Breves notas de matemáticas Discretas para la Computación

Algebra de Conjuntos

Inducción Matemática

Carlos Barrón Romero
Departamento de Ciencias Básicas

Oficina: H116
Tel. 5318 9014
cbarron@correo.azc.uam.mx,
Página: http://ce.azc.uam.mx/profesores/cbr
UAM-Azcapotzalco

Álgebra de Conjuntos (1)

1. Identidad (similar a Φ=0 en +, U=1 en *)

   $A \cup \Phi = A$ $\qquad$ $A \cap U = A$

2. Dominación

   $A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap \Phi = \Phi$

3. Idempotencia

   $A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

4. Complemento

   $A \cup A^c = U$ $\qquad$ $A \cap A^c = \Phi$

Álgebra de Conjuntos (2)

5. Doble complemento o Involución

   $A^{cc} = A$

6. Conmutatividad

   $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

7. Asociatividad

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

8. Distributividad

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Álgebra de Conjuntos (3)

9. Absorción

   $A \cup (A \cap B) = A$ $\qquad$ $A \cap (A \cup B) = A$

10. Leyes de Morgan

   $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\qquad$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Clases

Sea A $= \{A_1, .., A_n\}$, donde $\{A_i\}$ es una familia de n conjuntos.

Los A_i son las clases de A si se cumple:

1) $A = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{n} A_i$

2) $A_i \cap A_j = \phi, \forall i, j, 1 \leq i < j \leq n$

Principio de inducción Matemática

Los números naturales son {0, 1 , 2, 3,...}

- La base de los naturales son los axiomas de Peano, de donde se obtiene el **Principio de inducción Matemática**:
  1. Una proposición sobre los números naturales es verdadera para un primer elemento.
  2. (Hipótesis de Inducción) La proposición se supone valida para un n "grande" y se demuestra que se cumple para n+1 (paso de Inducción) .

Entonces la proposición es valida para los números naturales a partir del primer elemento.

Pasos para demostrar por el Principio de inducción

1. Una proposición sobre los números naturales es verdadera para un primer elemento.
2. (Hipótesis de Inducción) La proposición se supone valida para un n “grande”
3. (Paso de Inducción) Se demuestra que se cumple para n+1 .

(se termina ya que entonces la proposición es valida para los números naturales a partir de ese primer elemento).

Ejemplos del uso de la Inducción Matemática

Prop. La cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto finito A es

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

La demostración se da en clase

Ejemplos del uso de la Inducción Matemática

Principio de Inclusión y Exclusión

Prop. Sea $\{A_1, \ldots, A_n\}$ una familia de n conjuntos de cardinalidad finita, i.e. $|A_i| < \infty$. Entonces

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

La demostración se da en clase

Ejemplos del uso de la Inducción Matemática

Prop. Sea $\{A_1,\ldots,A_n\}$ una familia de n clases de

cardinalidad finita, i.e. $|A_i| < \infty$, sea $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

La probabilidad de B se define como

$p(\mathrm{B}) = \frac{|B|}{|A|}, B \subset A.$ Entonces

1) p(A)=1

2) $p(A_{i_1} \bigcup A_{i_2} \ldots \bigcup A_{i_k}) = p(A_{i_1}) + p(A_{i_2}) + \ldots + p(A_{i_k}), 2 \leq k \leq n$

La demostración se da en clase

CBR ®

Casa abierta al tiempo