Aclaración del ejemplo de clase

Encontrar los valores y vectores propios de

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) Valores propios. Se obtienen del polinomio caracteristico, el cual se obtiene de la ecuación caracteristica de su determinante.

$$0 = \left|\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right| =$$

$$(4-\lambda)\left|\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right| = (4-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) =$$

$$(4-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2) = (\lambda-4)(\lambda-2)^2.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$.

2) Vectores propios. Se tienen dos valores propios y dos sistemas de ecuaciones para determinar dos vectores propios:

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se resuelve para $\lambda_1 = 4$, se tiene

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & 3-4 & -1 \\ 0 & 1 & 1-4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$. de donde se obtienen

$-4z = 0$, $-y - z = 0$. O sea, de $-4z = 0$, se tiene $z = 0$. Sustituyendo en $-y - z = 0$, se tiene $-y - 0 = 0, y = 0$. O sea $y = 0$ y $z = 0$.

Note que x es libre ya que $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y = 0,\ z = 0,\ x \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = L(\bar{e}_1).$$ Sea $\bar{p}_1 = \bar{e}_1$.

Es decir, el vector propio es $\bar{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, o sea

$$P\bar{p}_1 = \lambda_1\bar{p}_1.$$

Se resuelve para $\lambda_2 = 2$, se tiene

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 0 & 0 \\ 0 & 3-2 & -1 \\ 0 & 1 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, de donde

$2x = 0$, $y - z = 0$. O sea $x = 0$ y $y = z$.

Note que $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, y = z \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\} =$

$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = L(\bar{p}_2)$. Donde $\bar{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comprobación de que $\bar{p}_2$ es el vector propio de λ_2.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$, o sea

$$P\bar{p}_2 = \lambda_2\bar{p}_2.$$

Finalmente note que $dim(L(\bar{p}_1,\bar{p}_2)) = 2$.