TEORIA INTUITIVA DE LOS CONJUNTOS

EDICION CORREGIDA

8a. IMPRESION

PAUL R. HALMOS

C. E. C. S. A.

Título original en inglés:
NAIVE SET THEORY

Traducido por:
Ing. ANTONIO MARTIN-LUNAS
Director del Instituto Particular de Estudios Matemáticos, México

Revisado por:
ANDRES SESTIER BOUCLIER
Maestro en Ciencias del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México

Edición autorizada por:
D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC.
Princeton, New Jersey

Library of Congress Catalog Card Number 60-11059

Primera edición en español: mayo de 1965

Impresiones de la primera edición en español:
diciembre de 1965; octubre de 1966; septiembre de 1967; enero de 1969

Sexta impresión en español, revisada y corregida: julio de 1971

Séptima impresión en español: julio de 1972

Octava impresión en español:
abril de 1973

COMPAÑIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
CALZ. DE TLALPAN NÚM. 4620, MÉXICO 22, D. F.

MIEMBRO DE LA CAMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA EDITORIAL
Registro Núm. 43

AV. REP. ARGENTINA NÚM. 168, BARCELONA 6, ESPAÑA
SOLÍS NÚM. 1262, BUENOS AIRES, ARGENTINA
AMUNÁTEGUI NÚM. 458, SANTIAGO DE CHILE, CHILE

IMPRESO EN MEXICO PRINTED IN MEXICO

EL AXIOMA DE EXTENSION

Una manada de lobos, un racimo de uvas o una bandada de pichones son ejemplos de conjuntos de objetos. El concepto matemático de un conjunto puede ser usado como el fundamento de todas las matemáticas conocidas. El propósito de este pequeño libro es el de desarrollar las propiedades básicas de los conjuntos. Incidentalmente, para evitar una monotonía terminológica, algunas veces diremos *colección* en vez de *conjunto*. La palabra "clase" también es usada en este contexto; pero hay cierto riesgo al hacerlo. La razón es que en algunos tratamientos de la teoría de los conjuntos, la palabra "clase" tiene un significado técnico especial. Un poco más adelante tendremos ocasión de referirnos a esto nuevamente.

La definición de conjunto es algo que no será incluido en el presente desarrollo. Esto es algo análogo a lo que ocurre en el tratamiento familiar que se da de la geometría elemental. Dicho tratamiento no ofrece una definición de puntos y rectas, sino que, en lugar de ello, describe qué es lo que uno puede hacer con esos objetos. Para el punto de vista semiaxiomático que aquí se adopta, se supone que el lector posee el entendimiento ordinario, humano, intuitivo (y frecuentemente erróneo) de lo que son los conjuntos; el propósito de la exposición es el de delinear algunas de las muchas cosas que uno puede hacer correctamente con ellos.

Los conjuntos, como se les concibe usualmente, tienen *elementos* o *miembros*. Un elemento de un conjunto puede ser un lobo, una uva o un pichón. Es importante saber que un conjunto mismo puede ser también un elemento de algún otro conjunto. En las matemáticas se encuentra un sinnúmero de ejemplos de conjuntos de conjuntos. Una recta, por ejemplo, es un conjunto de puntos; el conjunto de todas las rectas del plano es un ejemplo natural de conjunto de conjuntos (de puntos). Más que el hecho de que los conjuntos puedan presentarse como elementos, quizá resulte sorprendente el que, para fines matemáticos, ningún otro tipo de elementos necesita ser considerado. En este libro, particularmente, estudiaremos conjuntos y conjuntos de conjuntos y torres semejantes de altura y complejidad imponentes en ocasiones —y nada más. En calidad de ejemplos, podríamos ocasionalmente hablar de conjuntos de coles, de reyes y de cosas por el estilo, pero tal costumbre debe ser interpretada siempre sólo como una parábola ilustrativa y no como parte de la teoría que esté siendo desarrollada.

El concepto principal de la teoría de los conjuntos, aquel que en estudios completamente axiomáticos es el concepto primitivo principal (indefinido), es el de *pertenencia*. Si x pertenece a A (x es un elemento de A, x está *contenido* en A), escribiremos

$$x \in A.$$

Esta versión de la letra griega épsilon es tan usada para denotar pertenencia, que su empleo para denotar cualquier otra cosa está casi prohibido. La mayoría de los autores reservan a $\in$ para usarlo siempre en la teoría de los conjuntos y ε cuando necesitan la quinta letra del alfabeto griego.

Quizá resulte útil una pequeña disgresión acerca del empleo del alfabeto en la teoría de los conjuntos. No existe ninguna razón de peso para emplear letras minúsculas y mayúsculas como se hizo en el párrafo anterior; podríamos haber escrito, y a menudo lo haremos, cosas como $x \in y$ y $A \in B$. Sin embargo, siempre que sea posible, indicaremos informalmente la posición relativa de un conjunto en una jerarquía particular bajo consideración, en términos de la convención de que las primeras letras del alfabeto denotarán elementos y las últimas conjuntos que los contienen; análogamente, letras de un tipo relativamente sencillo denotarán elementos, mientras que las del tipo más llamativo o estilizado denotarán conjuntos que los contienen. Ejemplos: $x \in A$, $A \in X$, $X \in \mathcal{C}$.

Una relación posible entre conjuntos, más elemental que la de pertenencia, es la de *igualdad*. La igualdad entre dos conjuntos A y B se denota universalmente por el conocido símbolo

$$A = B;$$

y el hecho de que A y B no son iguales se expresa escribiendo

$$A \neq B.$$

La propiedad más importante de la pertenencia es su relación con la igualdad, misma que puede formularse de la manera siguiente:

Axioma de la extensión. *Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.*

Con mayor pretensión y menos claridad: un conjunto está determinado por su extensión.

Es valioso comprender que el axioma de la extensión no es sólo una propiedad lógicamente necesaria de la igualdad, sino que es una proposición no trivial acerca de la pertenencia. Una manera de llegar a entender el punto es la de considerar una situación parcialmente semejante en la cual el análogo del axioma de la extensión no se cumpla. Supóngase, por ejemplo, que consideramos seres humanos en lugar de conjuntos y que, si x y A son seres humanos, escribimos $x \in A$ siempre que x es un ancestro de A. (Los ancestros de un ser humano son sus padres, los padres de sus padres, los padres de éstos, etc., etc.) El análogo del axioma de la extensión diría en este caso que si dos seres humanos son iguales, tienen los mismos ancestros (ésta sería la parte "sólo si", y es verdadera) y, también, que si dos seres humanos tienen los mismos ancestros, entonces son iguales (ésta es la parte "si", y es falsa).

Si A y B son dos conjuntos y todo elemento de A es un elemento de B, decimos que A es un *subconjunto* de B o que B *incluye* a A, y escribimos

$$A \subset B$$

o

$$B \supset A.$$

El enunciado de la definición implica que todo conjunto debe considerarse incluido en sí mismo ($A \subset A$); este hecho se describe diciendo que la inclusión es *reflexiva*. (Nótese que, en el mismo sentido de la palabra, la igualdad también es reflexiva). Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ y $A \neq B$, la palabra *propio* (a) es usada (subconjunto propio, inclusión propia). Si A, B y C son tres conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$; este hecho se describe diciendo que la inclusión entre conjuntos es *transitiva*. (También la igualdad posee esta propiedad).

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces A y B tienen los mismos elementos y, por lo tanto, en virtud del axioma de la extensión, $A = B$. Este hecho se describe diciendo que la inclusión de conjuntos es *antisimétrica*. (A este respecto, la inclusión entre conjuntos se comporta en forma distinta a la igualdad. La igualdad es *simétrica* en el sentido de que si $A = B$ entonces, necesariamente, $B = A$.) De hecho, el axioma de la extensión puede ser formulado en estos términos: si A y B son dos conjuntos, una condición necesaria y suficiente para que $A = B$ es que $A \subset B$ y $B \subset A$ simultáneamente. De manera correspondiente, casi todas las demostraciones de igualdades entre dos conjuntos A y B están divididas en dos partes; hacer ver primero que $A \subset B$, y mostrar después que $B \subset A$.

Obsérvese que la pertenencia (ϵ) y la inclusión ($\subset$) son, conceptualmente, cosas muy diferentes. Una diferencia importante se ha manifestado ya por sí misma anteriormente: la inclusión es siempre reflexiva, mientras que no está del todo claro que la pertenencia llegue a serlo. Esto es: $A \subset A$ es siempre cierto; pero, ¿será siempre cierto que $A \epsilon A$? Indudablemente que no lo es para ningún conjunto razonable que persona alguna haya considerado alguna vez. Obsérvese, en este contexto, que la inclusión es transitiva, mientras que la pertenencia no lo es. Ejemplos de la vida diaria, concernientes, digamos, a superorganizaciones cuyos miembros son organizaciones, se presentarán prontamente al lector interesado.

EL AXIOMA DE LA ESPECIFICACION

Todos los principios básicos de la teoría de los conjuntos, con la sola excepción del axioma de la extensión, están diseñados para la formación de nuevos conjuntos a partir de los originales. El primero y más importante de estos principios básicos en la manufactura de conjuntos dice, hablando toscamente, que cualquier cosa sensata que pueda uno proponer para los elementos de un conjunto, define un subconjunto, a saber, el subconjunto de aquellos elementos para los cuales la proposición es verdadera.

Antes de formular este principio en términos precisos, enfocaremos un ejemplo heurístico. Sea A el conjunto de todos los hombres. La frase "x es casado" es verdadera para algunos de los elementos x de A y falsa para otros. El principio que estamos ilustrando es aquel que justifica el paso del conjunto A al subconjunto especificado por la cláusula dada (o sea, al conjunto de todos los hombres casados). La caracterización del subconjunto se indica usualmente con la notación

$$\{x \in A: x \textit{ es casado}\}$$

Análogamente

$$\{x \in A: x \textit{ no es casado}\}$$

es el conjunto de todos los solteros;

$$\{x \in A: \textit{el padre de } x \textit{ es Adán}\}$$

es el conjunto que contiene a Caín v Abel y nada más; y

$$\{x \in A: x \textit{ es el padre de Abel}\}$$

es el conjunto que contiene a Adán y nada más. Cuidado: una caja que contiene un sombrero y nada más, no es lo mismo que un sombrero y, análogamente, el último conjunto de la anterior lista de ejemplos no debe ser confundido con Adán. La analogía entre conjuntos y cajas tiene muchos puntos débiles, pero, a veces, proporciona un cuadro útil de la situación.

Todo lo que falta para la formulación general precisa que fundamenta los ejemplos anteriores es una definición de *frase*, He aquí una rápida e informal. Hay dos tipos básicos de *frases*, a saber, *proposiciones* de pertenencia,

$$x \in A,$$

y *proposiciones* de igualdad,

$$A = B;$$

todas las demás frases se obtienen a partir de las frases atómicas* por medio de aplicaciones repetidas de los operadores lógicos usuales, sujetas únicamente a las mínimas exigencias de la gramática y la claridad. Para hacer más explícita la definición (y más larga) es necesario agregarle una lista de los "operadores lógicos usuales" y las reglas de la sintaxis. Una lista adecuada (y, de hecho, redundante) de los primeros, contiene siete de ellos:

y,
o (en el sentido de "*cualquiera—o—o ambos*"),
no
si –entonces—(o *implica*),
si y sólo si,
para algún, (o *existe*)
para todo

En cuanto a las reglas para la construcción de las frases, pueden ser descritas de la manera siguiente: (i) Escriba "no" antes de una frase y encierre el resultado entre paréntesis. (El objeto de los paréntesis, aquí y en lo sucesivo, es el de evitar ambigüedades. Incidentalmente, obsérvese que éstos hacen innecesarios a todos los demás signos de puntuación. Raramente se hace necesario el juego completo de paréntesis que requiere la definición de frase. Omitiremos tantos paréntesis como sea posible sin dar lugar a confusiones. En la práctica nor-

---

*El autor usa la palabra "atómicas" en el sentido de "elementales", "primarias" (N. del T.)

mal de las matemáticas, que se seguirá en este libro, se usan distintos tipos y tamaños de paréntesis, pero sólo por conveniencia visual.) (ii) Escriba "y" u "o", o "si y sólo si" entre dos frases y encierre el resultado entre paréntesis. (iii) Reemplace los guiones en "si—entonces—" por frases y encierre el resultado entre paréntesis. (iv) Reemplace el guión en "para algún—" o en "para todo—" por una letra, siga el resultado por una frase y encierre todo entre paréntesis. (Nada malo sucede si la letra empleada no se presenta en la frase. De acuerdo con la convención usual y natural "para algún y $(x \in A)$" significa simplemente "$x \in A$". Es igualmente inofensivo que la letra usada haya sido empleada anteriormente con "para algún—" o "para todo—". Recuérdese que "para algún x $(x \in A)$" significa lo mismo que "para algún y $(y \in A)$"; de aquí se sigue que un cambio de notación sensato evitará siempre las colisiones alfabéticas).

Estamos ahora en posibilidades de enunciar el principio más importante de la teoría de los conjuntos, al cual se le llama a veces por su nombre alemán *Aussonderungsaxiom*.

> **Axioma de la especificación.** *A todo conjunto A y a toda condición $S(x)$ corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente aquellos elementos x de A para los cuales se cumple $S(x)$.*

Una "condición" es aquí simplemente una frase. La intención del simbolismo es la de indicar que la letra x es *libre* en la frase $S(x)$, lo cual significa que x tiene lugar en $S(x)$ cuando menos una vez sin necesidad de ser introducida por una de las frases "para algún x" "para todo x". Una consecuencia inmediata del axioma de la extensión es que el axioma de la especificación determina unívocamente al conjunto B. Para indicar la forma en que B es obtenido a partir de A y de $S(x)$, se acostumbra escribir

$$B = \{x \in A : S(x)\}.$$

Para obtener una aplicación divertida e instructiva del axioma de la especificación, considérese, en el papel de $S(x)$, a la frase.

$$\text{no } (x \in x).$$

Será conveniente aquí y en lo sucesivo, escribir "$x \epsilon' A$" (alternativamente con "$x \notin A$") en lugar de "no ($x \epsilon A$)"; con esta notación, el papel de $S(x)$ es jugado ahora por

$$x \epsilon' x.$$

De ahí se sigue que, cualquiera que sea el conjunto A, si $B = \{x \epsilon A: x \epsilon' x\}$, entonces, para toda y,

$$(*) \qquad y \epsilon B \textit{ si y sólo si } (y \epsilon A \textit{ y } y \epsilon' y).$$

¿Será posible que $B \epsilon A$? Procederemos a demostrar que la respuesta es no. En efecto, si $B \epsilon A$, entonces, o $B \epsilon B$ también (lo cual es improbable pero no obviamente imposible), o bien $B \epsilon' B$. Si $B \epsilon B$, entonces, por (*), la suposición $B \epsilon A$ implica que $B \epsilon' B$—lo cual es una contradicción. Si $B \epsilon' B$, entonces otra vez por (*), la suposición $B \epsilon A$ implica que $B \epsilon B$—lo cual es, otra vez, una contradicción. Esto completa la demostración de que es imposible que $B \epsilon A$, por lo cual debemos tener que $B \epsilon' A$. La parte más interesante de esta conclusión es el hecho de que existe algo (es decir, B) que no pertenece A. El conjunto A en este razonamiento fue completamente arbitrario. Hemos demostrado, en otras palabras, que

no hay algo que contenga a todo,

o, más espectacularmente, que

no hay universo.

"Universo" se usa aquí en el sentido de "universo de discurso", lo cual significa, en cualquier discusión particular, un conjunto que contiene a todos los objetos que intervienen en ese estudio.

En tratamientos más antiguos (preaxiomáticos) a la teoría de los conjuntos, se daba por supuesta la existencia de un universo, y el razonamiento del párrafo anterior se conocía como la *paradoja de Russell.* La moraleja es que es imposible, especialmente en matemáticas, obtener algo a partir de nada. Para especificar un conjunto, no basta pronunciar algunas palabras mágicas (las cuales pueden formar una frase tal como "$x \epsilon' x$"); es necesario también disponer de un conjunto a cuyos elementos puedan aplicarse esas palabras mágicas.