EJERCICIOS 6(B)

Parte A: (Preguntas de respuesta breve)

1. ¿Qué es la inducción matemática? ¿De qué manera es útil?
2. Enuncie el principio de inducción matemática.
3. ¿Cuáles son los pasos básico e inductivo en la inducción matemática?
4. Enuncie la forma fuerte del principio de inducción matemática.
5. ¿Qué es el principio del buen orden? Enúncielo utilizando la inducción matemática.
6. Utilice la inducción matemática para demostrar que $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
7. Emplee la inducción matemática para demostrar que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$.
8. Utilice la inducción matemática para demostrar que $n < 2^n$, para todos los enteros positivos n.
9. Encuentre una fórmula para la suma de los primeros n pares enteros positivos y demuéstrela por inducción.
10. ~~Defina una relación de recurrencia. ¿Qué entiende usted por su solución?~~
11. ~~Defina una relación de recurrencia lineal. ¿Qué se entiende por el grado de una relación de este tipo?~~
12. ~~¿Cuándo se dice que una relación de recurrencia es homogénea o no homogénea?~~
13. ~~Defina la ecuación característica y el polinomio característico de una relación de recurrencia.~~
14. ~~¿Qué entiende por una solución particular de una relación de recurrencia?~~
15. ~~Defina la solución generadora de una secuencia y proporcione un ejemplo.~~
16. ~~¿Cómo empleará usted la noción de función generadora para resolver una relación de recurrencia?~~

Parte B

Demuestre por inducción matemática los siguientes resultados:

17. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
18. $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot n(n+1)}{2}$.

19. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2$.

20. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

21. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n-1) \cdot 2n = \frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$.

22. $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

23. $$\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}.$$

24. $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{r^2}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

Demuestre por inducción matemática las siguientes desigualdades cuando $n \in \mathbf{Z}^+$.

25. $n < 2^n$, para $n \geq 1$.

26. $n^2 < 2^n$, para $n > 4$.

27. $2^n < n^3$, para $n \geq 10$.

28. $2^n < n!$ para $n > 3$.

29. $2^n \geq (2n+1)$, para $n \geq 3$.

30. $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \geq \dfrac{1}{2n}$, para $n \geq 1$.

Demuestre por inducción matemática los siguientes resultados cuando $n \in Z^+$.

31. $n^3 - n$ es divisible por 6.

32. $n^5 - n$ es divisible por 5.

33. $5^n - 1$ es divisible por 4.

34. $8^n - 3^n$ es divisible por 5.

35. $5^{2n} - 2^{5n}$ es divisible por 7.

36. $10^{n+1} + 10^n + 1$ es divisible por 3.

37. $6 \times 7^n - 2 \times 3^n$ es divisible por 4.