1er examen parcial de Introducción al Álgebra Lineal

Profesor: Carlos Barrón Romero
SOLUCION
Todos los problemas son obligatorios y sus repuestas deben ser de manera individual.

1. **(2.0)** Sea el espacio vectorial $(E, \mathbb{R}, +, \cdot)$ donde E es un conjunto no vacio, $\mathbb{R}$ son los numeros reales, $+ : E \times E \rightarrow E$ y $\cdot : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$. Explique o demuestre.

   Se tiene que para cualesquiera escalares $a, b \in \mathbb{R}$ y para cualesquiera vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \in \dot{E}$.Entonces, $\overrightarrow{0} \in E$.

   Respuesta.

   Tomando $a = b = 0$ y un vector cualesquiera $\overrightarrow{u} \in E$, el vector nulo se escribe como una combinación lineal, o sea, $\overrightarrow{0} = (0+0)\overrightarrow{u} = 0\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{u} \in E$, por tanto $\overrightarrow{0} \in E$

   Otra forma.

   Tomando $a = b = 0$ y para cualesquiera vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, el vector nulo se escribe como una combinación lineal, o sea,

   $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v} \in E$, por tanto $\overrightarrow{0} \in E$.

   ==

2. (1.**0**) Sea $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Encuentre una descripción de los espacios columna y fila, es decir, encuentre vectores que generen los espacios $Col(H)$ y $Fil(H)$.

   RESPUESTA.

   $$Col(H) = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

   $$Fil(H) = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

   ==

3. (2.**0**)**.** Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ Encuentre una base para los espacios columna, fila y nulo de B, es decir encuentre un conjunto de vectores L.I. que generen los espacios $Col(B), Fil(B)$ y $Nul(B)$. Y explique porque se cumple el Teorema del Rango.

   RESPUESTA.

Triangularizando B se obtiene la respuesta.

1. $$Col\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

   $$Fil\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

   Resolviendo $Bx = 0$ se obtiene la respuesta.

   $$Nul\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\alpha \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\} =$$

   $$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 = 14x_2 \text{ y } x_3 = 4x_2\right\}$$

   Y se cumple el Teorema del Rango ya que $3 = Dim(Col(B)) + Dim(Nul(B)) = 2 + 1 = 3$

   ==

2. **(1.0).** Explique su respuesta. ¿Es posible o no construir un polinomio de grado menor o igual a 5 que pertenezca a la envolvente lineal $L\left(1, 2x, x-2x^2\right)$?

   RESPUESTA.

   Si, por ejemplo $p(x)=1$ (corresponde con la combinación linea $p(x)=1\,(1)+0\,(2x)+0\left(x-2x^2\right)$

   ==

3. **(1.0).** Explique su respuesta, ¿la envolvente lineal $L\left(1, 2x^2\right)$ genera todos los polinomios sin termino ax y con grado menor o igual a dos? o sea los polinomios que no tienen el termino ax donde $a \in \mathbb{R}$. Sugerencia demuestre que $5x \notin L(1, 2x^2)$ y que $1, 2x^2$ son L.I.

   RESPUESTA.

   Como $\alpha 1+\beta 2x^2=0$,tiene como única solucion $\alpha=0, \beta=0$, los polinomios 1 y $2x^2$son L.I. y son una base de la envolvente lineal $L\left(1, 2x^2\right)$.

   Por otro lado, como no existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales $c1+d2x^2=5x$, o sea $5x$ no es combinación lineal de los polinomios 1 y $2x^2$, es decir $5x \notin L(1, 2x^2)$.

   En general $c1+d2x^2 \neq ax$, ya que c y d,no corresponden para el termino "ax". Es decir, todos los polinomios de $L(1, 2x^2)$ no tienen termino ax. El grado es a lo mas 2 por el polinomio $2x^2$ de la base.

   ==

4. **(2.0)** Sean $\overrightarrow{u}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.Explique su respuesta, a) Encuentre un vector en $L(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, b) Explique porque el vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \notin L(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

   RESPUESTA.

   a)

   $1\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in L(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \notin L(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ porque no corresponde para los escalares 1,1.

   O de otra forma, los vectores de $L(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tienen la forma $\begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha-\beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}$, y se nota que $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ no es de esta forma, el 2 del reglon 2 columna 2 debería ser cero.

   ===

5. **(2.0).** Demuestre o explique su respuesta, ¿es $(F, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un espacio vectorial? donde F es el conjunto de las funciones acotadas o sea $F=\{f | f:[a,b] \to \mathbb{R}$, tales que para todo $x \in [a,b]$, $|f(x)|<\infty\}$ (note que las funciones pueden ser continuas o discontinuas y tomar cualquier valor real finito positivo o negativo), $\mathbb{R}$ son los números reales, $+: F \times F \to F$ $((f+g)(x)=f(x)+g(x))$ y $\cdot: \mathbb{R} \times E \to E$ $((\lambda f)(x)=\lambda f(x))$. Sugerencia: Utilice la siguiente desigualdad: Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene $|x+y| \leq |x|+|y|$

   RESPUESTA.

   0 la función nula está en F, ya que $|0|<\infty$.

   Sean cualesquiera escalares $a, b \in \mathbb{R}$ y para cualesquiera funciones acotadas $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} \in F$,se tiene $\left(a\overrightarrow{f}+b\overrightarrow{g}\right)(x)=\left(a\overrightarrow{f}\right)(x)+\left(b\overrightarrow{g}\right)(x)=a\left(\overrightarrow{f}(x)\right)+b\left(\overrightarrow{g}(x)\right)$.

   Usando la sugerencia, se tiene que$\left|\left(a\overrightarrow{f}+b\overrightarrow{g}\right)(x)\right| \leq \left|a\left(\overrightarrow{f}(x)\right)\right|+\left|b\left(\overrightarrow{g}(x)\right)\right|=|a|\left|\overrightarrow{f}(x)\right|+|b|\left|\left(\overrightarrow{g}(x)\right)\right|<\infty$, ya que $|a|\left|\overrightarrow{f}(x)\right|, |b|\left|\left(\overrightarrow{g}(x)\right)\right|$ son valores acotados.

   Por tanto $\left(a\overrightarrow{f}+b\overrightarrow{g}\right) \in F$. Como es una combinación lineal arbitraria, esto comprueba que $(F, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.