PRIMER EXAMEN DEPARTAMENTAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II, 15:00 A 16:30, Grupo: CTG81

Trimestre 10-I. Febrero 8 de 2011.

(1)(15%). Calcular la derivada de la función

$$h(x) = \sqrt[3]{\arctan(e^{-2x}-1)} + \ln^2(5x^2+\sin(x))$$

RESPUESTA:

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{\arctan(e^{-2x}-1)} + \ln^2(5x^2+\sin(x))\right) =$

$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\arctan(e^{-2x}-1)} + \frac{d}{dx}\ln^2(5x^2+\sin(x))$. Las calculamos por separado (1) y (2):

(1) $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\arctan(e^{-2x}-1)} = \frac{d}{dx}\left(\arctan(e^{-2x}-1)\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\arctan(e^{-2x}-1)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}\arctan(e^{-2x}-1) =$

$\frac{1}{3}\left(\arctan(e^{-2x}-1)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{1+(e^{-2x}-1)^2}\frac{d}{dx}(e^{-2x}-1) = \frac{1}{3}\left(\arctan(e^{-2x}-1)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{1+(e^{-2x}-1)^2}\left(-2e^{-2x}\right) =$

$-\frac{2}{3}\left(\arctan(e^{-2x}-1)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{e^{-2x}}{1+(e^{-2x}-1)^2}$

Otra factorización es

$-\frac{2}{3}\left(\arctan(e^{-2x}-1)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{e^{-2x}}{1+(e^{-2x}-1)^2} = \frac{2}{3}\left(\left(\arctan\left(e^{-2x}-1\right)\right)^{\frac{1}{3}}\right)\frac{e^{-2x}}{(\arctan(e^{-2x}-1))(2e^{-2x}-e^{-4x}-2)}$
is true

(2) $\frac{d}{dx}\ln^2(5x^2+\sin(x)) = 2\left(\ln\left(\sin x+5x^2\right)\right)\frac{10x+\cos x}{\sin x+5x^2}$

Por tanto

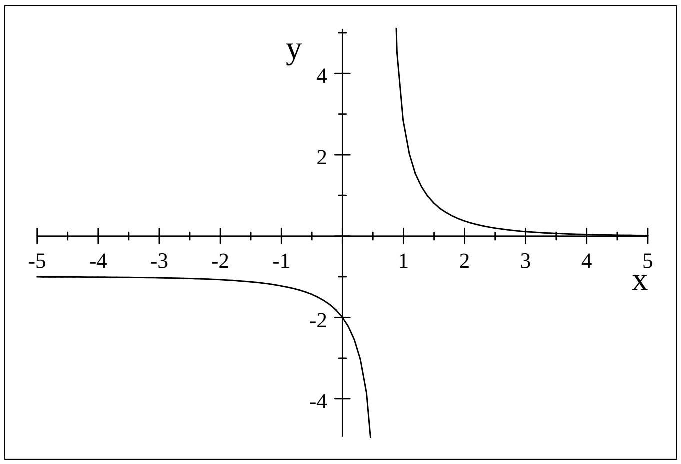
$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{\arctan(e^{-2x}-1)} + \ln^2(5x^2+\sin(x))\right) =$

$-\frac{2}{3}\left(\arctan(e^{-2x}-1)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{e^{-2x}}{1+(e^{-2x}-1)^2} + 2\left(\ln\left(\sin x+5x^2\right)\right)\frac{10x+\cos x}{\sin x+5x^2}$

(2)(20%). Determinar algún intervalo en donde la función $f(x) = \frac{2}{e^x-2}$ tenga inversa, determinar una expresión para ella y calcular $(f^{-1})'(\frac{2}{e-2})$, sabiendo que $f(1) = \frac{2}{e-2}$.

RESPUESTA.

$f(x) = \frac{2}{e^x-2}$



De la gráfica se nota que es discontinua en $\ln 2$.

1) Es monotona decreciente en $x < \ln 2. = 0.693\,15$ Por tanto invertible.

2) Es monotona decreciente en $x > \ln 2$. Por tanto invertible.

Cálculo de $(f^{-1})'(\frac{2}{e-2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}((\frac{2}{e-2})))} = \frac{1}{f'(1)}$

$f(x) = \frac{2}{e^x-2}$, $f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{2}{e^x-2} = -2\frac{e^x}{(e^x-2)^2}$

$f\prime(1) = -2\frac{e^1}{(e^1-2)^2}$

$(f^{-1})'(\frac{2}{e-2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}((\frac{2}{e-2})))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-2\frac{e^1}{(e^1-2)^2}} = -\frac{1}{2}e^{-1}\,(e-2)^2$

(3)(15%). Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-3x}}{\frac{1}{3}x^3}$

RESPUESTA.

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-3x}}{\frac{1}{3}x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+3e^{-3x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x-9e^{-3x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+27e^{-3x}}{2} = \infty$

(4) (**30%**) La curva *catenaria* tiene la siguiente ecuación:

$$y\left(x\right)=\frac{a}{2}\left[e^{x/a}+e^{-x/a}\right]$$

donde a es la longitud de la cuerda.

1. Verificar las igualdades $y=a^2\frac{d^2y}{dx^2}$ y $y=a^4\frac{d^4y}{dx^4}$.

   RESPUESTA.

   $\frac{d^2}{dx^2}y=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{a}{2}\left[e^{x/a}+e^{-x/a}\right]=\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\left[e^{x/a}-e^{-x/a}\right]=\frac{1}{2a}\left[e^{x/a}+e^{-x/a}\right]=\frac{a}{2a^2}\left[e^{x/a}+e^{-x/a}\right]=\frac{1}{a^2}y$. De donde $y=a^2\frac{d^2}{dx^2}y$.

   $\frac{d^4}{dx^4}y=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{1}{2a}\left[e^{x/a}+e^{-x/a}\right]=\frac{d}{dx}\frac{1}{2a^2}\left[e^{x/a}-e^{-x/a}\right]=\frac{1}{2a^3}\left[e^{x/a}+e^{-x/a}\right]=\frac{a}{2a^4}\left[e^{x/a}+e^{-x/a}\right]=\frac{1}{a^4}y$. De donde $y=a^4\frac{d^4}{dx^4}y$.

2. Hallar el punto mínimo de la curva y explique porque es un mínimo.

   RESPUESTA.

   $\frac{d}{dx}y=\frac{d}{dx}\frac{a}{2}\left[e^{x/a}+e^{-x/a}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{x/a}-e^{-x/a}\right]$.

   $\frac{1}{2}\left[e^{x^*/a}-e^{-x^*/a}\right]=0$, por tanto $e^{x^*/a}=e^{-x^*/a}$, $x^*=0$.

   Y como $y(0)=a>0$ y $\frac{d^2y}{dx^2}|_{y=0}=\frac{y(0)}{a^2}=\frac{1}{a}>0$. El criterio de la segunda derivada significa que $x^*=0$ es un punto mínimo, con $y(0)=a$.

3. Determinar los intervalos de monotonia.

   RESPUESTA.

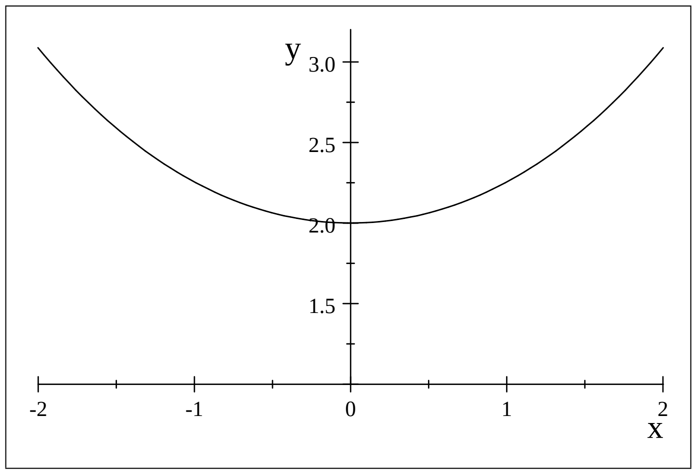
   En $(-\infty,0]$ es monotona decreciente, el signo de $\frac{d}{dx}y=\frac{1}{2}\left[e^{x/a}-e^{-x/a}\right]<0$.

   En $[0,\infty)$ es monotona creciente, el signo de $\frac{d}{dx}y=\frac{1}{2}\left[e^{x/a}-e^{-x/a}\right]>0$.

4. Con $a = 2$, graficar la catenaria en el intervalo $[-2, 2]$.

   RESPUESTA.

   La gráfica de $y(x) = \left[e^{x/2} + e^{-x/2}\right]$ en $[-2, 2]$ es



(5) Calcular

$$a)(\mathbf{10}\%)\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\sqrt{2+t^2}\,dt; \qquad\qquad b)(\mathbf{10}\%)\int\frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}}\,dx$$

5.a) **RESPUESTA**

$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{d}{dx}\left[F(\sin x) - F(0)\right] = \frac{d}{dx}\left[F \circ \sin\right](x) - \frac{d}{dx}F(0) =$ (derivada de una función compuesta)

$F'(\sin x)\frac{d}{dx}\sin x = f(\sin x)\frac{d}{dx}\sin x = \sqrt{2 + (\sin x)^2}\ (\cos x)$

5.b) **RESPUESTA.**

$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}}\,dx$, tomando $u = 4 + x^3$, se tiene que $du = 3x^2dx$. Por tanto $dx = \frac{du}{3x^2}$

$= \int \frac{x^2}{\sqrt{u}}\frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{3\left(-\frac{1}{2}+1\right)} + C = \frac{\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{4+x^3} + C$