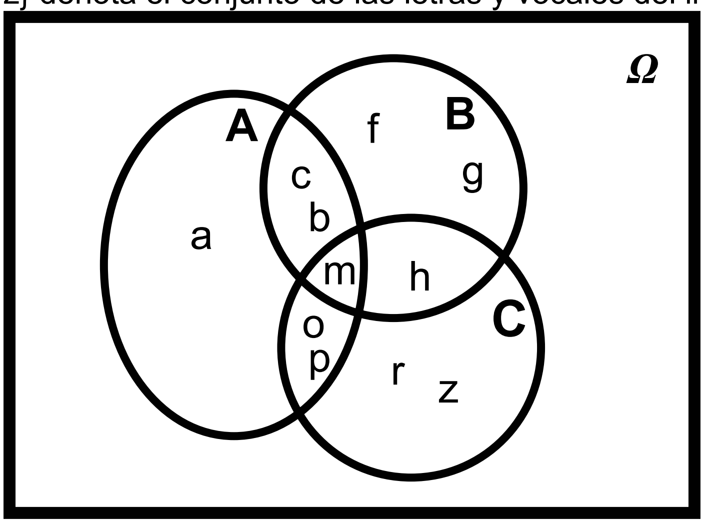
Docente: Dr. Carlos Barrón Romero
Anote claramente su nombre y matrícula: 7 de junio de 2011

RESPUESTAS

El valor del examen es 12 puntos para obtener 10 de calificación.
Instrucciones. El marco de sus respuestas son los objetivos de la UEA que transcribo a continuación:
1. Usar la inducción matemática en la resolución de problemas relacionados con la computación:
2. Aplicar los principios de combinatoria en la elaboración de programas de cómputo.
3. Diseñar búsquedas en conjuntos dotados de una relación de orden.
4. Usar gráficas para modelar problemas.

Responda en forma resumida, note que su respuesta debe los objetivos de la UEA, use el sentido común y describa con claridad el desarrollo de su solución. El valor de cada pregunta está entre "[", "]".

En el siguiente diagrama de Ven Ω = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y , z} denota el conjunto de las letras y vocales del inglés.



Calcule y escriba los conjuntos resultantes:
1. [0.2] $A \cap B \cap C$ = { m }

2. [0.2] $A \cap C$= { m, o, p }

3. [0.2] $B \cap C$= { m, h }

4. [0.2] $(A \cup B) \cap C$= { m, h, o, p }

5. [0.2] $(B \cup C) \cap (B^c \cup A^c)$ = { f, g, h, o, p, r, z}

NOTE que son las comunes de
$(B \cup C)$ = {b, c, f, g, h, m, o, p, r, z } y
$(B^c \cup A^c)$={ a, f, g, h, o, p, r, z, d, e, i, j, k, l, n, q, s, t, u, v, w, x, y}

6. [2.0] Aplique el principio de inclusión y exclusión para calcular $|A\cup B\cup C|$

RESPUESTA.

$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) + |A\cap B\cap C| = 6 + 6 + 6 - (3+3+2)+1 = 18 - 8 + 1 = 11$.

Ya son 11 elementos los de $|A\cup B\cup C|$

7. [1.0] Cuantos letreros circulares de tres letras se pueden formar con las vocales a) si las letras se pueden repetir, b) si no se permiten repeticiones de las vocales.

RESPUESTA.

a) Se trata de un letrero circular con repetición de letras. Se tiene tres casos:

1. El modelo es circular con tres letras, si son iguales solo hay una forma, pero la letra a repetir se elige de $\binom{5}{1} = \frac{5!}{(5-1)!1!} = 5$, hay 5 letreros con la misma vocal.

2. El modelo es circular con tres letras, ahora dos son iguales (quedan juntas) y una diferente, al estar en el modelo circular es un solo caso. Por ejemplo, se tiene por caso, aa y otra de las 4 vocales. Regla del producto es [1 (dos iguales)] [4 (una distinta)] = 4. Pero como son 5 vocales el total de los casos es 5(4)=20.

En clase hubo un error, djimos que resulta de $\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$ formas de elegir dos letras, sin embargo, falto considerar que hay dos casos, uno por repetir la primera y el otro por repetir la segunda, es decir se multiplica por 2. Así el total de casos de un par de vocales repetidas en un letrero circular de tres letras es 10(2)=20.

3. Solo faltan los casos del inciso b, o sea cuando no se repiten las vocales, que son 20 casos. La regla de la suma de casos disjuntos da 5+20+20=45 casos diferentes donde se pueden repetir las letras.

b) Un letrero circular de tres elementos tiene 2! = 2 formas diferentes. Las vocales se pueden elegir de tres de cinco (una combinación cinco de tres letras $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$). Por tanto por la regla del producto:

(Letreros circulares de 3 vocales) (combinaciones de 5 en 3 vocales) = (2) (10) = 20.

8. [2.0] Sea $X = \{ x \in \Omega | \text{ x no es una consonante}\}$ y $V = \{ a, e, i, o, u \}$, demuestre que X = V.

RESPUESTA.

Demostraremos que (a) $X \subset V$ y (b) $V \subset X$.

(a) Sea $x \in X$, x no es una consonante, como Ω es el alfabeto, este consta de vocales y consonantes, luego entonces x es una vocal, cualquiera a, e, i, o, u y pertenece a V. Se tiene $X \subset V$.

(b) Sea $x \in V$, x es cualquiera de a, e, i, o, u, por tanto x es una vocal, x no es una consonante. Es decir x cumple la propoción de X, luego $x \in X$. Se tiene entonces $V \subset X$.

Finalmente de (a) y (b) se sigue que X = V.

9. [2.0] Sea $\Omega = \{0, 1\}$. Demuestre que para n, número natural mayor o igual a 1, el número de cadenas binarias de longitud n es 2^n. (Sugerencia demuestre por inducción que $|\Omega^n|=2^n$, donde $\Omega^1=\Omega$, $\Omega^2=\Omega \times \Omega$, $\Omega^3=\Omega \times \Omega \times \Omega$, … y "x" producto cruz).

RESPUESTA.
Las cadenas de ceros y unos se pueden interpretar como coordenadas de Ω^n.
Por inducción Matemática. $|\Omega^n|=2^n$
Sea n=1.
$\Omega^1 = \Omega =\{0,1\}$ y solo se tienen dos cadenas, es decir, $2=|\Omega^1|=2^1=2$
La hipótesis de inducción (HI) es $|\Omega^n|=2^n$ o sea las cadenas binarias de longitud n son 2^n.
Sea $\Omega^{n+1} = \Omega^n \times \Omega$. Una cadena de Ω^{n+1} es una cadena de longitud n mas símbolo {0, 1} con dos posibilidades, O sea usando la HI, $|\Omega^{n+1}| = |\Omega^n \times \Omega|= 2^n(2) =.2^{n+1}$
(Ya que para cualesquiera conjuntos los elementos del producto cruz cumplen que $|A\times B|=|A||B|$)
Se cumple entonces $|\Omega^{n+1}| =.2^{n+1}$.

10. [2.0] Sean $H_n =\{h_1, h_2, ..., h_n\}$ un conjunto de n hombres y $M_n =\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ un conjunto de n mujeres. Demuestre que $|C| = n(n-1)$ donde $C = \{ \{h_i, m_j\} \mid h_i\in H_n, m_j\in M_n \text{ con } i \neq j\}$, o sea C es el conjunto de las relaciones tales que el hombre h_1 se relaciona con todas las mujeres menos la mujer m_1, o el hombre h_2 se relaciona con todas las mujeres menos la mujer m_2, …, el hombre h_n se relaciona con todas las mujeres menos la mujer m_n. Nota: Al Conjunto C se le llama una fiesta Cóctel (las parejas son $\{\{h_1, m_1\}, \{h_2, m_2\},.., \{h_n, m_n\}\}$ las que tienen mismo índice son una pareja casada) y por eso charlan o se relacionan con los demás y no con la pareja. (Sugerencia demuéstrelo por Inducción Matemática).

RESPUESTA.
Denotaremos los conjuntos C como C(n) donde n es el número de elementos de $H_n =\{h_1, h_2, ..., h_n\}$ y $M_n =\{m_1, m_2, ..., m_n\}$.
Por inducción Matemática. $|C(n)| = n(n-1)$
Sea n=2.
El conjunto $|C(2)| = |\{ \{h_1, m_2\}, \{h_1, m_2\} \}| = 2 = 2(2-1)=2$. Se cumple.
La HI es $|C(n)| = n(n-1)$.
Sea C(n+1). Es facil ver que $C(n+1) = C(n) \cup \{ \{ \{h_{n+1}, m_1\}, \{h_{n+1}, m_2\},…, \{h_{n+1}, m_n \}, \{ \{h_1, m_{n+1}\}, \{h_2, m_{n+1}\},…, \{h_n, m_{n+1} \} \}$ ya que el hombre "n+1" y la mujer "n+1" que no están en C(n) se relacionan con n hombre y n mujeres de C(n). Las relaciones agregadas son 2n.
Se tiene usando el principio de Inclusión y exclusión y la HI que
$| C(n+1) |= |C(n) \cup \{ \{ \{h_{n+1}, m_1\}, \{h_{n+1}, m_2\},…, \{h_{n+1}, m_n \}, \{ \{h_1, m_{n+1}\}, \{h_2, m_{n+1}\},…, \{h_n, m_{n+1} \} \}|=$
$|C(n)| +|\{ \{ \{h_{n+1}, m_1\}, \{h_{n+1}, m_2\},…, \{h_{n+1}, m_n \}, \{ \{h_1, m_{n+1}\}, \{h_2, m_{n+1}\},…, \{h_n, m_{n+1} \} \}|$ - (Interseccion entre C(n) y las relaciones del hombre "n+1" y la mujer "n+1") = n(n-1) + 2 n – 0=
n(n-1+2) = (n+1)(n)=(n+1)((n+1)-1).
O sea se cumple | C(n+1) |= (n+1)((n+1)-1).

11. [2.0] Una baraja española tiene 40 cartas (1,2,…, 7, J, C, R) y una baraja inglesa tiene 52 cartas (1,2,…, 10, J Q, R). La probabilidad de un evento es $p(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$ donde $A\subset\Omega$ y $0<|\Omega|<\infty$.. Explicar con cual es mas difícil ganar (o sea cual tiene menor probabilidad para una mano o evento similar): Puede por ejemplo, empezar por mostrar casos, en los cuales manos

de cinco cartas tienen mayor probabilidad entre una baraja y la otra, o sea comparar la probabilidad de un póquer de ases en la baraja española y un póquer de ases en la baraja inglesa, o la probabilidad entre un par en la baraja española y un par en la baraja inglesa. Al final su explicación debe ser consistente y lógica para justificar en cual baraja es mas difícil ganar para manos similares de cinco cartas. ¿Será por esto que los casinos usan la baraja inglesa?

RESPUESTA.

Llamemos Ω(E) a las manos de cinco cartas de la baraja española y Ω(I) a las manos de cinco cartas de la baraja inglesa.

Las manos de cinco cartas son combinaciones distintas donde no importa el orden,

$|\Omega(E)| = \binom{40}{5} = \frac{40!}{(40-5)!5!} = \frac{40(39)(38)(37)(36)}{5(4)(3)(2)} = 8(13)(19)(37)(9) = 658{,}008$

$|\Omega(I)| = \binom{52}{5} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52(51)(50)(49)(48)}{5(4)(3)(2)} = 52(27)(10)(49)(12) = 2{,}598{,}960$

Se tiene entonces que $|\Omega(E)| < |\Omega(I)|$.

Una mano de cinco cartas en la baraja española comparte una parte de las combinaciones con la baraja inglesa, por ejemplo un par de ases en la baraja española es $\binom{4}{2}\binom{36}{3}$ ya que $\binom{4}{2}$ es de los 2 ases por (otras tres cartas que no son as) $\binom{40-4}{3} = \binom{36}{3}$ mientras la misma mano en la baraja inglesa es $\binom{4}{2}\binom{48}{3}$. Note que solo cambian por los factores $\binom{36}{3}$ y $\binom{48}{3}$.

La parte repetida es la misma sacar un par, una tercia, un póquer, lo que cambia son los factores de las otras cartas

O sea para un par hay que comparar en la baraja española la probabilidad de sacar un par es proporcional a $\frac{\binom{36}{3}}{\binom{40}{5}} = ((595)/(54834)) = 1.0851\times10^{-2}$ y con la baraja inglesa la probabilidad de obtener un par es proporcional a $\frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = ((1081)/(162435)) = 6.6550\times10^{-3}$ (es menor en la baraja inglesa), en forma similar para una tercia en la baraja española es $\frac{\binom{36}{2}}{\binom{40}{5}} = ((35)/(36556)) = 9.5744\times10^{-4}$ y con la inglesa se tiene $\frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = ((47)/(108290)) = 4.3402\times10^{-4}$ (es menor en la baraja inglesa) y finalmente para un póquer en la baraja española es proporcional a $\dfrac{\binom{36}{1}}{\binom{40}{5}} = (1/(18278)) = 5.4711\times 10^{-5}$ y con la baraja inglesa es $\dfrac{\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = (1/(54145)) = 1.8469\times 10^{-5}$ (es menor en la baraja inglesa).

Las otras manos dependen de las figuras de las cartas y no del total de las cartas pero el divisor |Ω(I)| hace que la probabilidad en la baraja inglesa sea menor (ya que |Ω(E)| <|Ω(I)|.

Por tanto en manos similares es mas difícil ganar con más cartas o sea con la baraja inglesa y quizás por esto no se use en los casinos.