112023 MATEMATICAS DISCRETAS PARA LA COMPUTACION UAM Azcapozalco 1
Docente: Dr. Carlos Barrón Romero

18 de octubre de 2011

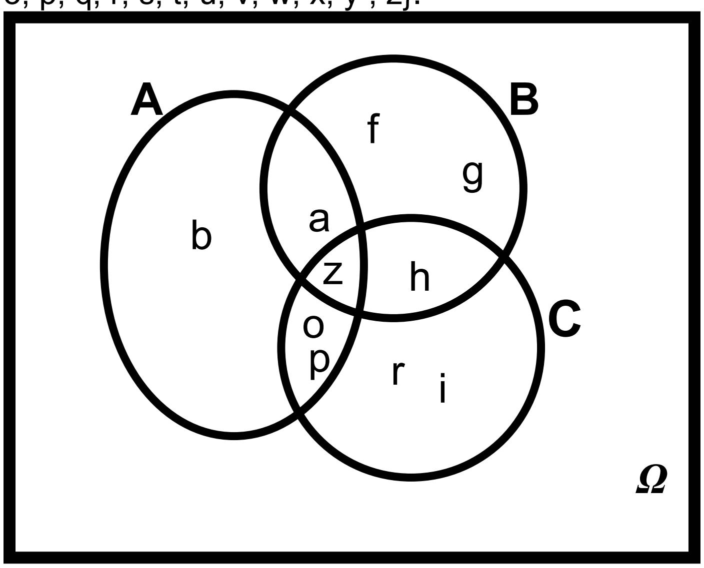
SOLUCIÓN

Instrucciones. El marco de sus respuestas son los objetivos de la UEA que transcribo a continuación:

1. Usar la inducción matemática en la resolución de problemas relacionados con la computación:
2. Aplicar los principios de combinatoria en la elaboración de programas de cómputo.
3. Diseñar búsquedas en conjuntos dotados de una relación de orden.
4. Usar gráficas para modelar problemas.

Responda en forma resumida, note que su respuesta debe los objetivos de la UEA, use el sentido común y describa con claridad el desarrollo de su solución. El valor de cada pregunta está entre "[", "]".

En el siguiente diagrama de Ven, el universo de discurso es Ω = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y , z}.



Calcule y escriba los conjuntos resultantes o las operaciones para obtener el conjunto dado:

1. [0.5] $(A\cap B\cap C)\cup C$ = {i,h,r,o,p,z} = C

2. [0.5] $(A\Delta B)\cup(A\Delta C)$={b,o,p,f,g,h}$\cup${a,b,i,h,r}={a,b,f,g,h,i,o,p,r}

3. [0.5] {z}=$(A\cap B\cap C)$

4. [0.5] $A^c\cap B^c\cap C^c\cap \Omega^c = \phi$.

5. [0.5] Explique porque la diferencia de conjuntos es no conmutativa.

RESPUESTA.
Si se invierten los conjuntos no da el mismo resultado para cualesquiera conjuntos. Por ejemplo, $A\backslash\phi=A$ pero $\phi\backslash A=\phi$.

6. [0.5] Explique si se cumple que: $\phi\subset P(\phi)$, donde ϕ es el conjunto vacío y $P(\phi)$ es el conjunto potencia de ϕ.

RESPUESTA.
Es cierto porque ϕ tiene la propiedad de ser subconjunto de cualquier conjunto.

7. [1.0] Explique si se cumple que: A⊂P(A), donde A≠ ϕ y P(A) es el conjunto potencia de A.

RESPUESTA.

No es posible, porque P(A) tiene como elementos conjuntos de elementos de A, no elementos de A. Por Ejemplo A={**1**}, P(A)={ϕ, {**1**} }={ϕ, A}, y es claro que el elemento **1** de A no esta en P(A) (lo que está es {**1**} que es diferente de **1**.

8. [2.0] Sean los conjuntos, A = {1}, B = {1,2}, C = {2,4,3}, D = {5}, aplique el Principio de Inclusión y Exclusión para calcular |A∪B∪C∪D|.

RESPUESTA.

|A∪B∪C∪D| = |A|+|B|+|C|+|D| - (|A∩B| + |A∩C| + |A∩D| + |B∩C| + |B∩D| + |C∩D|) + |A∩B∩C| + |A∩B∩D| + |A∩C∩D| + |B∩C∩D| - |A∩B∩C∩D|
= 1 + 2 + 3 + 1 – (1 + 0 + 0 + 1 +0 + 0) + 0 + 0 + 0 + 0 - 0= 7 – 2 = 5.

9. [1.0] Explique porque en la combinación de dos conjuntos de la demostración del Principio de Inclusión y Exclusión se cumple que .

$$\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|+\sum_{1\le i_1\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{n+1}\right|=\sum_{1\le i_1<i_2\le n+1}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right|.$$ Sugerencia $\binom{n}{2}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}$

RESPUESTA.

Como $\binom{n}{2}+\binom{n}{1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$, se trata de una suma de combinaciones del Triángulo de Tartaglia, que corresponde a suma de coeficientes del Binomio de Newton o sea a la suma de Combinaciones del renglón n al (n+1) de la forma $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$.

10. [2.0] Sea, Ω el conjunto de las letras del alfabeto latino, X = { x ∈ Ω| x no es una consonante} y V = { a, e, i, o, u }, demuestre que X = V.

RESPUESTA.

Para que sean iguales, el Axioma de extensión dice que son iguales si y solo si tienen los mismos elementos. Es decir se debe demostrar que a) X⊂V y que b) V⊂X.

a) Sea s∈X, entonces de la definición de X, s no es una consonante de Ω, luego debe ser una vocal, a, e, ,i, o ,u. Por tanto s∈V, es decir, X⊂V.
b) Sea s∈V, entonces de la lista por extensión de V, s es cualesquiera de las letras a, e, ,i, o ,u. Se tiene que s no son consonante de Ω, o sea cumple la definición de X. Por tanto s∈X, es decir, V⊂X.

De lo anterior X = V.

11. [2.0] Sea D = {0, 1, 2, 3, 4}. A) Cuantos letreros de tres dígitos de D se pueden construir. B) Cuantos letreros diferentes de tres dígitos de D se pueden construir. C) A) Cuantos letreros diferentes de menos de tres dígitos de D se pueden construir

RESPUESTA.

A) $5*5*5=5^3 = 125$
B) $P^5{}_3 = 5*4*3 = 60$
C) $P^5{}_2 + P^5{}_1 = 5*4 + 5 = 25$

12. [2.0] .Demuestre que $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.
RESPUESTA.
Paso base.
$1=1^2=1$
Paso de inducción.
Se supone que $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ es la suma de los impares hasta n.
Sea la suma de los impares hasta el (n+1):
$1+3+5+\ldots+(2n-1) + (2(n+1)-1) = n^2 +(2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 2 - 1 = (n+1)^2$. O sea se obtiene una fórmula similar pero hasta (n+1): $1+3+5+\ldots+(2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$.

13. [2.0] .De cuantas formas se pueden formar conjuntos de 4 objetos. de un conjunto de 15 objetos. Si los objetos son letras, A) ¿es 4! la razón de los letreros de 4 letras diferentes entre los conjuntos de cuatro letras? B) ¿Si el numero de objetos es n, la razón sigue siendo 4!?. Explique sus respuestas.

RESPUESTA.

El numero de conjuntos se calculan como combinaciones $\binom{15}{4} = \frac{15!}{(15-4)!4!}$.

A) Si son letras y se trata de letreros diferentes se calculan como permutaciones $P_4^{15} = \frac{15!}{(15-4)!}$

Ahora si dividimos los $\frac{P_4^{15}}{\binom{15}{4}} = 4!$

Se comprueba que la razón es 4!.

B) Con $n \geq 4$ se tiene que $\frac{P_4^n}{\binom{n}{4}} = \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{n!}{(n-4)!4!}} = 4!$. Por lo que la razón es 4!.