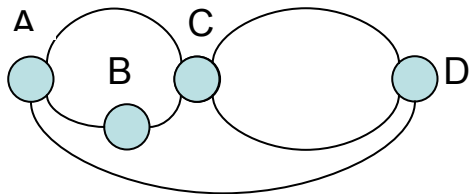


Docente: Dr. Carlos Barrón Romero

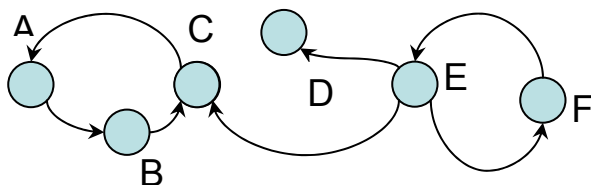
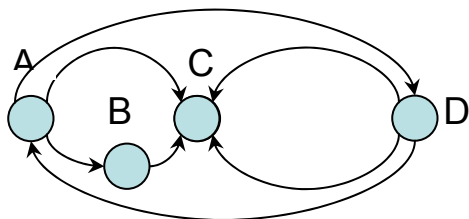
Ejercicios para Grafos

- [2.0] Explique con un modelo de grafos apropiado, como se pueden elegir o seleccionar las materias optativas de acuerdo al gusto de los alumnos de manera que **todos los alumnos tengan al menos una materia optativa para cursar**. Es decir, suponga que cada trimestre se les pide a los alumnos una lista de las materias optativas que les gustaría llevar y con esa información el coordinador designa las materias optativas para todos los alumnos. ¿Es posible elegir un grupo de materias que una cubierta mínima (o sea que cubra a todos los alumnos y que satisfaga que al menos hay una materia al gusto de cada alumno)? Justifique si esto se responde con: **Sea G el grupo de materias. G_m (subconjunto de G) es una cubierta mínima si para todo vértice de G_m , sus aristas (g_k, a_j) [que une el grupo " g_k " lo une con el alumno " a_j "], la unión de los vértices de alumno (o sea todos los " a_j ") es A , donde A es el conjunto de vértices de todos los alumnos.** Explíquelo con un diagrama y un programa o procedimiento para un ejemplo. ¿cuantos pasos se tardaría su programa en verificar esto? (Mi apuesta es que debe ser menor a $|G| \cdot \max \text{grado}(g_k)$ o a $|A| \cdot \max \text{grado}(a_j)$ dependiendo como lo haga).
- [1.0] Dado $G = (V, A)$ con $A \subset V \times V$ ¿bajo que condiciones se satisface la ecuación $d(a, b) + d(b, c) = d(a, c)$? Donde a, b, c están en V y $d(i, j)$ es el no. de aristas de un camino sencillo del vértice i al vértice j o cero si no hay camino entre ellos.

- [3.0] Encuentre los grados y dibuje (o describa por sus aristas) para el siguiente grafo, si es que tiene un camino Euleriano, un ciclo Euleriano, un paseo Hamiltoniano y un ciclo Hamiltoniano. Si no tuviere alguno de los anteriores explique porque no lo tiene.



- [3.0] Encuentre y explique para los siguientes dígrafos, si son fuertemente conexos, débilmente conexos o unilateralmente conexos y escriba sus componentes fuertes, unilaterales y sencillas.



- [1.0] Construya un árbol binario ordenado de altura 5 con números del 1 al 3 y dibuje con flechas a un lado de las aristas de su árbol el recorrido "en orden".

nación de recursos es el siguiente

- p_1 posee el recurso r_4 y requiere r_1 .
- p_2 posee el recurso r_1 y requiere r_2 y r_3 .
- p_3 posee el recurso r_2 y requiere r_3 .
- p_4 posee el recurso r_3 y requiere r_1 y r_4 .

Entonces el grafo de asignación en el instante t es el dado en la Figura 7.22. Obsérvese que este grafo es como un grafo bipartito. Además, si no hay ciclos en el grafo, no hay interbloqueo. En la Figura 7.22, hay un interbloqueo, como podrá verificar el lector.

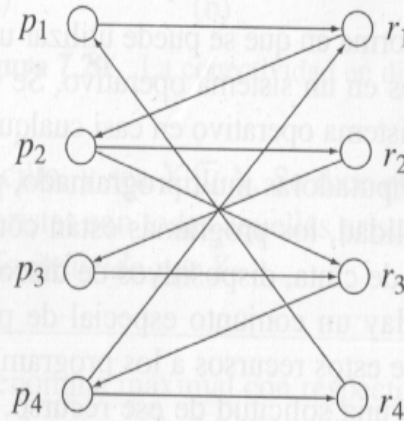


Figura 7.22 Gráfico de asignación para detectar interbloqueos

Problemas 7.3

1. Dar tres caminos elementales que vayan de v_1 a v_3 para el digrafo dado en la Figura 7.23. ¿Cuál es la distancia más corta entre v_1 y v_3 ? ¿Existe algún ciclo en el grafo? ¿Es transitivo el digrafo?

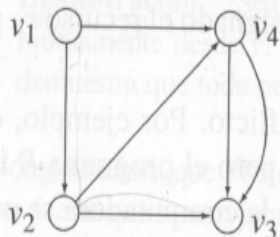


Figura 7.23

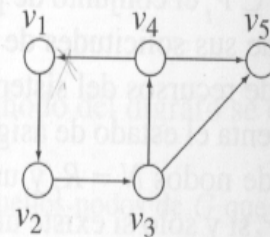


Figura 7.24

2. Calcular todos los grados de entrada y de salida de los nodos del grafo dado en la Figura 7.24. Dar todos los ciclos elementales de este grafo. Obtener un grafo acíclico borrando una arista del digrafo dado. Enumerar todos los nodos que puedan alcanzar cualquier otro nodo del digrafo.

3. Dado un digrafo sencillo $G = (N, A)$, ¿bajo qué condiciones se satisface la ecuación

$$d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) = d(v_1, v_3)$$

para $v_1, v_2, v_3 \in N$?

4. Para los digrafos dados en las Figuras 7.23 y 7.24, determinar si son fuertemente conexos, débilmente conexos o unilateralmente conexos.
5. Demostrar que un digrafo sencillo es fuertemente conexo si y sólo si existe un ciclo en G que incluya a todos los nodos al menos una vez.

6. El diámetro de un digrafo sencillo $G = (N, A)$ está dado por δ , en donde es

$$\delta = \max d(u, v), \text{ donde } u, v \in N$$

Hallar el diámetro de los digrafos dados en las Figuras 7.23 y 7.24.

7. Hallar los componentes fuertes del digrafo dado en la Figura 7.24. Calcular también sus componentes unilaterales y débiles.

8. Demostrar que todo nodo y toda arista de un grafo están contenidos exactamente en un componente débil.

7.4 CÁLCULO DE CAMINOS A PARTIR DE UNA REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE LOS GRAFOS

Sólo es posible efectuar una representación en forma de diagrama cuando el número de nodos y de aristas es razonablemente pequeño. En esta subsección se presentará un método alternativo de representación de grafos empleando matrices. Este método de representación tiene varias ventajas. Es fácil almacenar y manipular matrices, y por tanto los grafos que representan, en una computadora. Además, se pueden utilizar operaciones bien conocidas de álgebra matricial para calcular caminos, ciclos y otras características de los grafos.

Dado un digrafo sencillo $G = (N, A)$, es necesario suponer algún tipo de orden en los nodos, en el sentido de que se llame primer nodo a un nodo concreto, segundo nodo a otro, y así sucesivamente. La representación matricial de G depende del orden de los nodos.

Definición 7.14: Sea $G = (A, N)$ un digrafo sencillo en el cual $N = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y se supone que los nodos están ordenados desde v_1 hasta v_n . La matriz A_d , $n \times n$, cuyos elementos a_{ij} están dados por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \langle v_i, v_j \rangle \in E \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

se denomina *matriz de adyacencia* del grafo G .

La matriz de adyacencia es la misma que la matriz de relación de la relación A de N . Todo elemento de la matriz de adyacencia es o bien un cero o bien un 1. Toda matriz cuyos elementos sean o bien 0 o bien 1 (falso o verdadero) se denomina *matriz de bits* o *matriz booleana*. Obsérvese que la i -ésima fila de la matriz de adyacencia está determinada por aquellas aristas que se originan en el nodo v_i . El número de elementos de la i -ésima fila cuyo valor sea 1 es igual al grado de salida del nodo v_i . De manera similar, el número de elementos cuyo valor es 1 dentro de una columna, por ejemplo la j -ésima columna, es igual al grado de entrada del nodo v_j . La matriz de adyacencia define por completo a los digrafos sencillos.

Para un digrafo dado $G = (A, N)$, la matriz de adyacencia depende del orden de los elementos de N . Para distintos órdenes de los elementos de N , se obtienen distintas matrices de adyacencia de un mismo grafo G . Sin embargo, cualquiera de las matrices de adyacencia de G se puede obtener a partir de otra matriz de adyacencia del mismo grafo, sin más que intercambiar algunas de las filas y las columnas correspondientes de la matriz. No se considerará la arbitrariedad que se introduce en una matriz de adyacencia debido al orden de los elementos de N y

Suele ser preferible una representación matricial cuando el grafo es *denso*, esto es, cuando el número de aristas está próximo al máximo número posible, que es de n^2 para un grafo de n nodos (suponiendo que se admitan bucles). Otro método de representación de grafos, que se utiliza para grafos dispersos, se presentará en la Sección 7.5.2.

Problemas 7.4

1. Obtener la matriz de adyacencia Ad del digrafo dado en la Figura 7.33. Hallar los caminos elementales de longitudes 1 y 2 que van desde v_1 hasta v_4 . Demostrar que también hay un camino sencillo de longitud 4 que va desde v_1 hasta v_4 . Verificar los resultados calculando Ad^2 , Ad^3 y Ad^4 .

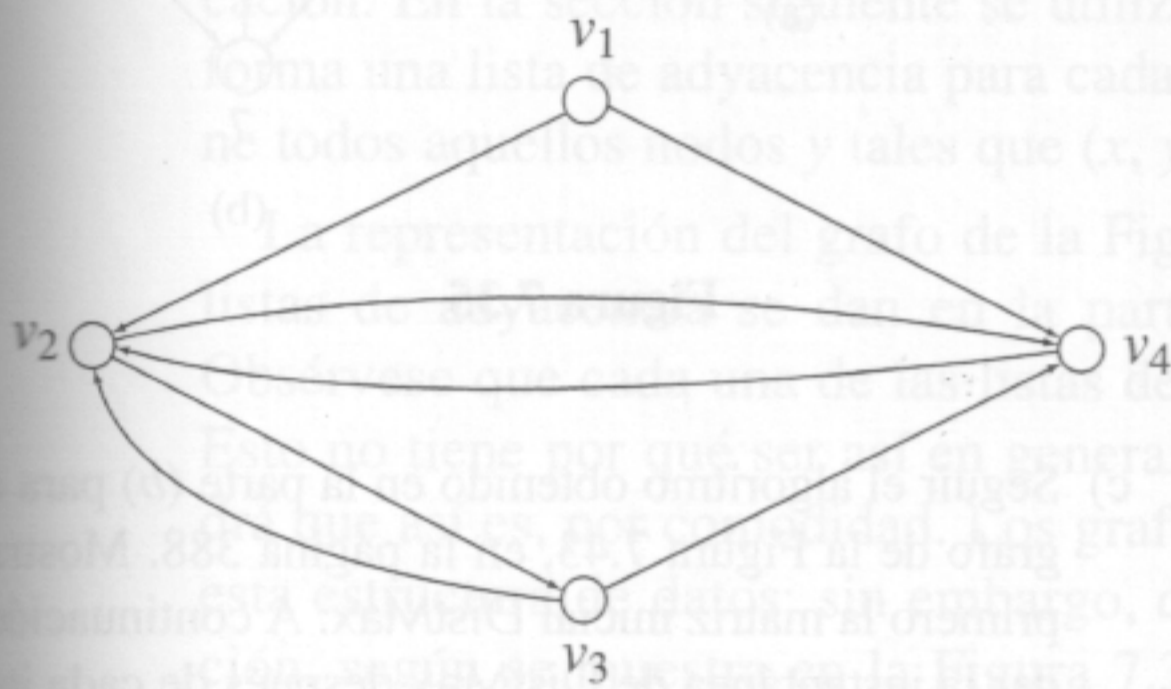


Figura 7.33

2. Para cualquier matriz booleana $n \times n$ A , demostrar que

$$(I \vee A)^{(2)} = (I \vee A) \odot (I \vee A) = I \vee A \vee A^{(2)}$$

en donde I es la matriz identidad $n \times n$, y $A^{(2)} = A \vee A$. Demostrar también que para cualquier entero positivo r se tiene

$$(I \vee A)^{(r)} = I \vee A \vee A^{(2)} \vee \dots \vee A^{(r)}$$

3. Dada la matriz de adyacencia Ad del digrafo de la Figura 7.31, obtener su matriz de caminos.

4. Para un digrafo sencillo $G = (N, A)$ cuya matriz de adyacencia se denota mediante Ad , su *matriz de distancias* está dada por

$$d_{ij} = \infty, \quad \text{si } (v_i, v_j) \notin A$$

$$d_{ii} = 0 \quad \text{para todo } i = 1, 2, \dots$$

$$d_{ij} = k, \quad \text{donde } k \text{ es el menor entero para el cual es } a_{ik}^{(k)} \neq 0$$

Determinar la matriz de distancias del digrafo dado en la Figura 7.33. ¿Qué significa $d_{ij} = 1$?

5. Mostrar que un digrafo G es fuertemente conexo si todas las entradas de la matriz de distancias salvo la diagonal son ceros. ¿Cómo se obtendría la matriz de caminos a partir de una matriz de distancias? ¿Cómo se modificarían las entradas de la diagonal?

6. Supóngase que se tiene la representación de un grafo en forma de matriz de adyacencias, y que se desea calcular la matriz siguiente:

$$C[i, j] = \begin{cases} 1, & \text{si hay un camino de } i \text{ a } j \text{ con la restricción de que} \\ & \text{sólo los nodos 1, 3, 7 y 9 \text{ pueden aparecer en el} \\ & \text{camino existente entre los nodos } i \text{ y } j \\ 0, & \text{si no hay tal camino} \end{cases}$$

Suponga que los nodos están etiquetados en la forma $1, 2, \dots, n$.

- a) Formular un algoritmo para calcular la información deseada.
 - b) Efectuar un análisis temporal del algoritmo.
7. Utilizar el algoritmo de Warshall en el grafo dado en la Figura 7.33 y obtener la matriz de caminos P después de cada iteración del índice de bucle k .
 8. Obtener la matriz de distancias para el grafo de la Figura 7.34b, empleando el procedimiento CaminoCosteMin (Figura 7.30). Dar un seguimiento del resultado, del mismo tipo que el dado en la Figura 7.31.

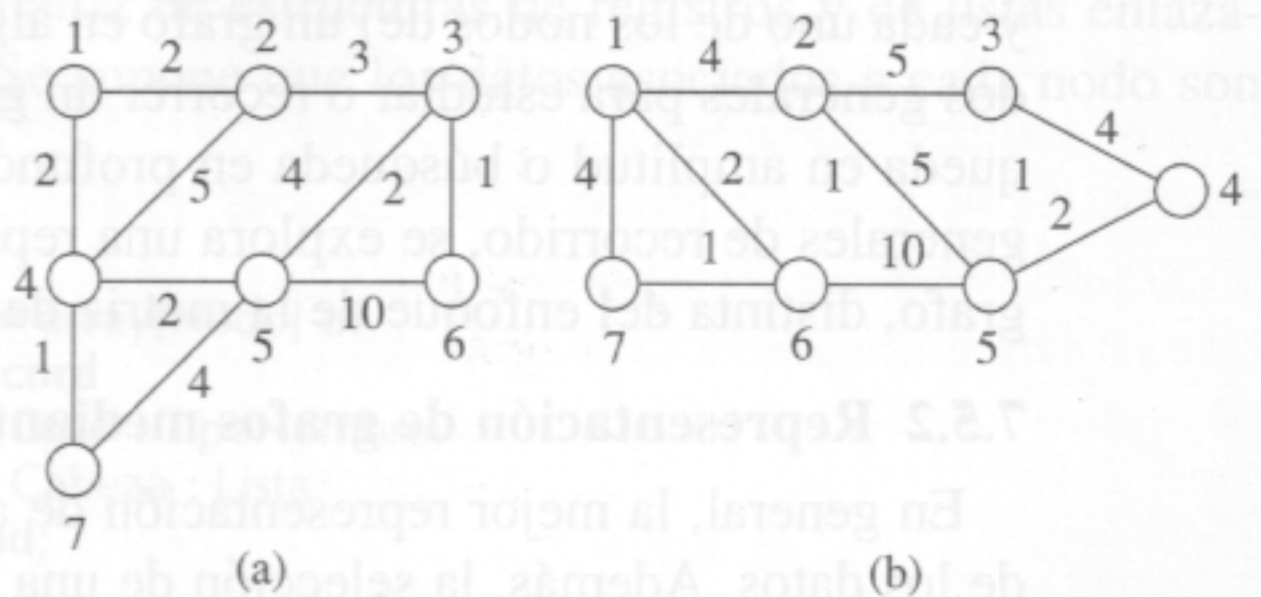


Figura 7.34

36. ¿Cuántas trayectorias de longitud 4 hay de A a D en la gráfica dirigida dada en la figura 7.85? ¿Cuáles son?

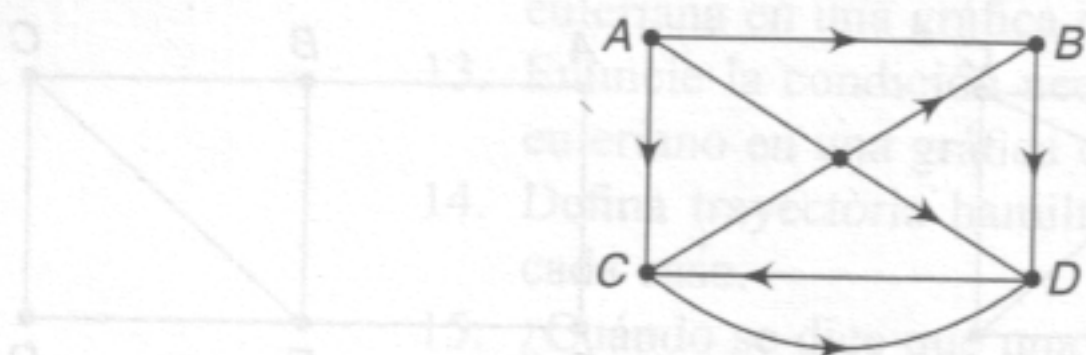


Fig. 7.85

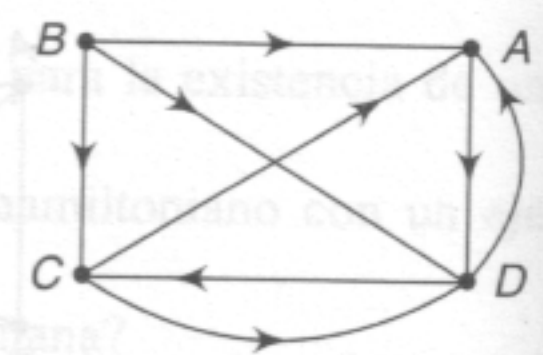


Fig. 7.86

37. ¿Cuántas trayectorias de longitud 4 hay de B a D en la gráfica dirigida de la figura 7.86? ¿Cuáles son?

38. Determine cuál de las gráficas dadas en la figura 7.87 está conectada fuertemente, débilmente o unilateralmente. Argumente su respuesta.

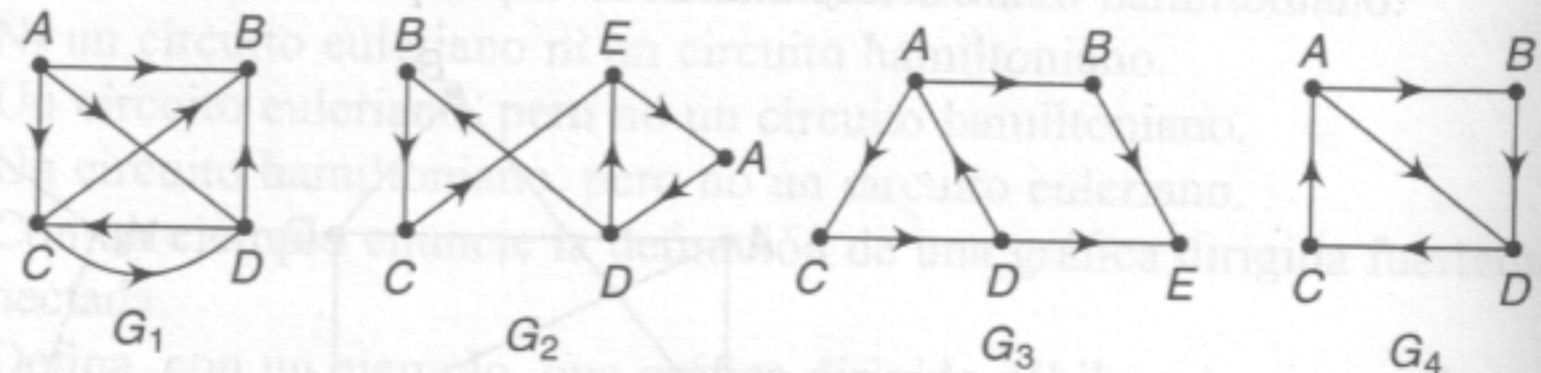


Fig. 7.87

39. Encuentre las componentes conectadas fuertemente de cada una de las gráficas de la figura 7.88.

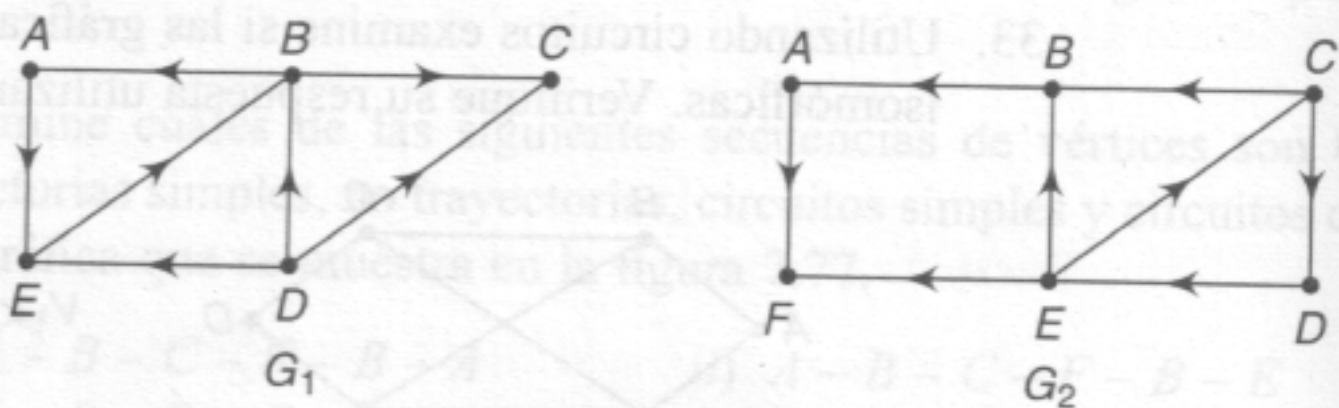


Fig. 7.88

40. Encuentre una trayectoria de Euler o un circuito de Euler, si éstos existen en cada una de las tres gráficas de la figura 7.89. En caso de que no existan, explique por qué.

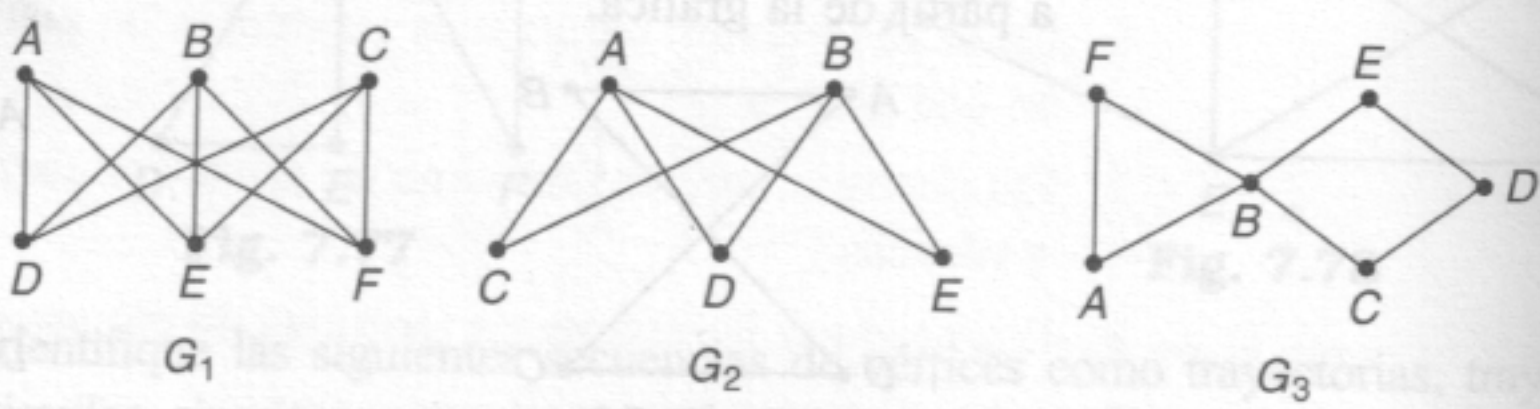


Fig. 7.89

41. Repita la pregunta 40 con respecto a las 3 gráficas de la figura 7.90.

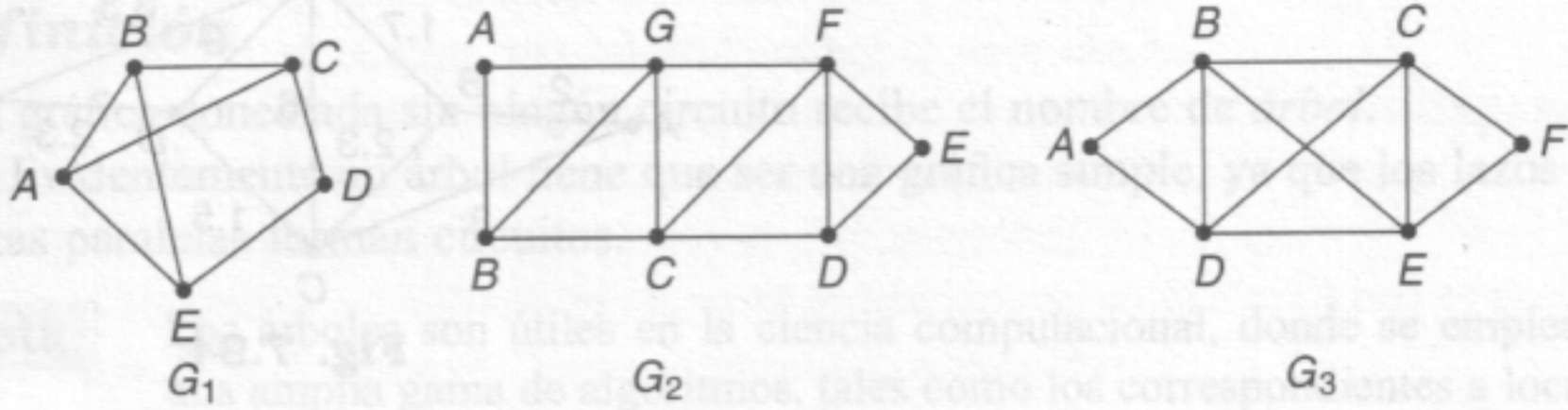


Fig. 7.90

42. Encuentre una trayectoria hamiltoniana o un circuito hamiltoniano, si éstos existen, en cada una de las 3 gráficas de la figura 7.91. Si no existen, explique por qué.

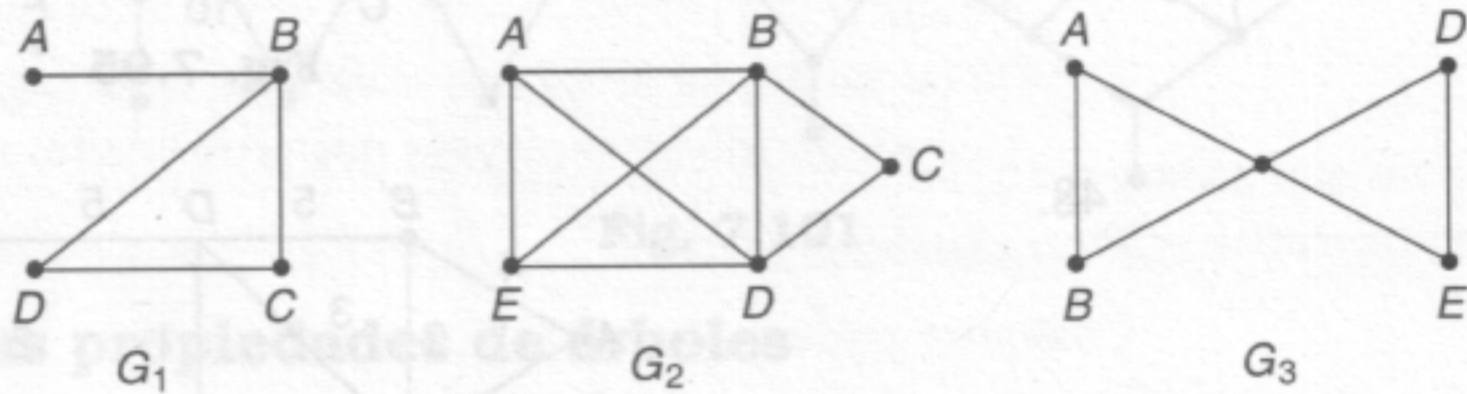


Fig. 7.91

43. Repita la pregunta 42 con respecto a las 3 gráficas de la figura 7.92.

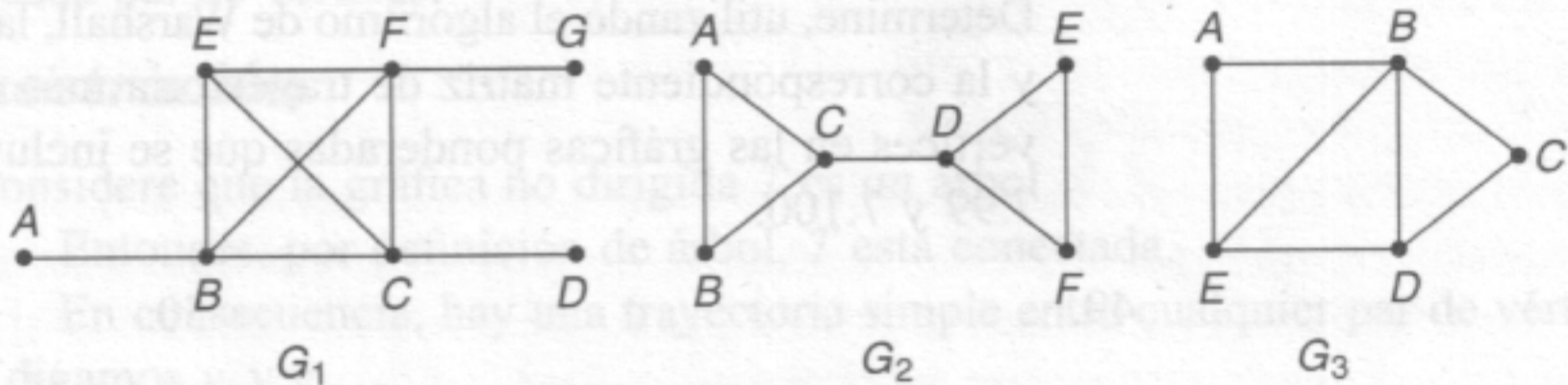


Fig. 7.92

44. Proporcione un ejemplo de una gráfica que contenga

- i) un circuito euleriano que también sea un circuito hamiltoniano
- ii) un circuito euleriano, pero no un circuito hamiltoniano
- iii) un circuito hamiltoniano, pero no un circuito euleriano
- iv) ni un circuito euleriano ni un circuito hamiltoniano.

Utilice el algoritmo de Dijkstra para encontrar la trayectoria más corta entre los vértices indicados en las gráficas ponderadas que se ilustran en las figuras 7.93, 7.94, 7.95 y 7.96.

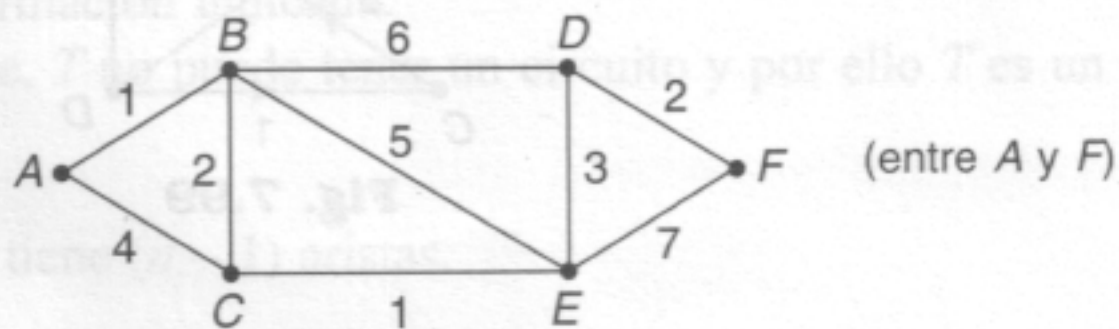
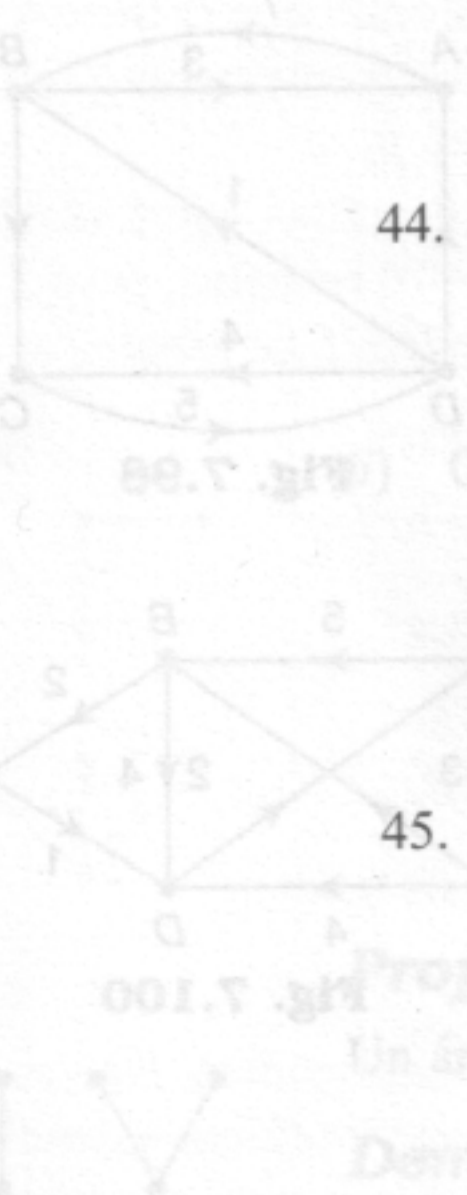


Fig. 7.93

45.



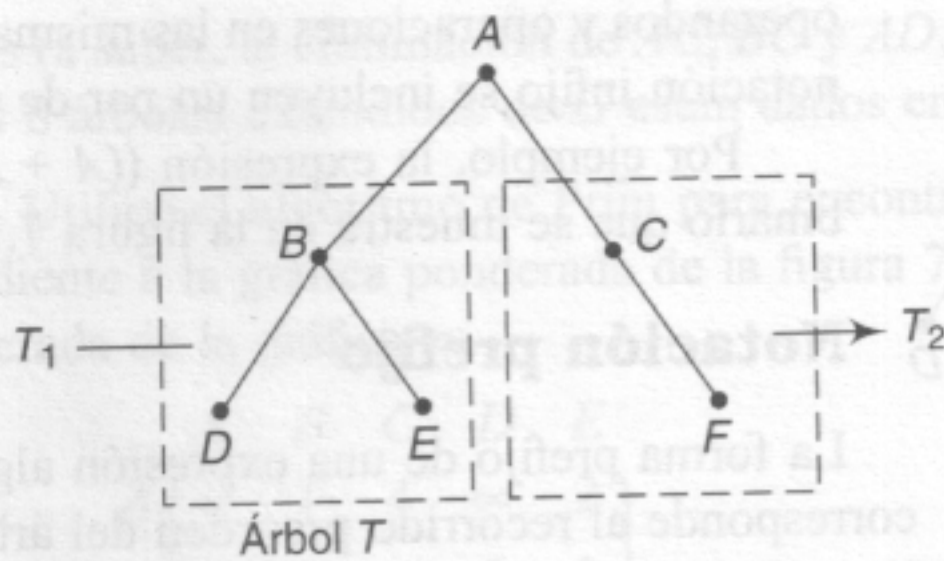


Fig. 7.106

T_1 y T_2 son los subárboles del árbol binario dado T con B y C como las raíces respectivas.

Nota

Si v es un vértice interno de un árbol, entonces la subgráfica del árbol consistente en v , sus descendientes y todas las aristas incidentes a estos descendientes recibe el nombre de subárbol con v como su raíz.

- i) El recorrido preorden de T visita la raíz A primero y después recorre T_1 y T_2 en preorden. El recorrido de preorden de T_1 visita la raíz B y después D y E en ese orden.

El recorrido de preorden de T_2 visita la raíz C y después F .

De tal modo, el recorrido de preorden de T es $A B D E C F$.

- ii) El recorrido inorden de T recorre T_1 primero en inorden, después visita la raíz A y finalmente recorre T_2 en inorden.

Sin embargo el recorrido inorden de T_1 procesa D , B y E en ese orden y después el recorrido inorden de T_2 procesa C y luego F .

De tal modo, el recorrido inorden de T es $D B E A C F$.

- iii) El recorrido posorden de T procesa T_1 , luego T_2 en posorden y finalmente visita A .

Pero el recorrido posorden de T_1 procesa D , E y B en ese orden y el recorrido posorden de T_2 procesa F y luego C .

Así, el recorrido posorden de T es $D E B F C A$.

ÁRBOLES DE EXPRESIÓN

Los árboles binarios pueden utilizarse para representar expresiones algebraicas, ya que tales representaciones facilitan la evaluación por computadora de las expresiones. En la representación de expresiones mediante árbol binario, los vértices terminales (hojas) se etiquetan con números o variables, mientras que los vértices internos se etiquetan con las operaciones, por ejemplo, suma (+), resta (-), multiplicación (*), división (/) y exponenciación (\uparrow). La operación en cada vértice interno opera sobre sus subárboles izquierdo y derecho de izquierda a derecha.

Es posible representar expresiones de tres maneras diferentes utilizando árboles binarios. Éstas se conocen como formas *infijo*, *prefijo* y *posfijo* de una expresión.

Notación infijo

La manera estándar de representar una expresión en la cual el operador se ubica entre sus operandos se denomina la *forma infijo* de la expresión.

La forma infijo de una expresión algebraica corresponde al recorrido inorden del árbol binario que representa a la expresión; proporciona la expresión original con los