APUNTES DE MÉTODOS MATEMÁTICOS AVANZADOS

Carlos Barrón Romero

ESPACIO LINEAL.

Sea V un conjunto, diferente de cero con una operación + (V,+) } Algebra Vectorial (I)

Sea C un campo de números (reales $\mathbf{R}$ o complejos C) (C, +, ·, 0, 1) (II)

I. (V,+) + suma de vectores.

Sean $\bar{a}$, b, $\bar{c}$ $\in$ V

1. $\bar{a} + \bar{b} \in V$ Cerradura en V
2. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ Conmutatividad
3. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ Asociatividad

$\bar{c}$ $\bar{b}$ $\bar{c}$

+(+($\bar{a}$, $\bar{b}$),) = +($\bar{a}$,+(,))

II. Sean α, β, λ ϵ C.

i. α + β ϵ C; α·β ϵ C Cerradura en C
ii. α + β = β + α; α·β = β·α Conmutatividad
iii. (α + β) + λ = α + (β + λ) Asociatividad
 (α·β)λ = α(β·λ)
iv. Unidades o elemento neutro
 $\left.\begin{array}{l} \alpha + 0 = \alpha \\ \alpha \cdot 1 = \alpha \end{array}\right\}$ Por la derecha

(Proposición: Las unidades de un campo con conmutatividad son también por la izquierda)

Prop. 0 + α = α

1 · α = α

Demostración:

0 + α por ii = 0+α = α+0 … (a)

Y por iv = α+0 = α … (b)

Por (a) y (b) = 0+α = α +0 = α → 0+α = α

(En forma similar para 1α=α)

v. Inversos .

+) $\exists! -\alpha \in C$, tal que $\alpha+(-\alpha)=0$ Por la derecha

*) $\forall\ \beta \in C \setminus \{0\}$, $\exists!\ B^{-1}$ tal que $\beta(\beta^{-1})=1$

(En forma similar en C conmutativo son por la izquierda)

Resolución de ecuaciones.

$5+x=0$ $\quad$ $5+(-5)= 0$ $\quad$ $\therefore\ x=-5$

vi. Distributibidad de · sobre +

$$\alpha(\beta+\lambda) \underset{\text{Factorización}}{\overset{\text{Expandir}}{\rightleftarrows}} \alpha\beta + \alpha\lambda$$

I, II. (V,+) (C,+,·,0,1). Si $\forall\ \lambda \in C$, $\forall \bar{v} \in V$

III. $\lambda \bar{v} \in V$

Proposición $\exists\ \bar{0} \in V$

Demostración por III para $\lambda=0$, $\bar{v} \in V$

Se tiene $0\bar{v} \in V$

El $\bar{0}$ debe cumplir que $\forall \bar{v} \in V$, $\exists -\bar{v} \in V$ tal que $\bar{v}+(-\bar{v})= \bar{0}$

Y esto se cumple porque $\bar{v}+(-\bar{v})= 1\cdot \bar{v}+(-1)\bar{v}= (1+(-1))\bar{v}= 0\bar{v}$

Además $\bar{v}+\bar{0}= 1\cdot \bar{v}+0\cdot \bar{v}= [1+0]\bar{v}= 1\cdot \bar{v}= \bar{v}$

LINEALIDAD.

$\bar{a}$

$\bar{a}+\bar{a} = 2\bar{a} = (1+1)$

$\bar{a}$

$\lambda\bar{a} + \beta\bar{a} = (\lambda+\beta)$

Interpretación geométrica

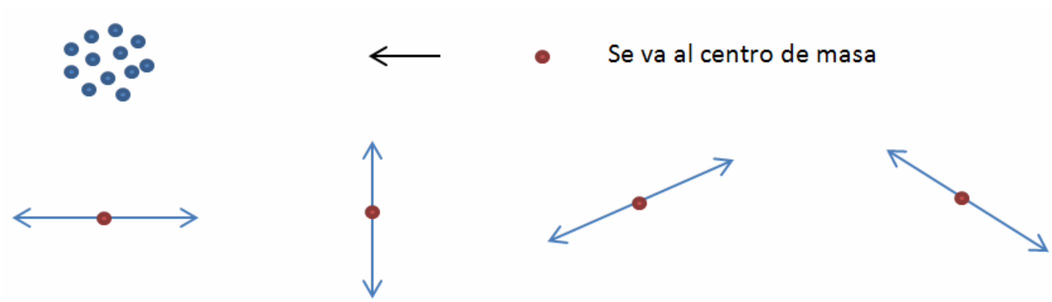
Dirección (depende de un origen) y magnitud (tamaño, peso y cantidad)

PRINCIPIO DE TRASLACIÓN DE VECTORES.

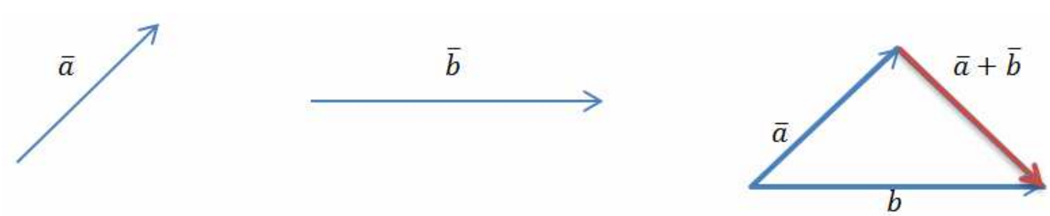
Los vectores se pueden trasladar a una referencia cualesquiera sin alterar su magnitud y dirección. Dicha traslación obedece al sentido común, diagrama de fuerzas del objeto o resolución de un problema.

¿Cuál es la dirección del $\bar{\mathbf{0}}$?

Dado un sistema de una partícula a un cúmulo de partículas distantes, el vector de atracción de estos se dirige al centro de masa del cúmulo.



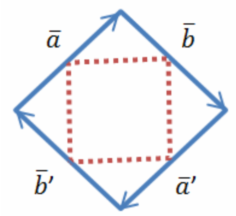
∴ El cero es un vector que tiene todas las direcciones



mal el diagrama

Cualesquiera dos fuerzas que apunten al cúmulo forman un triángulo isósceles y éste triángulo coincide con el centro de masa.

Dado un sistema cerrado de 2 vectores, los puntos medios forman un rombo.



$\bar{b}$ = -$\bar{b}'$ $\qquad$ $\bar{x} = \frac{\bar{b}'}{2} + \frac{\bar{a}}{2}$

$\bar{a}$ = -$\bar{a}'$ $\qquad$ $\bar{y} = \frac{\bar{b}}{2} + \frac{\bar{a}'}{2}$

Un conjunto V es un campo C, forman un espacio vectorial si:

$\bar{b}$

$\forall$ $\bar{a}$, $\quad\in$ V $\qquad \forall$ α,β ϵ C

$\bar{a}$

α$\bar{a}$ + β$\bar{b}$ ϵ V $\quad$ (α+β) $\qquad$ $\bar{0}$ ϵ V

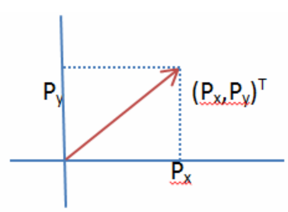
Un conjunto SCV de un sub-espacio vectorial si S es un conjunto vectorial

Ejemplos de espacios vectoriales:

$\mathbf{R}^2 = \left\{ \binom{x}{y} \middle| x, y \in \mathbf{R} \right\}$

$\lambda \in \mathbf{R},\ P = \binom{P_x}{P_y}$

$\lambda P = (\lambda P_x, \lambda P_y)^T$



$\sqrt{P_x^2 - P_y^2} = m$

mas

1.- $\binom{0}{0} \in \mathbf{R}^2$

2.- $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \cdot)$ Sea $\mathbf{P} = \binom{\mathbf{P_x}}{\mathbf{P_y}}$, $\mathbf{q} = \binom{\mathbf{q_x}}{\mathbf{q_y}}$

αP + βq = $\binom{\propto P_x}{\propto P_y} + \binom{\beta q_x}{\beta q_y} = \binom{\propto P_x + \beta q_x}{\propto P_y + \beta q_y} \in \mathbf{R}^2$

$\therefore$ $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \cdot)$ Es un espacio vectorial

Para $\mathbf{R^n}$ $(\mathbf{R^n}, \mathbf{R}, +, \cdot)$, $\mathrm{P} \in \mathbf{R^n}$ $\quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} + \mathbf{q} = \begin{pmatrix} P_1 + q_1 \\ P_2 + q_2 \\ \vdots \\ P_n + q_n \end{pmatrix}$

$\therefore$ $(\mathbf{R^2}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ También es un espacio vectorial.

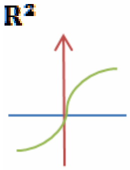
Si tenemos un espacio vectorial, con n componentes, pero sólo con P_1 y $P_2 \neq 0$ y $P_3, P_4, \ldots, P_n = 0$

$$\mathbf{R^2} \in \mathbf{R^n}, \qquad \mathbf{R^2} = \left\{ \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, P_1, P_2 \in \mathbf{R} \right\} \Rightarrow \mathbf{R^2}$$

R2 contenido en Rn

Es un espacio vectorial de $\mathbf{R^n}$, pero $\mathbf{R^n} \neq \mathbf{R^2}$

Una recta que pasa por el origen es un espacio vectorial y es un sub-espacio de $\mathbf{R^2}$



Una recta que pasa por el origen es un espacio vectorial, en el plano hay n espacios vectoriales.

Un plano que pasa por el origen es un espacio vectorial y es un sub-espacio de $\mathbf{R^4}, \mathbf{R^5}, \ldots, \mathbf{R}^n$. (Hiperplanos > 3 dimensiones).

A⊂$\mathbf{R}^n x \mathbf{R}^n$ $\qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\qquad$ Matrices $\mathbf{M^{nxm}}$

$\mathbf{B} \in \mathbf{M^{nxm}}$ $\qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Matrices de mxn

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \qquad \lambda\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $(\mathbf{M}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ Es un espacio vectorial.

Sea $\mathbf{P}$ el conjunto de los polinomios

$\mathbf{P} = \{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 | a \in \mathbf{R}, i = 0, \ldots, n\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}\}$

P, q $\in \mathbf{P}$, $\mathbf{q(x)} = a'_n x^n + \cdots + a'_0$

$\mathbf{p(x)} + \mathbf{q(x)} = (a_n + a'_n)x^n + (a_{n-1} + a'_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + a'_1)x + a_0 + a'_0 \subset \mathbf{P}$

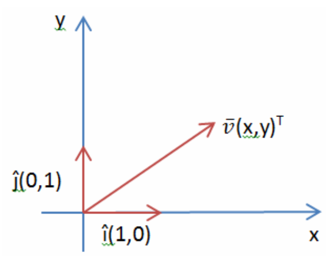
$\lambda \mathbf{p(x)} = \lambda a_n x^n + \lambda a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lambda a x + \lambda a_0$

y el polinomio cero: $0 = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \in \mathbf{P}$

$(\mathbf{P}, \mathbf{R}, +, \cdot)$ Espacio vectorial para todos los polinomios (de dimensión infinita).

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL.

Es un conjunto de vectores que se pueden describir linealmente independientes $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \cdot)$



$\Rightarrow \bar{v} = (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$

î y ĵ cumplen con ser LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Ejemplo: î=(1,0); ŵ=(2,0)

$\lambda_1\hat{\imath}+\lambda_2\hat{w}$ $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1/2$ $\lambda'_1 = -1$ $\lambda'_2 = 1/2$

$\lambda_1\hat{\imath}+\lambda_2\hat{w} = 1(1,0)^T+(-1/2)(2,0)^T = (1,0)^T+(-1,0)^T = (0,0)^T$

$\lambda'_1\hat{\imath}+\lambda'_2\hat{w} = -1(1,0)^T+(1/2)(2,0)^T = (-1,0)^T+(1,0)^T = (0,0)^T$

Luego î y ŵ no son linealmente independientes

Una base debe ser:

- Linealmente independientes.
- Generan a todos los vectores del espacio vectorial.

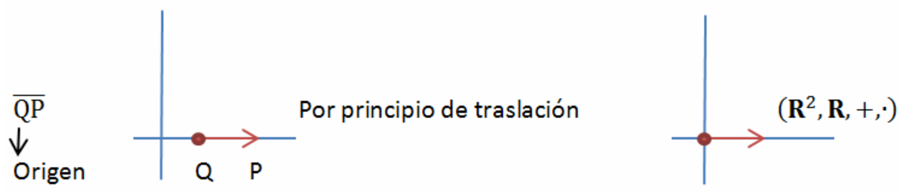
verificando que son base

Î y ĵ

1.- $\lambda_1 \binom{1}{0} + \lambda_2 \binom{0}{1} = \binom{0}{0}$ $\quad \begin{matrix} \lambda_1 + 0 = \\ 0 + \lambda_2 = \end{matrix} \binom{0}{0}$ $\quad \lambda_1=0, \lambda_2=0$

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$

$\therefore$ î y ĵ son linealmente independientes, más aún son base de $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}, +, \cdot)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$



Base de E(-E, C, +, ·)

B=$\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots\}$ $\overline{v}_i$ son L.I. $\left\{ i.e.\, \overline{0} = \sum_{i=1} \lambda_i \overline{v}_i, \lambda_i = 0, \forall_i \text{ es la única solución} \right\}$

L(B)=E, donde L son todas las combinaciones lineales de los elementos de B.

Dimensión: D(E)=$|\mathbf{B}|$, $|\cdot|$ cardinalidad del conjunto (número de elementos del conjunto.

La dimensión de un espacio vectorial es la cardinalidad de una base de este.

B2={(1,1),(-1,1)} base de R2

Tensores.

Arreglos de matrices, desde n=1, hasta n=p

Vectores $\overline{u} \in \mathbf{R}^n$ $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ D$(\mathbf{R}^n) = |\{\hat{\imath}, \hat{\imath}_2, \ldots, \hat{\imath}_n\}| = n$

Matrices $\overline{v} \in \mathbf{R}^{nxm}$ $\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix}$ D$(\mathbf{R}^{nxm}) = n \cdot m$

Tensores $\overline{t} \in \mathbf{R}^{nxmxp}$ $\begin{pmatrix} t^1{}_{11} & \cdots & t^1{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^1{}_{n1} & \cdots & t^1{}_{nm} \end{pmatrix}$ D$(\mathbf{R}^{nxmxp}) = n \cdot m \cdot p$

$\begin{pmatrix} t^p{}_{11} & \cdots & t^p{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^p{}_{n1} & \cdots & t^p{}_{nm} \end{pmatrix}$

Propiedades.

$\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathbf{R}^4$ $(\lambda + \mu)\overline{u}_1 = \lambda\overline{u}_1 + \mu\overline{u}_1$ Existe el tensor nulo

Ejemplo de suma de tensores $\bar{t}, \bar{z} \in \mathbf{R}^{nxmxp}$

$$\begin{pmatrix} t^{1}{}_{11} & \cdots & t^{1}{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{1}{}_{n1} & \cdots & t^{1}{}_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{1}{}_{11} & \cdots & z^{1}{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{1}{}_{n1} & \cdots & z^{1}{}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^{2}{}_{11} & \cdots & t^{2}{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{2}{}_{n1} & \cdots & t^{2}{}_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{2}{}_{11} & \cdots & z^{2}{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{2}{}_{n1} & \cdots & z^{2}{}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^{p}{}_{11} & \cdots & t^{p}{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{p}{}_{n1} & \cdots & t^{p}{}_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{p}{}_{11} & \cdots & z^{p}{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{p}{}_{n1} & \cdots & z^{p}{}_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{1}{}_{11} + z^{1}{}_{11} & \cdots & t^{1}{}_{1m} + z^{1}{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{1}{}_{n1} + z^{1}{}_{n1} & \cdots & t^{1}{}_{nm} + z^{1}{}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} t^{p}{}_{11} + z^{p}{}_{11} & \cdots & t^{p}{}_{1m} + z^{p}{}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{p}{}_{n1} + z^{p}{}_{n1} & \cdots & t^{p}{}_{nm} + z^{p}{}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\bar{t} + \bar{z} - \left(t^{k}{}_{ij} + z^{k}{}_{ij}\right) \qquad i - 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

$$k = 1, 2, \dots, p$$

$\therefore$ Los espacios tensoriales también son espacios vectoriales.

Fin de clase

==