b}>0$ Direcciones similares (menores a 90°) $0<\theta<90°$

$\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ Ortogonalidad

$\bar{a}\cdot\bar{b}<0$ Direcciones opuestas (mayores a 90°) $0<\theta<180°$

$|\bar{a}|=\sqrt{a\cdot a}$ Norma inducida por el producto interno.

Producto interno en funciones

$$P[c,d]=\{a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0|a_i=0 \quad i=3,2,1,0\}$$

$$P_1\in P[c,d] \qquad P_1(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad x\in[c,d]$$

$$P_2\in P[c,d] \qquad P_2(x)=a'_3x^3+a'_2x^2+a'_1x+a'_0$$

$$P_1\cdot P_2=\int_c^d P_1(x)P_2(x)dx \qquad |P_1|=\sqrt{P_1\cdot P_2}=\sqrt{\int_c^d P_1(x)^2\,dx}$$

Angulo entre polinomios

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|a||b|} = \frac{\int_c^d P_1(x)P_2(x)dx}{\sqrt{\int_c^d P_1(x)^2\,dx}\sqrt{\int_c^d P_2(x)^2\,dx}}$$

Propiedades necesarias

a) $(\propto \bar{a} + \beta\bar{b})\cdot\bar{c} = \propto \bar{a}\bar{c} + \beta\bar{b}\bar{c}$
b) $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ Cuan el espacio es vectorial sobre $\mathbf{R}$
$\bar{a}\cdot\bar{a} \geq 0$
c) $\bar{a}\cdot\bar{a} = 0 \leftrightarrow \bar{a} = \mathbf{0}$ Positividad

$|\bar{a}\cdot\bar{b}| \leq |\bar{a}||\bar{b}|$ Desigualdad de Cauchy-Schuartz

$$\cos\theta = \frac{P_1\cdot P_2}{|P_1||P_2|} \Rightarrow |P_1\cdot P_2| = \cos\theta\cdot|P_1||P_2| = |\cos\theta||P_1||P_2|$$

$\therefore \quad |P_1\cdot P_2| \leq |P_1||P_2|$

Desigualdad triangular. $|\bar{a}+\bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$

Igualdad del paralelogramo

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2 + |\bar{a}-\bar{b}|^2 = 2\left(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2\right)$$

$$\begin{array}{rl} & |\bar{a}+\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}| \\ + & |\bar{a}-\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}| \\ \hline & |\bar{a}+\bar{b}|^2 + |\bar{a}-\bar{b}|^2 = 2\left(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2\right) \end{array}$$

Producto cruz $(\bar{a}x\bar{b})$: $\mathbf{R}^3$

$|\bar{a}x\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\gamma$ Regla de la mano derecha

$$|\bar{a}x\bar{b}| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (a_2b_3 - b_2a_3)\hat{\imath} - (a_1b_3 - b_1a_3)\hat{\jmath} + (a_1b_2 - b_1a_2)\hat{k}$$

Propiedades del producto cruz

$$|\bar{a}x\bar{b}| = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

a) $(\propto \bar{a})x\bar{b} = \propto (\bar{a}x\bar{b}) = \bar{a}x(\propto \bar{b})$
b) $\bar{a}x(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}x\bar{b} + \bar{a}x\bar{c}$
c) $\bar{a}x\bar{b} = -\bar{b}x\bar{a}$ No es conmutativa

d) $\bar{a}x(\bar{b}x\bar{c}) \neq (\bar{a}x\bar{b})x\bar{c}$ No es asociativa, no deben omitirse los paréntesis

Demostración de a)

$$(\propto \bar{a})x\bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \propto a_1 & \propto a_2 & \propto a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \propto \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \propto b_1 & \propto b_2 & \propto b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \propto (\bar{a}x\bar{b}) = \bar{a}x(\propto \bar{b})$$

Demostración de b)

$$\bar{a}x(\bar{b}+\bar{c}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (b_1+c_1)\begin{vmatrix} \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} - (b_2+c_2)\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{k} \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} + (b_3+c_3)\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= b_1\begin{vmatrix} \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{k} \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{k} \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{a}x(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}x\bar{b} + \bar{a}x\bar{c}$$

Demostración de d)

$\bar{a}x(\bar{b}x\bar{c}) =$ Si $\bar{a}$ está en la dirección del producto resultante, entonces, el producto cruz es cero. Pero en el caso de que los vectores unitarios $\bar{a} \neq \hat{\imath}, \bar{b} = \hat{\jmath}, \bar{c} = \hat{k}$, la igualdad si se cumple.

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

$$(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}) = \bar{a}\cdot(\bar{b}x\bar{c})$$

a) $(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}) = \bar{a}\cdot(\bar{b}x\bar{c}) = (\bar{a}x\bar{b})\cdot\bar{c}$
b) $|(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})|$ Es el volumen del paralelepípedo de arista $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$.
c) $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ Son linealmente si y solo si $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0$

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}x\bar{c}) = (a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k})\cdot\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k})\left[(b_2c_3 - c_2b_3)\hat{\imath} - (b_1c_3 - c_1b_3)\hat{\jmath} + (b_1c_2 - c_1b_2)\hat{k}\right]$$

$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3 - a_2c_1b_3 + a_3b_1c_2 - a_3c_1b_2$$

$$(\bar{a}x\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\cdot\left(c_1\hat{\imath}+c_2\hat{\jmath}+c_3\hat{k}\right)$$

$$=\left[(a_2b_3-b_2a_3)\hat{\imath}-(a_1b_3-b_1a_3)\hat{\jmath}+(a_1b_2-b_1a_2)\hat{k}\right]\left(c_1\hat{\imath}+c_2\hat{\jmath}+c_3\hat{k}\right)$$

$$=(a_2b_3-b_2a_3)c_1-(a_1b_3-b_1a_3)c_2+(a_1b_2-b_1a_2)c_3$$

$$=a_2b_3c_1-b_2a_3c_1-a_1b_3c_2-b_1a_3c_2+a_1b_2c_3-b_1a_2c_3$$

$\therefore\quad \bar{a}\cdot(\bar{b}x\bar{c})=(\bar{a}x\bar{b})\cdot\bar{c}$

Funciones escalares $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

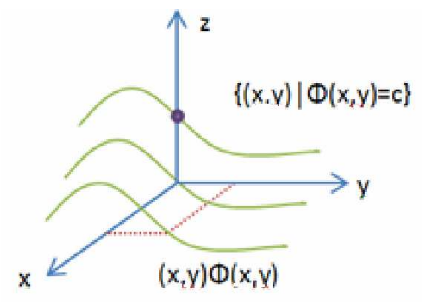
Funciones vectoriales $\bar{r}: \mathbf{R}^3 \to (\mathbf{R}^3, \mathbf{R}, +, \cdot) = V$

Campo escalar

Campo vectorial

Ejemplo de campo vectorial

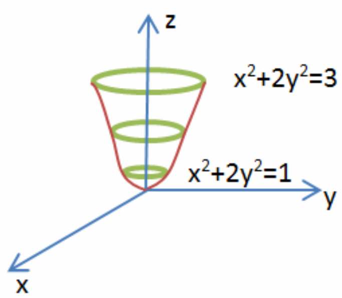
$\mathbf{R}^2$ $\quad \Phi(x,y)=C \qquad$ Curvas de nivel $\{(x,y)\,|\,\Phi(x,y)=C\}$



Ejemplo: $\Phi_1(x,y)=x^2+2y^2$ $\qquad$ Curvas de nivel $\quad \Phi_1(x,y)=C$

$x^2+2y^2=C \quad , \quad C \geq 0$

$x^2+2y^2=1 \qquad$ Elipses



FUNCION VECTORIAL

$$\bar{r}(a_1,a_2,a_3)=x(a_1,a_2,a_3)\hat{\imath}+y(a_1,a_2,a_3)\hat{\jmath}+z(a_1,a_2,a_3)\hat{k}$$

Ejemplo:

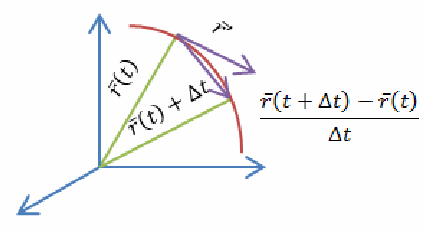
$x(a_1, a_2, a_3) = a_2 - a_3^2$

$y(a_1, a_2, a_3) = a_2$

$z(a_1, a_2, a_3) = a_3^2$

$\bar{r}(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_3^2)\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3^2\hat{k}$ Con $a_2 = 1,$ $a_3^2 = 4$

$\bar{r} = (1-4)\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 4\hat{k}$

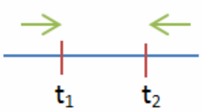


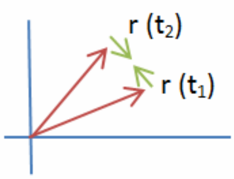
$$\bar{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}$$

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$

$|\Delta t| < \delta \Rightarrow \|\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)\| < ▯$

$|t - (t+\Delta t)| < \delta \Rightarrow \|\bar{r}(t_1) - \bar{r}(t_2)\| < \varepsilon$





$\bar{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$

$\bar{r}'(t) = x'(t)\hat{\imath} + y'(t)\hat{\jmath} + ▯'(t)\hat{k}$

Si Φ(t) es igual a un escalar

$\Phi(t)\cdot\bar{r}(t) = \Phi(x)x(t)\hat{\imath} + \Phi(y)y(t)\hat{\jmath} + \Phi(z)z(t)\hat{k}$

$\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

Operador $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \Rightarrow \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}$

$$[\Phi(t)\bar{r}(t)]' = \nabla d(t)\cdot\bar{r}(t) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(x'(t)\hat{\imath} + y'(t)\hat{\jmath} + z'(t)\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial\Phi}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}z'(t)$$

Supongamos que se toma $\Phi(t) = C$ (Curva de nivel)

$\nabla\Phi(t)\cdot\bar{r}'(t) = 0$ $\therefore \nabla\Phi(t)$ y $\bar{r}'$ son ortogonales para que sea = 0

El gradiente siempre va en la dirección ortogonal a las curvas de nivel (dirección del crecimiento del campo)

1. $V = \{P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d | x \in [-1,1], a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$
2. $V = (V, \mathbf{R}, +, \cdot)$ espacio lineal

$P, q \in V$ $\qquad P \cdot q = \int_{-1}^{1} P(x)q(x)dx \qquad |P| = \sqrt{P \cdot P} = \sqrt{\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx}$

$P \cdot q = |P||q| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\int_{-1}^{1}(ax^2)(bx)dx}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(ax^2)^2 dx}\sqrt{\int_{-1}^{1}(bx^2)^2 dx}} = \cos\frac{\pi}{2}$$

Una base ortogonal

$P_3 \cdot P_0 = 0 \qquad P_3 = x^2, \qquad P_0 = x \qquad P_3 \cdot P_0 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

DERIVADA DE UNA FUNCION VECTORIAL

$\bar{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k} \qquad \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ la base canónica unitaria de $\mathbf{R}^3$

$$\bar{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)}{h}$$

Propiedades

$C \in \mathbf{R}, \propto, \beta \in \mathbf{R}$

$\bar{u}(t), \bar{v}(t)$ Función vectorial

a) $[C\bar{u}(t)]' = C\bar{u}'(t)$
b) $[\propto \bar{u}(t) + \beta\bar{v}(t)]' = \propto (\bar{u}(t))' + \beta(\bar{v}(t))'$ $\therefore$ El espacio der las derivadas también es un espacio lineal.
c) $[\bar{u}(t) \cdot \bar{v}(t)]' = \bar{u}(t) \cdot \bar{v}(t)' + \bar{u}(t)' \cdot \bar{v}(t)$

d) El resultado es un vector, ésta propiedad no es conmutativa.

Demostración:

$$[\bar{u}(t) x\, \bar{v}(t)]' = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left[(u_2v_3 - v_2u_3)\hat{\imath} - (u_1v_3 - v_1u_3)\hat{\jmath} + (u_1v_2 - v_1u_2)\hat{k}\right]'$$

$$= [(u_2v_3' - u_2'v_3) - (v_2u_3' - v_2'u_3)]\hat{\imath} + \mathrm{I}$$

$$= (u_2v_3 - v_2u_3)'\hat{\imath} - (u_1v_3 - v_1u_3)'\hat{\jmath} + (u_1v_2 - v_1u_2)'\hat{k}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

e) Triple producto escalar

Derivadas parciales

$$\bar{v}(t_1,t_2) = x(t_1,t_2)\hat{\imath} + y(t_1,t_2)\hat{\jmath} + z(t_1,t_2)\hat{k}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t_1}(t_1,t_2) = \frac{\partial x}{\partial t_1}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial t_1}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial t_1}\hat{k}$$

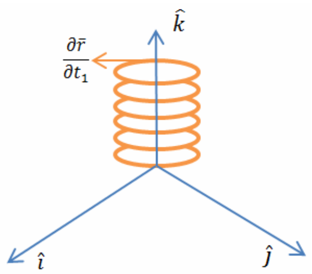
$$\frac{\partial v}{\partial t_2}(t_1,t_2) = \frac{\partial x}{\partial t_2}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial t_2}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial t_2}\hat{k}$$

Ejemplo:

$$\bar{r}(t_1,t_2) = a\cos t_1\,\hat{\imath} + a\sin t_1\,\hat{\jmath} + t_2\hat{k}$$

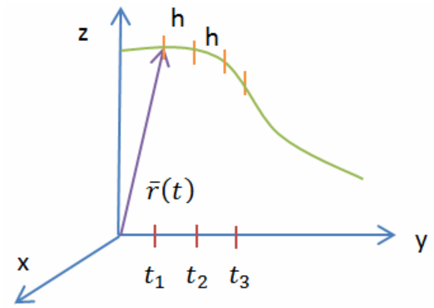
$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t_1}(t_1,t_2) = -a\sin t_1\,\hat{\imath} + a\cos t_1\,\hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t_2}(t_1,t_2) = \hat{k}$$ (Dirección de crecimiento de los círculos que conforman el cilindro)



Integral de Longitud de una curva vectorial

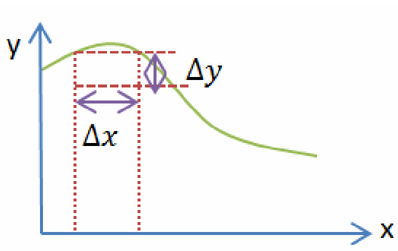
$$\left\|\frac{\bar{r}(t_0+h) - \bar{r}(t_0)}{h}\right\| + \left\|\frac{\bar{r}(t_1+h) - \bar{r}(t_1)}{h}\right\| + \cdots + \left\|\frac{\bar{r}(t_n+h) - \bar{r}(t_n)}{h}\right\|$$



Longitud de $\bar{r}(t)$ de t_0 a t_n

$$\lim_{h\to\infty}\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left|\frac{\bar{r}(t_1+h)-\bar{r}(t_i)}{h}\right| = \lim_{h\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\lim_{h\to 0}\left|\frac{\bar{r}(t_i+h)-\bar{r}(t_i)}{h}\right| = \lim_{h\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\bar{r}(t)'\cdot\bar{r}(t)'}$$

$$= \int_{t_0}^{t_n}\sqrt{\bar{r}(t)'\cdot\bar{r}(t)'dt}$$

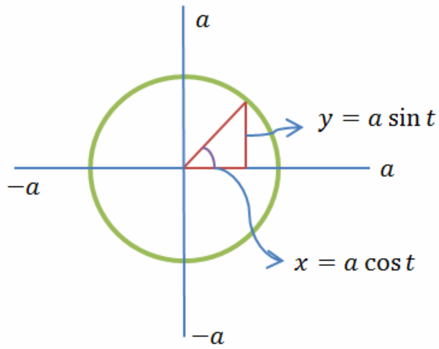


$$\bar{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

$$\bar{r}(t)' = x(t)'\hat{\imath} + y(t)'\hat{\jmath} + z(t)'\hat{k}$$

$$\int_{t_0}^{t_n}\sqrt{\bar{r}(t)'\cdot\bar{r}(t)'dt} = \int_{t_0}^{t_n}\sqrt{(t)'\hat{\imath} + y(t)'\hat{\jmath} + z(t)'\hat{k}}$$

Ejemplo: Una circunferencia



$$\bar{r}(t) = a\cos t\,\hat{\imath} + a\sin t\,\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

Medir la longitud de $t_0 = 0,\qquad t_n = \dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t\,dt}$$

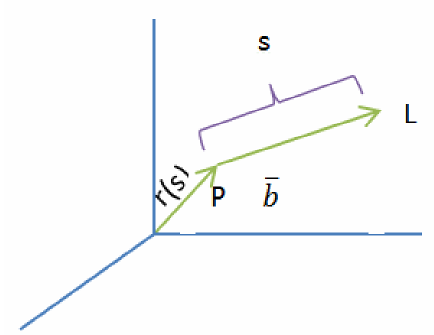
$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t\,dt} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = a\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{a\cdot\pi}{2}$$

Syms_a_b_c_x

int(ax^2,x,-1,1)

Derivada Direccional

$$D\bar{b}f = \frac{df}{ds} = \lim_{s\to 0}\frac{f(Q)-f(P)}{s}$$



Ecuación de la recta L

$$\bar{r}(s) = P + s\bar{b}, \qquad s \in \mathbf{R}$$

$$\bar{r}(s) = x(s)\hat{\imath} + y(x)\hat{\jmath} + z(x)\hat{k}$$

$$P\bar{b}f = \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}dx\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}dy\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}dz\hat{k}$$

$$\bar{r}(s)' = x(s)'\hat{\imath} + y(x)'\hat{\jmath} + z(x)'\hat{k}$$

$$d\bar{r} = dx + dy + dz$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

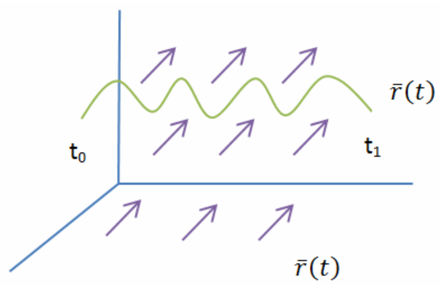
$D\bar{b}f = \nabla f \cdot d\bar{r}$ Si $\bar{r}(s) = P + s\bar{b},$ $P = cte$ $d\bar{r} = \bar{b}$

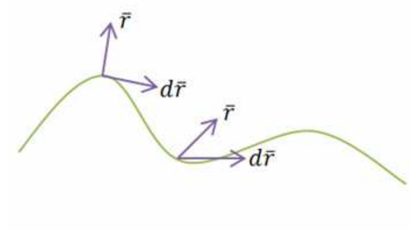
$\therefore\ D\bar{b}f = \nabla f \cdot \bar{b}$ La derivada direccional de una función es igual al producto del campo vectorial por esa función.

Campo vectorial inducido como el gradiente de una función escalar.

$$\bar{F}(t) = \nabla\Phi(t)$$

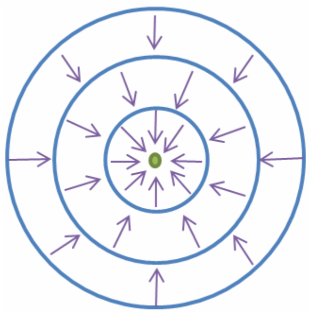
Integral de línea o trayectoria $\int_{t_0}^{t_1} \bar{F}\cdot d\bar{r}$





Φ= Campo escalar

Campo vectorial conservativo



$x^2 + y^2 = a^2$ $\qquad\qquad$ $\bar{F} = \nabla\Phi$

Si me muevo en una misma curva de nivel, no hay trabajo.

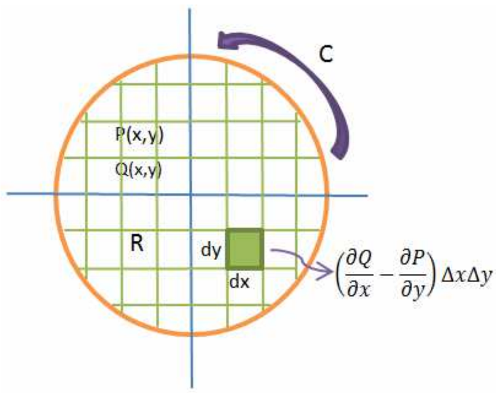
$$\int_{t_0}^{t_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \Phi(t_1) - \Phi(t_0)$$

$\oint \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$

Integral de la línea cerrada donde $t_0 = t_1$ y se recorre en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

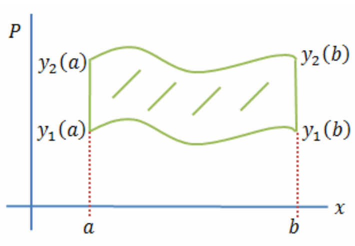
TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO.

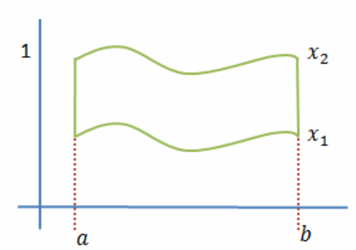
Sea P(x,y) y Q(x,y) funciones contínuas con derivadas contínuas en una region R limitada por una curva simple (que no tiene cruces), cerrada (empieza donde termina) C.



$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_R^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Ejemplo:





$$\oint P dx = \int_C^1 P dx = \int_a^b P(x,y)(x)dx + \int_b^a P(x)y_2(x)dx$$

$$\oint_C^1 Pdx - Qdy = \iint_R^1 \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)dxdy = -\int_a^b P(x_1, y_2(x))dx \neq \int_a^b P(x)y_1(x)dx$$

$$= \int_a^b \left[P(x, y(x)) - P(x, y_2(k))\right] = dx = -\int_a^b P(x, y_2, k) - P(x, y(x), dx)$$

$$-\int_a^b \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right)dx = -\iint_R^1 \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy\right)dx = -\iint_R^1 \frac{\partial P}{\partial y} dydx$$

La otra parte

$$\oint Qdy = \iint_R^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx\right)dy - \oint Pdy + Qdy = \iint_R^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\bar{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}$$

$$\nabla x\bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial \hat{\imath}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{\jmath}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{k}}{\partial x} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k} \qquad d\bar{s} = d\bar{x}d\bar{y}\hat{k}$$

$$\oint_C^1 \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint (\nabla x\bar{F}) \cdot d\bar{s}$$

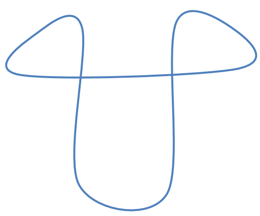
Teorema de Stokes

El trabajo hecho por el rotacional en este caso en particular

$$-d\bar{s} = dxdydx\left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right)$$

$$\oint_C^1 \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_R^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

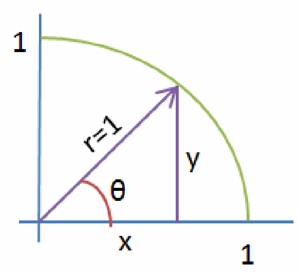
Teorema de Green



Curva no simple pero suave, por tanto se usa Teorema de Green (son 3 curvas).

$$\oint \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint_{R_1}^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \iint_{R_2}^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \iint_{R_3}^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Ejemplo: Encontrar la integral de línea de la siguiente curva (Introducción al control óptimo con discretización).



$F(r) = -y\hat{\imath} - xy\hat{\jmath}$

Parametrizando: $x = \cos\theta$ $\qquad$ $y = \sin\theta$

$\Rightarrow F(r) = -(\sin\theta)\hat{\imath} - (\cos\theta)(\sin\theta)\hat{\jmath}$

$$\overline{r}(\theta) = -\sin\theta\, d\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\, d\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(\overline{r})\cdot d\overline{r} = \int_0^{\frac{2}{\pi}} (-\sin\theta\hat{\imath} - \cos\theta\cdot\sin\theta\hat{\jmath})\,(-\sin\theta\, d\theta\hat{\imath} + \cos\theta\, d\theta\hat{\jmath})$$

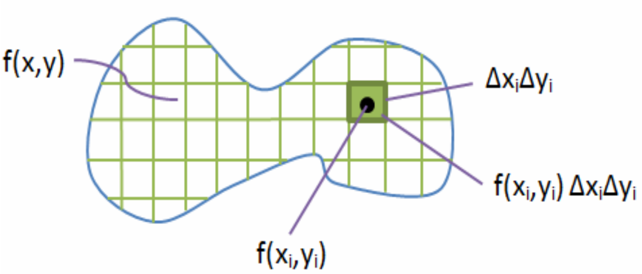
$$= \int_0^{\frac{2}{\pi}} (\sin^2\theta - \cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{2}{\pi}} (1-\cos^2\theta)\,d\theta + \int_0^{\frac{2}{\pi}} \cos^2\theta(-\sin\theta\, d\theta) \qquad \begin{array}{l} u = \cos\theta \\ du = -\sin\theta\, d\theta \end{array}$$

$$= \int_0^{\frac{2}{\pi}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 du = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{\pi}} (\cos 2\theta)\, 2d\theta + \left.\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos^3\frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\cos^3 0}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

INTEGRALES DE ÁREA



$f(x,y)$ Continuas diferenciales

$$\text{Área de } R = \lim_{n,m\to\infty} \square = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_j = \iint_R^1 dxdy$$

$$A \cong \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x'_i, y'_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

$$\iint_R^1 f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x'_i, y'_i)\Delta x_i \Delta y_j$$

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_R^1 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

El teorema de Green nos dice que el efecto de la integral de línea sobre la frontera de cierta región, es igual a la integral doble sobre la región que delimita esa frontera.

TEOREMA DE DIVERGENCIA DE GAUSS

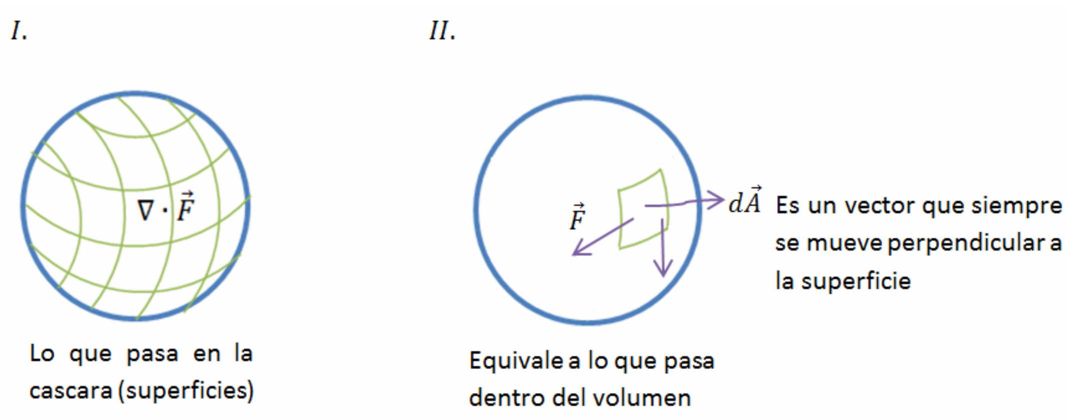
$$\iiint_V^1 \nabla \cdot \vec{F} dV = \iint_S^1 \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

$I = \nabla \cdot \vec{F}$: Gradiente del campo vectorial.

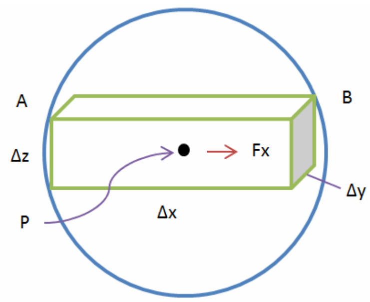
$II = \vec{F}$: Campo vectorial.

$$\iiint_V^1 h(x,y,z)\, dxdydz$$

El efecto de la función sobre un diferencial de volumen.



¿Quién es la divergencia?



En P Fx

En A $Fx - \frac{1}{2}\Delta x \frac{\partial Fx}{\partial x} \Delta y \Delta z$

En B $Fx+\frac{1}{2}\Delta x\frac{\partial Fx}{\partial x}\Delta y\Delta z$

$\vec{F}=Fx\hat{\imath}+Fy\hat{\jmath}+Fz\hat{k}$

Diferencia entre A y B es: $\frac{\partial Fx}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$

De forma similar en las otras caras

Entre frente y atrás: $\frac{\partial Fy}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$ Arriba y abajo: $\frac{\partial Fz}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$

Efecto total es: $(\nabla\cdot F)\Delta x\Delta y\Delta z$

$$\iiint_V^1 \nabla\cdot F\,dV=\iiint_V^1\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\right)dxdydz$$

Como F es continua $\iiint_V^1\frac{\partial F}{\partial x}dxdydz$

$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta\Rightarrow\bar{F}\cdot d\bar{A}=|\bar{F}||d\bar{A}|\cos\theta$ $F=Fx\hat{\imath}+Fy\hat{\jmath}+Fz\hat{k}$

$\bar{F}\cdot d\bar{A}=|Fx||d\bar{A}|\cos\alpha+|Fy||d\bar{A}|\cos\beta+|Fz||d\bar{A}|\cos\gamma$ Descomposición ortogonal

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ Son los ángulos que se forman cuando $d\bar{A}$ se descompone

$$\Rightarrow\iiint_V^1\frac{\partial F}{\partial x}dxdydz=\iint_s^1 Fx\hat{\imath}\,d\bar{A}$$

$$\iiint_V^1\frac{\partial F}{\partial y}dxdydz=\iint_s^1 Fy\hat{\jmath}\,d\bar{A}$$

De $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$

$$\iiint_V^1\frac{\partial F}{\partial z}dxdydz=\iint_s^1 Fz\hat{k}\,d\bar{A}$$

Un vector recorriendo otro vector

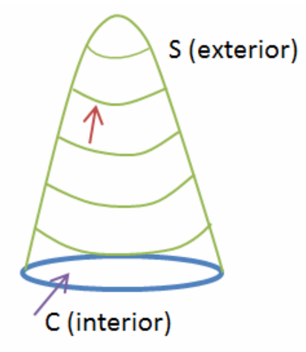
Lo que pasa en un diferencial de volumen es igual al efecto de la función sobre una superficie.

En algunos casos, para aplicar el teorema de divergencia es más sencillo el lado derecho y para otros el lado izquierdo.

- ¿Para un campo eléctrico? Derecha.
- ¿Para el campo magnético de la tierra? Izquierda.

TEOREMA DE STOKES (particular).

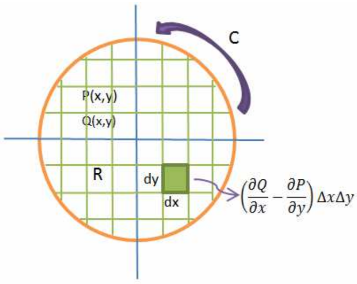
$$\oint_C^1 \bar{A}\cdot d\bar{r} = \iint_s^1 (\nabla x\bar{F})\cdot d\bar{s} = \oint_C^1 \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_s^1 (\nabla x\bar{F})\cdot d\bar{s}$$



Superficies orientables: Regresas con la misma dirección (regla de la mano derecha).

En estas superficies se cumple el teorema de Stokes.

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO (particular)



$$\oint F_1\,dx + F_2 dx = \iint_R^1 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\nabla x\bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial \hat{\imath}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{\jmath}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{k}}{\partial x} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{F} = F_1\hat{\imath} + F_2\hat{\jmath}$$
$$\bar{S} = dxdy\hat{k}$$

$$\iint_R^1 (\nabla x\bar{F})\cdot d\bar{s}$$

$$\oint_C^1 \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

$$\bar{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}$$

$$\oint_C^1 \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_R^1 (\nabla x\bar{F})\cdot d\bar{s}$$

TEOREMA DE DIVERGENCIA DE GAUSS (general)

$$\iiint_V^1 \nabla\cdot\vec{F}dV = \oiint_s^1 (\nabla x\bar{F})\cdot d\bar{s}$$

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2 y}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial y}{\partial x} - y = 0$$

En Q=(0,1) x(0,T) → Proceso

1.

$$y_{(x,0)} = y_0$$

2.

Condiciones de frontera

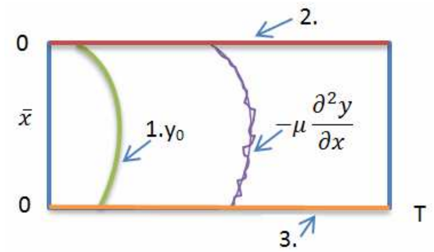
$$y: Q \to \mathbf{R}$$

$$y(x,t)$$

$$y_{(0)} = y_0$$

$$-\mu\frac{\partial(y(0,t))}{\partial x} = 0$$

3. $$\mu\frac{\partial(y(1,t))}{\partial x}=0$$



El conjunto $u=\{yx,y|y:Q\to \mathbb{R}\}$ $(u,\mathbb{R},+,\cdot)$ ∴ Si es espacio lineal

Este sistema no se puede dejarlo libre, pues se sale de los rangos.

∴ Se acotan las condiciones de frontera

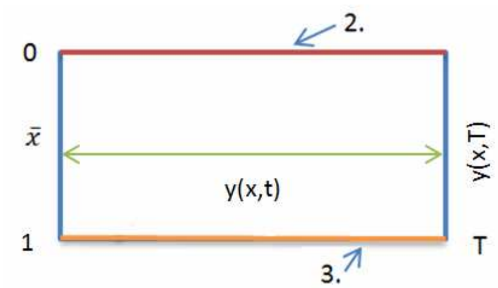
$v(t)=-\mu\frac{\partial(y(0,t))}{\partial x}\neq 0$ ⇒ El valor mínimo de la función.

$$\min_{1} J(v)=\frac{1}{2}\int_0^T v^2\,dt+\frac{k_1}{2}\iint_Q^1 y^2\,dxdt+\frac{k_2}{2}\int_Q^1 y(x,t)^2\,dx$$

Suplir $y(x,t)$ por $[y(x,T)-f(x)]^2$

Poner 2 controles

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^T (v_{x=0}(t))^2dt+\int_0^T (v_{x\neq 1}(t))^2dt+\right]$$



Donde y es una solución de sistema de ecuaciones para v .

$$\min_{1} J(v)=\frac{1}{2}\int_0^T v(t)^2\,dt+\frac{k_1}{2}\iint_Q^1 y^2\,dxdt+\frac{k_2}{2}\int_Q^1 y(x,T)^2\,dx$$

Estrategia de solución.

Caso continuo: Con $\delta f^2=2f\delta f$

Condiciones de optimalidad: $\delta J(v)=0$

$$\delta J(v) = \int_0^T v\delta v dt + k_1 \iint_Q^1 y\delta y dxdt + k_2 \int_0^T y(x,T)\delta y(x,T)dx$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \delta y}{\partial t} - \mu \dfrac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \varepsilon \dfrac{\partial \delta y}{\partial x} - \delta y = 0 \\[2ex]
\delta y(0) = 0 \\[2ex]
-\mu \dfrac{\partial(\delta y(0,t))}{\partial x} = \delta v(t) \\[2ex]
\mu \dfrac{\partial(\delta y(1,t))}{\partial y}
\end{array}\right\} \quad \text{dSE}$$

Adjunto: de lo final a lo inicial.

Estado: de lo inicial a lo final.

Para resolver el sistema y corregir errores, se va de adelante para atrás, n veces hasta resolver la integral del sistema de ecuaciones.

$$\delta J(v) = \int_0^T v\delta v\, dt + k_1 \iint_Q^1 y\delta y\, dxdt + k_2 \int_0^1 y(x,T)\,\delta y(x,T)dx$$

Integración de $\delta S.E$ requiere de P suave:

$$0 = \iint_Q^1 P\left(\frac{\partial \delta y}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \delta y}{\partial x} - \delta y\right) dxdt$$

$$\iint_Q^1 P \frac{\partial \delta y}{\partial t} dxdt - \mu \iint_Q^1 P \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} dxdt + \varepsilon \iint_Q^1 P \frac{\partial \delta y}{\partial x} dxdt - \iint_Q^1 P\delta y\, dxdt = 0 \;\; (mínimo)$$

Formula de integración por partes

$$\int_a^b v du = vu\Big|_a^b - \int_a^b u dv$$

Integrando $\iint_Q^1 P \frac{\partial \delta y}{\partial t} dxdt$ tenemos la función y:

$$\iint_Q^1 P \frac{\partial \delta y}{\partial t} dxdt = \int_0^1 \left[\int_0^T P \frac{\partial \delta y}{\partial t} dt\right] dx = \int_0^1 P\delta y\Big|_0^T dx - \int_0^1 \int_0^T \delta y \frac{\partial P}{\partial t} dtdx$$

$$= \int_0^1 P(T)\delta y(T)dx - \int_0^1 P(0)\,\delta y(0)dx - \iint_Q^1 \frac{\partial P}{\partial x} \delta y dxdt$$

$$= \int_0^1 P(T)\,\delta y(T)dx - \iint_Q^1 \frac{\partial P}{\partial x} \delta y dxdt$$

Integrando $-\mu \iint_Q^1 P\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}dxdt$ (Término de la aceleración) por partes.

$$\iint_Q^1\left(P\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}dx\right)dt = \int_0^T\left\{\int_0^1 P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx\right\}dt = \int_0^T\left(P\frac{\partial\delta y}{\partial x}\Big|_0^1\right)dt - \frac{\int_0^T\int_0^1\frac{\partial P}{\partial x}\partial\delta y}{\partial x}dxdt$$

$$= \int_0^T P(1)\frac{\partial\delta y(1)}{\partial x}dt - \int_0^T P(0)\frac{\partial\delta y(0)}{\partial x} - \left[\mu\int_0^T\left(P\frac{\partial\delta y}{\partial x}\Big|_0^1\right)dt - \int_0^T\int_0^1\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial\delta y}{\partial x}dxdt\right]$$

$$= \int_0^T P(x,1)\left(-\mu\frac{\partial\delta y(x,t)}{\partial x}\Big|_0^1 dt\right) + \mu\Big[\Big[\int_0^T\frac{\partial P}{\partial x}dy\Big|_0^1 dxdt - \int_0^T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta y dxdy\Big]$$

$$\Rightarrow \int_0^T P(x,t)\delta v(t)dt + \mu\int_0^T\frac{\partial P}{\partial x}(1,t)\delta y(1,t)dt - \mu\int_0^T\frac{\partial P}{\partial x}(0,t)\delta y(0,t)dt - \mu\iint_Q^1\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\delta y dxdy$$

$$\mu\frac{\delta y(1,t)}{\partial x} = \delta v^2(t)$$

$$= \int_0^T P(0,t)\delta v(t)dt + \mu\int_0^T\frac{\partial P}{\partial x}(1,t)\delta y(1,t)dt - \mu\iint_Q^1\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\delta y dxdy$$

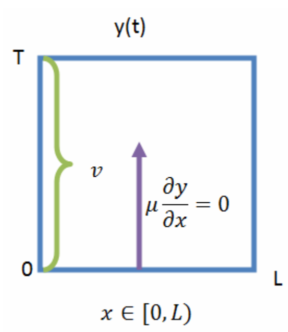
Integrando $\varepsilon\iint_Q^1 P\frac{\partial\delta y}{\partial x}dxdt$

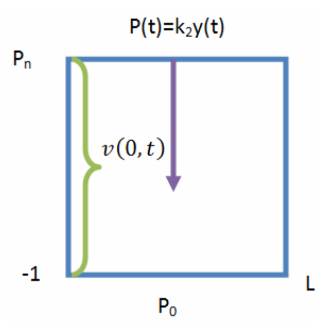
$$\varepsilon\iint_Q^1 P\frac{\partial\delta y}{\partial x}dxdt = \varepsilon\int_0^T\left[\int_0^1 P\frac{\partial\delta y}{\partial x}dx\right]dt = \varepsilon\int_0^T P\delta y\Big|_0^1 dt$$

$$= \varepsilon\int_0^T\int_0^1\frac{\partial P}{\partial x}\delta y dxdt - \iint_Q^1 P\delta y dxdt = 0$$

MODELO DEL GRADIENTE CONJUGADO

1)
2)





Sistema de ecuaciones:

Para 1)

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial y}{\partial x} - y = 0 \quad *$$

$$y_0 = y(0)$$

$$-\mu\frac{\partial y}{\partial x} = v(1) \qquad (v_0)$$

$$\mu\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad (v_L)$$

Para 2)

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial P}{\partial x} + P = -k_1 y$$

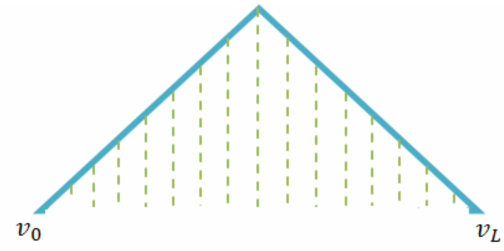
$$\mu\frac{\partial P}{\partial x}(L) + \varepsilon P(L) = 0$$

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^T v\,dt + \frac{k_1}{2}\iint_Q y^2\,dx\,dt + \frac{k_2}{2}\int_0^L y(T)^2\,dx$$

$y = \cos(tx)$
$y = \sin(t)$

Son soluciones de * (soluciones naturales) y la combinación lineal, por lo tanto se ve oscilar el sistema antes de apagarse.

Para lograr el control de la función en el centro es necesario meter controles en el centro.



PROBABILIDAD DE EVENTOS ALEATORIOS

Espacio de eventos (6 cartas)

$E = \{\boxed{A}, \boxed{A}, \boxed{J}, \boxed{J}, \boxed{R}, \boxed{R}\}$ $\qquad |E| = 6$

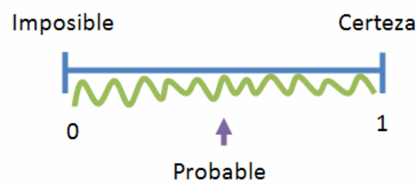
Se barajean y voltean las cartas

$\boxed{X}, \boxed{X}, \boxed{X}, \boxed{X}, \boxed{X}, \boxed{X}$ Se toma una carta $P = \frac{1}{|E|} = \frac{1}{6}$

Frecuencia de aparición: Casos favorables/Total de casos

Con reemplazo, la frecuencia de aparición no cambia y el espacio pierde aleatoriedad.

PROCESOS ESTOCÁSTICOS



$\sum_{i=0}^{|E|} fi = \mathbf{1}$ $\sum_{i=0}^{|E|} Pi = \mathbf{1}$

Moneda real: $M = \{A, S, C\} \neq \frac{\mathbf{1}}{|M|}$

$A = \acute{a}guila = 0.5$ $S = sol = 0.5$ $C = canto = p > \mathbf{0}$

Dado: $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $P_i = \frac{\mathbf{1}}{|D|} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$

Probabilidad condicional: $P\left(\frac{A}{F}\right) = \frac{P(A)P(F)}{P(F)}$

$P\left(\frac{A}{F}\right) = \frac{P(A)P(F)}{P(F)}$ $P(A \cap B)$ ⇒ Probabilidad condicional de B dado A

$\sum_{i=0}^{N} P\left(\frac{A}{B}\right) = \mathbf{1}$ Se normaliza (de 0 a 1).

X: Variable aleatoria R_x: Espacio de eventos

Ejemplo: Moneda ideal

$E_x = \{-1,1\}$, $E_x = |\{-1,1\}| = 2$

$X_i <_{\mathbf{1}}^{-1}$ evento i-ésimo

$P(X = x)$ Probabilidad de que la variable X tome el valor x

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{|E_x|} & x \in \{-1,1\} = P(x) \\ 0 & En\ otro\ caso \end{cases}$$

Ejemplo 2: Dado ideal

$Y \quad E_x = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$P(Y = y)\begin{cases} \frac{1}{|E_x|} = \frac{1}{6} \\ 0 \quad En\ otro\ caso \end{cases}$$

Variable discreta vs Variable continua.

$f(i) = Pi$ Variable discreta

$f(t) = Pt$ Variable continua

$f =$ función de probabilidad

Condición de Normalidad

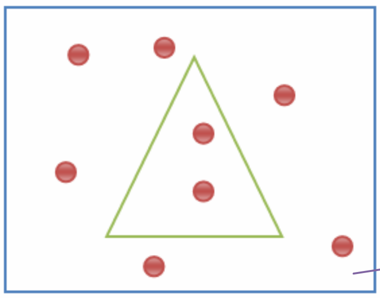
$$\left.\sum_{i \in E_I} Pi = 1\right\}$$ Variable discreta

$$\left.\int_{t \in E_T}^{1} \int f(t)dt = 1\right\}$$ Variable continua

Condición: El espacio de eventos debe ser $\sigma =$ algebra.

$E_k \subset E$ $\qquad E_k E_j \in E$ $\qquad E_k \cap E_i$ $\qquad E_k \cup E_i$

TÉCNICA MONTECARLO



E=Ω

Requisitos:

1. Generar puntos uniformes.
2. Marcarlos con un criterio dentro y fuera.

$$\acute{A}rea = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{{}^{1}/_{2}(1)}{2} = \frac{1}{4}$$

Con tiros aleatorios, se demuestra que la probabilidad de caer dentro del área se aproxima al valor del área $\approx \frac{1}{4}$

El promedio no es necesariamente un representante de evento.

TECNICA EVOLUTIVA

1) Generar una población aleatoria con técnica Montecarlo.
2) Evaluas tu función de costo o de aptitud (fitness).
3) Seleccionas apropiadamente.
4) Combinar pobladores (o agregar hasta que te convenga).

Proceso Estocástico. Tiene un límite superior. Ley de los grandes números: 30 exp. (orientado).

Métodos de disminución garantizada.

Promedio Modal (esperanza).

$$\bar{I} = \sum_{i \in E_I} (P_i)(i)$$ Probabilidad por el número de eventos (función discreta)

$$\bar{T} = \int_{T \in E_T}^{1} f(t) \cdot t\,dt$$ Función continua $\bar{I} = E(I); \quad \bar{T} = E(T)$

Función Generadora de Momentos

$$M_{\underline{x}}(t) = E\left(exp(tx)\right)$$

Ejemplo: Función de distribución de Poisson.

$$P_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & x \in E_{\underline{x}} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La función de momentos de Poisson

$$M_{\underline{x}}(t) = exp\left(\lambda(e^{t-1})\right)$$

Explicación:

$$M_{\underline{x}}(t) = E\left(exp(t\underline{x})\right) = \sum_{x \in E_x} exp(tx) P_x(t) = \sum_{x \in E_x} exp(tx) \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\left(\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\exp\left((t)^x \lambda^x\right)}{x!}\right)$$
$$= e^{-\lambda}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(exp(t)\lambda)^x}{x!}\right)$$

Especie conocida $$\exp(\lambda \exp(t)) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda exp(t)\right)^2}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} exp\big(\lambda exp(t)\big) = exp\big(\lambda(exp(t) - 1)\big)$$

Otro ejemplo: Sea $\underline{\overline{x}}$ una variable aleatoria, que pueda cambiar en t a $t + \Delta t$ para Δt pequeño.

$L\Delta t < 1$

$P_x(t + \Delta t) = L(\Delta t)P_{x-1} + \big(1 - L(\Delta t)\big)P_x$

$\lim_{1} \Delta t \to 0$ Por esto (Ecuación diferencial)

¿Qué distribución de Probabilidad tiene $\underline{\overline{x}}$?

$$\frac{dP}{dt} = LP_{x-1} - LP_x$$

Sea F(s,t) la función operador de momentos

$$F(s,t) = \sum_{x=0}^{\infty} (LP_{x-1} - LP_x)S^x = L\left(\sum_{x=0}^{\infty} P_{x-1}S^x - \sum P_x S^x\right)$$

$$= L\left[\sum_{x=0}^{\infty} SP_{x-1}S^{x-1} - \sum P_x S^x\right] = L\left(S\sum_{x=0}^{\infty} P_{x-1}S^{x-1} - \sum P_x S^x\right)$$

$$= L\big(SF(s,t) - F(s,t)\big) = L(S-1)F(s,t)$$

$$\frac{dF}{dt}(s,t) = L(S-1)F(s,t)$$

Introducción a los procesos Estocásticos

$\underline{\overline{x}}$ Variable aleatoria de un proceso de Marcov.

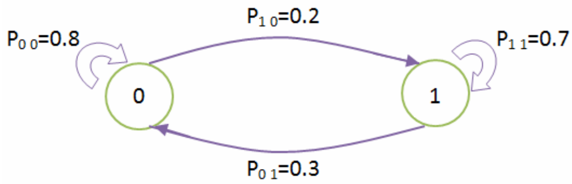
$0{:}\,Nublado$
$1{:}\,Despejado$

Por observaciones se tiene:

P_{00} $P(x_{t+1} = 0|x_t = 0) = 0.8$ $1|$ $P(x_{t+1} = 1|x_t = 0) = 0.2$ P_{10}

P_{01} $P(x_{t+1} = 0|x_t = 1) = 0.3$ $1|$ $P(x_{t+1} = 1|x_t = 1) = 0.7$ P_{11}

Diagrama de transición del sistema.



Entonces el límite estocástico, sin probabilidad condicional

$$(P_{ij}) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix} = (P_{ij}) \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix}$$

Entonces, se tienen las ecuaciones:

$$P_0 = 0.8P_0 + 0.3P_1$$

$$P_1 = 0.2P_0 + 0.7P_1$$

$$P_0 + P_1 = 1$$

Resolviendo:

$$P_0 = \frac{3}{5}$$

$$P_1 = \frac{2}{5}$$