

Taller: Introducción al Control Optimo en Ecuaciones Diferenciales Parciales (sesiones I y II)

Carlos Barrón Romero

International Seminar on Applied Analysis Evolution Equations and Control

Notas del curso

A BRIEF INTRODUCTION ON THE OPTIMAL CONTROL OF
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Roland Glowinski

Workshop en Métodos Numéricos de Optimización y
de Control Optimo en PDE,
Guanajuato, 2006.

May-2011

1 Motivación

De la abundante literatura, sólo mencionamos para ecuaciones diferenciales parciales el libro [4] y de Control los libros [1, 3]. Las notas se elaboraron a partir de las pláticas [2].

El siguiente problema es un caso de una ecuación parabólica con tres componentes de fenómenos físico-químicos.

1. Advección. Es la variación escalar en cada punto de un campo vectorial, por ejemplo el arrastre de contaminante en un medio.
2. Reacción. Es la respuesta o reacción del sistema, por ejemplo el proceso de cambio de calor de un sistema.
3. Difusión. Es el gradiente (cambio o transporte) de los componentes del sistema.

Ecuación parabólica de advección ($V \cdot \nabla \varphi$), reacción ($f(\varphi)$) y difusión ($\nabla \cdot (A \nabla \varphi)$) en el tiempo que llamaremos Sistema de la Ecuación de Estado

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla \varphi) + V \cdot \nabla \varphi + f(\varphi) &= 0 \text{ en } Q = \Omega \times [0, T], \\ A \nabla \varphi \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma = \Gamma \times [0, T], \\ \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x) \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad . \quad (\text{SEE})$$

donde $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ($d \geq 1$, dimensión) es el dominio, una región suave, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suave, n representa un vector unitario normal en Γ (apuntando hacia fuera de Ω), $T > 0$ es el tiempo (incluso $T = \infty$). La figura 1 muestra el dominio de (SEE). El producto interno \cdot es el usual ($a, b \in \mathbf{R}^d, a \cdot b = \sum_{i=1}^d a_i b_i$), A es una función tensor real (matriz de difusión), $V : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ es una función vectorial, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función real y $\varphi(x, t)$ es la función del fenómeno que ocurre en Q .

Además se asume que:

$$A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbf{R}^d \text{ para casi todo } x \in \Omega$$

lo que significa que A es uniformemente definida positiva para casi todo x en Ω .

Para la función vectorial V se tiene:

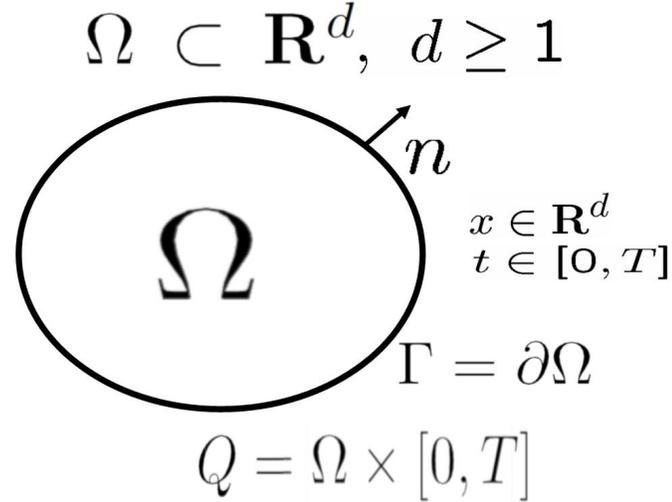


Figure 1: Dominio del problema

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V &= 0 \text{ (libre de divergencia)} \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= 0 \text{ (constante en el tiempo)} \\ V \cdot n &= 0 \text{ on } \Gamma \end{aligned}$$

Veamos las razones por lo que un control es necesario.
Sea una función reacción dada por

$$f(\varphi) = C - \lambda e^\varphi$$

donde $C, \lambda > 0$ son constantes reales positivas.
Entonces la solución de estado estable para tal f de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(\varphi) = 0 \tag{1}$$

está dada por

$$\varphi_s = \frac{\ln C}{\lambda}$$

Note que φ_s es constante por lo que la ecuación (1), sustituyendo φ_s se cumple (ya que $f(\varphi_s) = C - \lambda e^{\varphi_s} = C - \lambda e^{\frac{\ln C}{\lambda}} = 0$).

Se supone que para $t < 0$, el sistema estuvo en su solución estacionaria estable $\varphi = \varphi_s$.

Ahora con $\varphi = \varphi_s$ en $t = 0$ se introduce una perturbación constante en $\delta\varphi$, independiente de x y t (o sea con $\nabla \delta\varphi = 0$ y $\frac{\partial \delta\varphi}{\partial t} = 0$).

Dado que se trata de una perturbación constante en el tiempo y el espacio, el sistema evoluciona bajo el siguiente modelo de una ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \lambda e^\varphi - C, \lambda, C > 0, \text{ constantes reales} \\ \varphi(0) &= \varphi_s + \delta\varphi \end{aligned}$$

Este modelo se comporta con una perturbación constante y positiva, $\delta\varphi > 0$, de forma que $\varphi \rightarrow +\infty$ (pero además en un tiempo finito crece muy rápidamente), o bien si la perturbación es negativa, $\delta\varphi < 0$, se tiene que $\varphi_{t \rightarrow \infty} \rightarrow -\infty$ o sea tiende a menos infinito conforme avanza el tiempo.

Lo anterior significa que alrededor de una solución de estado estable, la introducción de una pequeña perturbación constante hace al sistema inestable.

Para verificar lo anterior se procede mediante el Método de Euler para integrar numéricamente a la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \lambda e^\varphi - C, \lambda, C > 0, \text{ constantes reales} \\ \varphi(0) &= \frac{\ln C}{\lambda} + \delta\varphi\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad tomamos $\Delta t = 1$, $C = 1$, $\lambda = 1$, $\delta\varphi = 0.1 > 0$ y aproximamos $\frac{d\varphi}{dt}$ por una a diferencia entre el tiempo n y el tiempo $n - 1$. De donde resulta

$$\varphi_n = \exp(\varphi_{n-1}) + \varphi_{n-1} - 1.$$

La condición inicial es

$$\varphi_0 = \frac{\ln C}{\lambda} + \delta\varphi = 0.1$$

Por tanto

$$\varphi_1 = \exp(0.1) + 0.1 - 1 = 0.20517$$

$$\varphi_2 = \exp(0.20517) + 0.20517 - 1 = 0.4329$$

$$\varphi_3 = \exp(0.4329) + 0.4329 - 1 = 0.97464$$

$$\varphi_4 = \exp(0.97464) + 0.97464 - 1 = 2.6248$$

$$\varphi_5 = \exp(2.6248) + 2.6248 - 1 = 15.427$$

$$\varphi_6 = \exp(15.427) + 15.427 - 1 = 5.0103 \times 10^6$$

$$\varphi_7 = \exp(5.0103 \times 10^6) + 5.0103 \times 10^6 - 1 = 4.3922 \times 10^{2175945}$$

Note que $\varphi(t)$ crece muy rápidamente en tiempo finito, o sea tiende aceleradamente a ∞ .

Suponiendo que $\delta\varphi = -0.1 < 0$, con las mismas constantes C y λ , se tiene

$$\varphi_0 = -0.1$$

$$\varphi_1 = \exp(-0.1) + (-0.1) - 1 = -0.19516$$

$$\varphi_2 = \exp(-0.19516) + (-0.19516) - 1 = -0.37246$$

$$\varphi_3 = \exp(-0.37246) + (-0.37246) - 1 = -0.68342$$

$$\varphi_4 = \exp(-0.68342) + (-0.68342) - 1 = -1.1785$$

$$\varphi_5 = \exp(-1.1785) + (-1.1785) - 1 = -1.8708$$

$$\varphi_6 = \exp(-1.8708) + (-1.8708) - 1 = -2.7168$$

$$\varphi_7 = \exp(-2.7168) + (-2.7168) - 1 = -3.6507$$

$$\varphi_8 = \exp(-3.6507) + (-3.6507) - 1 = -4.6247$$

$$\varphi_9 = \exp(-4.6247) + (-4.6247) - 1 = -5.6149$$

$$\varphi_{10} = \exp(-5.6149) + (-5.6149) - 1 = -6.6113$$

$$\varphi_{11} = \exp(-6.6113) + (-6.6113) - 1 = -7.6100$$

En este caso $\varphi(t)$ es decreciente y lentamente tiende a $-\infty$.

En cualquier caso es claro que se necesita un control para evitar tales comportamientos y regresar al sistema a la solución de estado estable φ_s .

2 Linearización de (SEE)

La idea es linearizar el sistema (SEE) para luego introducir una función que estabilice el sistema linearizado, mas precisamente, que se haga cargo de llevar una función de perturbación pequeña y quizás dependiente de x a cero o sea que con la función de control el sistema (SEE) regrese a una solución de estado estable.

Se tiene que para $t < 0$, el sistema se mantuvo en su solución estacionaria estable $\varphi = \varphi_s$.

Ahora con $\varphi = \varphi_s$ en $t \geq 0$ se tiene

$$\varphi(0) = \varphi_s + \delta\varphi$$

donde la perturbación $\delta\varphi$ es "pequeña" y posiblemente dependiente de $x \in \Omega$.

Entonces la perturbación $\varphi - \varphi_s = \delta\varphi$ debe satisfacer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\varphi}{\partial t} - \nabla \cdot (A\nabla \delta\varphi) + V \cdot \nabla \delta\varphi + K\delta\varphi &= 0 \text{ en } Q, \\ A\nabla \delta\varphi \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma, \\ \delta\varphi(x) &= \delta\varphi_s(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{SLEE}$$

donde $K = f'(\delta\varphi) \neq 0$ (constante real negativa) y este sistema es la versión lineal de (SEE).

3 Introducción de un control para (SLEE)

Por simplicidad sea $\omega \subset \Omega^0$ un subconjunto simplemente conexo y renombramos $\delta\varphi = y$.

Hay otros tipos de control, por ejemplo sobre la frontera, pero en esta caso se asume que el control es como un flujo interno en Ω .

Se introduce entonces una función $v(x, t)$ en la linealización de forma que el sistema a controlar es

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot (A\nabla y) + V \cdot \nabla y + Ky &= v\chi_{\omega \times (0, T)} \text{ en } Q, \\ A\nabla y \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma, \\ y(x) &= y_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{SCLEE}$$

donde $\chi_{\omega \times (0, T)}$ es la función característica en el conjunto $\omega \times (0, T)$, $y_0 = \delta\varphi_s$ y en donde se reemplazo $\delta\varphi$ por y .

El sistema (SCLEE) implica que dado v se tiene que resolver para y , lo cual puede ser algo complicado pero hay software para este tipo de ecuaciones en derivadas parciales.

La resolución del sistema con control (SCLEE) se traduce en un problema de control óptimo que consiste en

$$\min_{v \in \mathcal{U}} J(v) \tag{PCO}$$

donde $\mathcal{U} = L^2(\omega \times (0, T))$ y

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\omega \times (0, T)} |v|^2 dxdt + \frac{k_1}{2} \int_Q |y|^2 dxdt + \frac{k_2}{2} \int_{\Omega} |y(T)|^2 dx$$

donde $k_1, k_2 > 0$ y y es una función de v de la solución del sistema (SCLEE).

Notas:

1. Existe una única solución de (PCO) ya que J es convexa y y es la única solución dada por la condición inicial y v de la ecuación linealizada.
2. Los tres términos integrales de J son convexos y tienen como objetivo reducir el costo del control y hacer que y (que es la perturbación $\delta\varphi$) no crezca a largo del tiempo y que sea muy cercana a cero en el tiempo final T .

4 Resolución del Problema (PCO)

Tomando en consideración que en (PCO) se tiene una funcional cuadrática (convexa), la solución es equivalente conceptualmente a la resolución de un problema de optimización por medio de la condición de primer orden. Esto es

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbf{D}} f(x)$$

con f convexa en \mathbf{D} . Con $x^* \in \mathbf{D}$ tal que $f'(x^*) = 0$, entonces x^* es la solución óptima.

De esta forma la resolución de (PCO) es equivalente a resolver en los espacios funcionales adecuados la primera variación de J ,

$$J'(v) = 0.$$

5 Cálculo de $J'(v)$

Mediante el análisis de perturbaciones, sean $v, \delta v \in \mathcal{U}$ con δv una funcional de perturbación "pequeña".

$$\begin{aligned}\delta J(v) &= J(v + \delta v) - J(v) = \\ &\langle J'(v), \delta v \rangle + O(|\delta v|^2)\end{aligned}$$

donde $O(|\delta v|^2)$ son términos que se pueden omitir.

En el espacio de Hilbert de funciones (\mathcal{U}) se tiene que $J'(v) \in \mathcal{U}$ y

$$\langle J'(v), \delta v \rangle = \int_{\omega \times (0, T)} J'(v) \delta v dx dt.$$

La primera variación de J es

$$\delta J(v) = \int_{\omega \times (0, T)} v \delta v dx dt + k_1 \int_Q y \delta y dx dt + k_2 \int_{\Omega} y(T) \delta y(T) dx$$

Por otro lado, usando el sistema (SCLEE) se calcula la variación de δy ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta y}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla \delta y) + V \cdot \nabla \delta y + K \delta y &= \delta v \chi_{\omega \times (0, T)} \text{ en } Q, \\ A \nabla \delta y \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma, \\ \delta y(x) &= 0, \quad x \in \Omega.\end{aligned}\tag{S\delta yEE}$$

Por medio de la técnica de la ecuación adjunta (que es la versión del método de multiplicadores de Lagrange en forma variacional) se va a identificar para una función $p(x, t)$ suficiente diferenciable en el espacio y el tiempo al sistema de estado adjunto (SEA) del sistema (SCLEE). Esto se hace multiplicando la ecuación perturbada de estado del sistema (S\delta yEE) por p e integrando convenientemente. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}\int_Q p \frac{\partial \delta y}{\partial t} dx dt - \int_Q p (\nabla \cdot (A \nabla \delta y)) dx dt + \int_Q p (V \cdot \nabla \delta y) dx dt + K \int_Q p \delta y dx dt = \\ \int_{\omega \times (0, T)} p \delta v \chi_{\omega \times (0, T)}\end{aligned}$$

Integrando por partes para quitar las diferenciales y dejar todo con respecto de p .

$$\int_Q p \frac{\partial \delta y}{\partial t} dx dt = \int_{\Omega} p(T) \frac{\partial \delta y(T)}{\partial t} dx - \int_{\Omega} p(0) \frac{\partial \delta y(0)}{\partial t} dx + \int_Q \frac{\partial p}{\partial t} \delta y dx dt$$

Aplicando el teorema de Stokes,

$$- \int_Q p (\nabla \cdot (A \nabla \delta y)) dx dt = - \int_Q (\nabla \cdot A^T \nabla p) \delta y dx dt + \int_{\Sigma} p (A \nabla \delta y) d\Gamma dt + \int_{\Sigma} \delta y (A^T \nabla p \cdot n) d\Gamma dt -$$

$$\int_Q (V \cdot \nabla p) \delta y dx dt + \int_{\Sigma} V \cdot n p \delta y d\Gamma dt$$

$$\int_Q p \delta y dx dt = \int_{\Omega} p(T) \delta y(T) dx dt$$

Se asume que $A^T \nabla p \cdot n = 0$ en Σ . $p(T) = k_2 y(T)$

Se tiene por identificación de términos el denominado sistema de estado adjunto (que es un sistema que se resuelve en reversa, o sea de T a 0) para p

$$\begin{aligned}- \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (A^T \nabla p) - V \cdot \nabla p + K p &= k_1 y \text{ en } Q, \\ A^T \nabla p \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma, \\ p(T) &= k_2 y(T).\end{aligned}\tag{SEA}$$

Además se tiene

$$\begin{aligned}\delta J'(v) &= \int_{\omega \times (0, T)} (v + p) \delta v dx dt = \\ &\int_{\omega \times (0, T)} J'(v) \delta v dx dt\end{aligned}$$

De donde se tiene

$$J'(v) = (v + p) |_{\omega \times (0, T)}$$

6 Condiciones de optimalidad

La ecuación a resolver es

$$J'(v) = 0, v \in \mathcal{U} = L^2(\omega \times (0, T)).$$

que da origen al denominado Sistema de Optimalidad para el Problema de Control Óptimo (SOPCO), el cual consiste de tres partes:

$$u = -p|_{\omega \times (0, T)}. \quad (\text{SO.1})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla y) + V \cdot \nabla y + Ky = v \chi_{\omega \times (0, T)} \text{ en } Q, \\ A \nabla y \cdot n = 0 \text{ en } \Sigma \\ y(x) = y_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{SO.2})$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (A^T \nabla p) - V \cdot \nabla p + Kp = k_1 y \text{ en } Q, \\ A^T \nabla p \cdot n = 0 \text{ en } \Sigma, \\ p(T) = k_2 y(T). \end{cases} \quad (\text{SO.3})$$

7 Resolución del sistema de optimalidad (SOPCO)

El cálculo de la solución mediante el sistema de optimalidad tiene varios caminos, debido a la interdependencia entre u , y y p .

7.1 Formulación como problema de frontera de dos puntos

Una primera técnica para resolver el sistema de optimalidad es acoplar los dos sistemas de ecuaciones eliminando u . Esto es, se asume $u = -p|_{\omega \times (0, T)}$, de donde al sustituir en (SO.2) se obtiene el Sistema de Estado siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla y) + V \cdot \nabla y + Ky - p|_{\omega \times (0, T)} &= 0 \text{ en } Q \\ A \nabla y \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma \\ y(x) &= y_0(x), x \in \Omega. \end{aligned}$$

Y por otro lado se tiene el sistema de Estado Adjunto:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (A^T \nabla p) - V \cdot \nabla p + Kp &= k_1 y \text{ en } Q \\ A^T \nabla p \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma \\ p(T) &= k_2 y(T). \end{aligned}$$

Se tiene, en este caso, un Sistema de Ecuaciones llamado Problema de Valor de Frontera de dos puntos (se trata de dos sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas por las condiciones de frontera en los puntos (funcionales) p y y).

En general para la resolución de este tipo de problemas se tienen los trabajos de H. B. Keller, V. Pereyra y M. Lentini (tesis doctoral), aun para casos donde la ecuación de estado es no lineal. Note que la ecuación de estado adjunta es siempre lineal ya que siempre se obtiene por métodos variacionales de la linearización de la ecuación de estado.

Por otro lado esta técnica de resolver el sistema de optimalidad es relevante por su relación con la resolución de problemas de control usando las técnicas de la ecuación de Kalman/Ricatti donde la función de control explícito (u) es eliminada.

7.2 Técnica por Aproximación Numérica de $J'(v) = 0$

Otra técnica para resolver el (SOPCO) es asumir u como la variable principal. Así con u dada, mediante la resolución de (SO.2) se obtiene y que a su vez permite mediante por (SO.3) conocer p .

Como se menciono antes en la formulación variacional se quiere resolver precisamente el problema de control por la condición de la primera forma variacional

$$\begin{aligned} \text{Encontrar } u \in \mathcal{U} \text{ tal que} \\ \int_{\omega \times (0, T)} J'(u) v dx dt = 0, \forall v \in \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (\text{PCOV})$$

donde v satisface los sistemas de la Ecuación de Estado y de la Ecuación de Estado Adjunto

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla y) + V \cdot \nabla y + Ky &= v \chi_{\omega \times (0, T)} \text{ en } Q \\ A \nabla y \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma \\ y(x) &= 0, \quad x \in \Omega. \\ -\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (A^T \nabla p) - V \cdot \nabla p + Kp &= k_1 y \text{ en } Q \\ A^T \nabla p \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma \\ p(T) &= k_2 y(T) \end{aligned}$$

Note que se tiene un ciclo de dependencia y depende de v , p depende de y y v depende de p , lo que permite estimar $J'(v) = (v + p)|_{\omega \times (0, T)}$. Por lo que si se itera para que la primera variación de J se anule, se puede calcular la solución.

Otra característica que se tiene es que por ser $J'(v)$ un operador lineal se puede escribir como

$$J'(v) = \mathcal{A}v - \beta$$

donde $\mathcal{A}v = (v + p_{-v})|_{\omega \times (0, T)}$ y p_{-v} se estima de lo siguientes sistemas de estado (note que se asume dado un v y se cambio en la condición de frontera $y(x) = 0$ en lugar de $y(x) = y_0(x)$) y de estado adjunto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla y) + V \cdot \nabla y + Ky &= v|_{\omega \times (0, T)} \text{ en } Q \\ A \nabla y \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma \\ y(x) &= 0, \quad x \in \Omega. \\ -\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (A^T \nabla p) - V \cdot \nabla p + Kp &= k_1 y \text{ en } Q \\ A^T \nabla p \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma \\ p(T) &= k_2 y(T) \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle J'(v_1), v_2 \rangle &= \int_{\omega \times (0, T)} J'(v_1) v_2 dx dt = \int_{\omega \times (0, T)} (\mathcal{A}v_1) v_2 dx dt \\ &= \int_{\omega \times (0, T)} v_1 v_2 dx dt + k_1 \int_Q y_1 y_2 dx dt + k_2 \int_{\Omega} y_1(T) y_2(T) dx \end{aligned}$$

De aquí se deduce que la matriz \mathcal{A} es fuertemente elíptica y no negativa. Para v se tiene que

$$\int_{\omega \times (0, T)} (\mathcal{A}v) v dx dt \geq \int_{\omega \times (0, T)} v^2 dx dt$$

por lo que el operador \mathcal{A} es estrictamente \mathcal{U} -elíptico. Y por tanto es un automorfismo del espacio de funciones de \mathcal{U} .

O sea $J'(u) = \mathcal{A}u - \beta = 0$ y por tanto $\mathcal{A}u = \beta$, donde u es una solución del espacio de funciones \mathcal{U} de los sistemas de ecuaciones de estado y de estado adjunto.

Por otro lado, dado un u_0 , se obtiene β . Se conoce entonces el efecto de $\mathcal{A}u$ y no se requiere calcular explícitamente \mathcal{A} si se usa, por ejemplo, el método de Gradiente Conjugado para residuos ya que para estimar $J'(u) = 0$, solo se requieren los residuos y la acción del gradiente.

Se tiene entonces el siguiente problema equivalente para el problema (PCOV)

$$\begin{aligned} \text{Encontrar } u \in \mathcal{U} \text{ tal que} \\ \int_{\omega \times (0, T)} J'(u) v dx dt = \int_{\omega \times (0, T)} \mathcal{A}u v dx dt = \int_{\omega \times (0, T)} \beta v dx dt = 0, \forall v \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Que tiene solución por el Teorema de Lax-Milgram.

8 Método del Gradiente Conjugado

El Método del Gradiente Conjugado tiene las siguientes propiedades en un espacio de Hilbert:

Sea el problema varacional lineal

$$\begin{aligned} u &\in V \\ a(u, v) &= L(v), \forall v \in V \end{aligned} \tag{PVL}$$

donde V es un espacio real de Hilbert para el producto interno (\cdot, \cdot) con norma asociada $\|\cdot\|, a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ es una función bilineal, continua V -elíptica (esto es $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V, \alpha > 0$) y simétrica y $L : V \rightarrow \mathbf{R}$ es una función lineal y continua.

Con estas condiciones por el teorema de Lax-Milgram el (PVL) tiene solución única.

El algoritmo del Gradiente Conjugado (originalmente fue formulado por el año de 1950) para este problema es el siguiente:

Sea $\varepsilon > 0$ la tolerancia para aceptar la aproximación del método.

1. $u^0 \in V$
2. $g^0 \in V$
 $(g^0, v) = a(u^0, v) - L(u^0), \forall v \in V$
3. Si $g^0 \neq 0$, sea $w^0 = g^0$
4. Para $n \geq 0$, se tienen u^n, g^n, w^n con $g^n \neq 0$ y $w^n \neq 0$.
 Se calcula u^{n+1}, g^{n+1} y si es necesario w^{n+1} como sigue

$$\rho^n = \frac{\|g^n\|^2}{a(w^n, w^n)}$$
5. $\bar{g}^n \in V$
 $(\bar{g}^n, v) = a(w^n, v), \forall v \in V$
6. $u^{n+1} = u^n - \rho^n w^n$
7. $g^{n+1} = g^n - \rho^n \bar{g}^n$
8. Si $\frac{\|g^{n+1}\|}{\|g^0\|} \leq \varepsilon$ la solución es $u = u^{n+1}$ y se termina.
9. $\gamma^n = \frac{\|g^{n+1}\|^2}{\|g^n\|^2}$
10. $w^{n+1} = g^{n+1} + \gamma^n w^n$
11. $n = n + 1$ y se repite desde 4.

La velocidad de convergencia del algoritmo de Gradiente Conjugado se puede estimar de la relación siguiente:

$$\|u^n - u\| \leq C \|u^0 - u\| \left(\frac{\sqrt{\nu_0} - 1}{\sqrt{\nu_0} + 1} \right)^n$$

donde $\nu_0 = \frac{\sup_{v \in V \setminus \{0\}} a(v, v)}{\inf_{v \in V \setminus \{0\}} a(v, v)} = \|A\| \|A^{-1}\|$

con A un automorfismo de V tal que $a(v, w) = (Av, w), \forall v, w \in V$.

8.1 Método del Gradiente Conjugado para (PCO)

Sea $\varepsilon > 0$ la tolerancia para aceptar la aproximación a la solución del método.

1. $u^0 \in \mathcal{U}$.
2. Con u^0 se resuelve el Sistema de la Ecuación de Estado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^0}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla y^0) + V \cdot \nabla y^0 + Ky^0 &= u^0|_{\omega \times (0, T)} \text{ en } Q \\ A \nabla y^0 \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma \\ y^0(x) &= y_0, x \in \Omega. \end{aligned}$$

Con y^0 se resuelve el sistema de Estado Adjunto:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p^0}{\partial t} - \nabla \cdot (A^T \nabla p^0) - V \cdot \nabla p^0 + Kp^0 &= k_1 y^0 \text{ en } Q \\ A^T \nabla p^0 \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma \\ p^0(T) &= k_2 y^0(T). \end{aligned}$$

$$3. g^0 = (u^0 + p^0) |_{\omega \times (0, T)}$$

$$4. w^0 = g^0.$$

5. Para $n \geq 0$, se tienen u^n, g^n, w^n con $g^n \neq 0$ y $w^n \neq 0$. Se calculan \bar{y}^n y \bar{p}^n de los sistemas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}^n}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla \bar{y}^n) + V \cdot \nabla \bar{y}^n + K \bar{y}^n &= w^n |_{\omega \times (0, T)} \text{ en } Q \\ A \nabla \bar{y}^n \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma \\ \bar{y}^n(x) &= 0, x \in \Omega. \\ -\frac{\partial \bar{p}^n}{\partial t} - \nabla \cdot (A^T \nabla \bar{p}^n) - V \cdot \nabla \bar{p}^n + K \bar{p}^n &= k_1 \bar{y}^n \text{ en } Q \\ A^T \nabla \bar{p}^n \cdot n &= 0 \text{ en } \Sigma \\ \bar{p}^n(T) &= k_2 \bar{y}^n(T). \end{aligned}$$

$$6. \bar{g}^n (= \mathcal{A}w^n) = (w^n + \bar{p}^n) |_{\omega \times (0, T)}$$

$$7. \rho^n = \frac{\int_{\omega \times (0, T)} \|g^n\|^2 dx dt}{\int_{\omega \times (0, T)} \bar{g}^n w^n dx dt}$$

$$8. u^{n+1} = u^n - \rho^n w^n$$

$$9. g^{n+1} = g^n - \rho^n \bar{g}^n$$

10. Si $\frac{\int_{\omega \times (0, T)} \|g^{n+1}\|^2 dx dt}{\int_{\omega \times (0, T)} \|g^0\|^2 dx dt} \leq \varepsilon$ la solución es $u = u^{n+1}$ y se termina.

$$11. \gamma^n = \frac{\int_{\omega \times (0, T)} \|g^{n+1}\|^2 dx dt}{\int_{\omega \times (0, T)} \|g^n\|^2 dx dt}$$

$$12. w^{n+1} = g^{n+1} + \gamma^n w^n$$

13. $n = n + 1$ y se repite desde 5.

9 Ejemplo 1 de la resolución de un problema de control

En esta sección se describe a detalle la construcción de un algoritmo de Gradiente Conjugado para resolución de un problema de control para un problema unidimensional en el tiempo.

El espacio-tiempo del problema es denotado por $Q = [0, L] \times [0, T]$, donde $L > 0$ es la longitud de la región de la variable intrínseca $x \in [0, L]$ que evoluciona a través del tiempo (t) la variable de estado (o del sistema) de $y(x, t)$ hasta un tiempo final $t = T > 0$. Dependiendo del problema es posible tener $T = \infty$, en nuestro caso, la razón de elegir un tiempo finito es por fines prácticos para la observación del sistema dentro de un periodo limitado, en lugar de esperar un tiempo infinito.

La elección del Gradiente Conjugado se justifica porque las versiones discretizadas corresponden a problemas cuadráticos de dimensión finita y se tiene la convergencia en a lo más un número finito de pasos (los vectores ortogonales estimados por el algoritmo del Gradiente Conjugado son una base del espacio discretizado).

Las ecuaciones de estado del sistema son

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial y}{\partial x} - y = 0, (x, t) \in Q = [0, L] \times [0, T] \\ y(x, 0) = y_0, x \in [0, L] \\ -\mu \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = 0, t \in [0, T] \\ \mu \frac{\partial y(L, t)}{\partial x} = 0, t \in [0, T] \end{cases} \quad (\text{E})$$

donde μ, ϵ son constantes positivas apropiadas. El sistema (E) para $y_0 \neq 0$ amplifica la variable de estado y por lo que se quiere un control para que $y(\cdot, t)$ y $y(\cdot, T)$ se anulen o sean pequeños en un periodo finito de tiempo.

9.1 El problema de control

La formulación del correspondiente problema de control es la siguiente

$$\begin{cases} \text{Buscar } u \in \mathcal{U}[0, T] \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in \mathcal{U}[0, T] \end{cases} \quad (\text{CP})$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \|v\|^2 dt + \frac{k_1}{2} \int_Q \|y\|^2 dxdt + \frac{k_2}{2} \int_0^L \|y(x, T)\|^2 dx,$$

con k_1 y k_2 son constantes positivas apropiadas y es la solución del siguiente sistema de estado (SE) para el control v .

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial y}{\partial x} - y = 0, Q = [0, L] \times [0, T] \\ y(x, 0) = y_0, x \in [0, L] \\ -\mu \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = v(t), t \in [0, T] \\ \mu \frac{\partial y(L, t)}{\partial x} = 0, t \in [0, T] \end{cases} \quad (\text{SE})$$

Note que el control v se introdujo en $-\mu \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = v(t)$ y que los objetivos que se persiguen con J son controlar con un mínimo costo del control v (este es el termino para esto $\frac{1}{2} \int_0^T \|v\|^2 dt$), que la función a lo largo del tiempo regrese a ser pequeña (este es el termino para esto $\frac{k_1}{2} \int_Q \|y\|^2 dxdt$) y que regrese o este muy cerca del cero cuando el tiempo sea igual a T (este es el termino para esto $\frac{k_2}{2} \int_0^L \|y(x, T)\|^2 dx$).

9.2 Caso continuo

En este apartado se desarrollan en detalle las integraciones variacionales bajo las condiciones de optimalidad de la primera variación del problema CP. Este paso corresponde al estudio del problema en forma continua, de ahí su denominación como "caso continuo". Los sistemas de ecuaciones que se obtienen sirven de referencia de los sistemas de ecuaciones que aparecen en la discretización en el tiempo y completa del sistema estado (SE) con un control bajo el problema de control óptimo (CP). Los desarrollos integrales de esta sección dan la estructura de las sistemas de ecuaciones de las fases de discretización.

La primera variación de J es

$$\delta J(v) = \int_0^T v \cdot \delta v dt + k_1 \int_Q y \cdot \delta y dxdt + k_2 \int_0^L y(x, T) \cdot \delta y(x, T) dx$$

La primera variación, o sea, dada una pequeña perturbación (δ) en las variables, del sistema (SE) es

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta y}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial \delta y}{\partial x} - y = 0 \text{ in } Q = [0, L] \times [0, T] \\ \delta y(x, 0) = 0, x \in [0, L] \\ -\mu \frac{\partial \delta y(0, t)}{\partial x} = \delta v(t), t \in [0, T] \\ \mu \frac{\partial \delta y(L, t)}{\partial x} = 0, t \in [0, T] \end{cases} \quad (\delta \text{SE})$$

El siguiente paso es formular un problema variacional que se integrara con $p(x, t)$, una función suave apropiada para permitir la integración de la primera ecuación del sistema (δSE) en Q . Se obtiene la ecuación integral-diferencial siguiente

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q p \left(\frac{\partial \delta y}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial \delta y}{\partial x} - y \right) dxdt = \\ & \int_Q p \frac{\partial \delta y}{\partial t} dxdt - \mu \int_Q p \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} dxdt + \epsilon \int_Q p \frac{\partial \delta y}{\partial x} dxdt - \int_Q p \delta y dxdt \end{aligned} \quad (2)$$

Las cuatro integrales de (2) se desarrollan individualmente a continuación

$$\begin{aligned}
\text{i.- } \int_Q p \frac{\partial \delta y}{\partial t} dx dt &= \int_0^T \left[\int_0^L p \frac{\partial \delta y}{\partial t} dx \right] dt = (\text{Integrando respecto a } dt) \\
&\left[\int_0^L p(x, t) \delta y(x, t) dx \right]_0^T - \int_Q \frac{\partial p}{\partial t} \delta y dx dt = \\
\int_0^L p(x, T) \delta y(x, T) dx - \int_0^L p(x, 0) \delta y(x, 0) dx - \int_Q \frac{\partial p}{\partial t} \delta y dx dt &= \\
(\text{Usando que } \delta y(x, 0) = 0, x \in [0, L], \text{ se tiene}) & \\
\int_0^L p(x, T) \delta y(x, T) dx - \int_Q \frac{\partial p}{\partial t} \delta y dx dt. & \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii.- } -\mu \int_Q p \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} dx dt &= \left(\text{Integrando respecto a } p \text{ y a } \int_0^L \left[\int_0^T \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} dt \right] dx \right) \\
\left[-\mu \int_0^T p \frac{\partial \delta y}{\partial x} dt \right]_0^L + \mu \int_Q \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial x} dx dt &= \left[\int_0^T p \left(-\mu \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) dt \right]_0^L + \mu \int_Q \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial x} dx dt = \\
(\text{Sustituyendo } -\mu \frac{\partial \delta y(0, t)}{\partial x} = \delta v(t), t \in [0, T]) & \\
\left[\int_0^T p \delta v(t) dt \right]_0^L + \mu \int_Q \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial x} dx dt &= \\
\left(\text{Integrando el segundo termino respecto a } \frac{\partial p}{\partial x} \text{ y a } \int_0^L \left[\int_0^T \frac{\partial \delta y}{\partial x} dt \right] dx \right) & \\
\left[\int_0^T p \delta v(t) dt \right]_0^L + \left[\mu \int_0^T \frac{\partial p}{\partial x} \delta y dt \right]_0^L - \mu \int_Q \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \delta y dx dt. & \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii.- } \epsilon \int_Q p \frac{\partial \delta y}{\partial x} dx dt &= \left(\text{Integrando respecto } p \text{ y a } \int_0^L \left[\int_0^T \frac{\partial \delta y}{\partial x} dt \right] dx \right) \\
\left[\epsilon \int_0^T p \delta y dt \right]_0^L - \epsilon \int_Q \frac{\partial p}{\partial x} \delta y dx dt. & \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\text{iv.- } - \int_Q p \delta y dx dt = \int_Q (-p) \delta y dx dt. \tag{6}$$

De las integrales anteriores resulta

$$\begin{aligned}
(3) + (4) + (5) + (6) &= \int_Q \left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \epsilon \frac{\partial p}{\partial x} - p \right) \delta y dx dt + \int_0^L p(x, T) \delta y(x, T) dx + \\
&\quad \left[\int_0^T p \delta v(t) dt \right]_0^L + \left[\int_0^T \left(\mu \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \epsilon p(x, t) \right) \delta y(x, t) dt \right]_0^L = \\
&\quad \text{(Note que el control sólo actua en el punto } x = 0, \text{ por lo que } \left[\int_0^T p \delta v(t) dt \right]_0^L = \\
&\quad \quad \quad - \int_0^T p(0, t) \delta v(t) dt, \text{ se tiene entonces)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T (-p(0, t)) \delta v(t) dt + \int_Q \left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \epsilon \frac{\partial p}{\partial x} - p \right) \delta y dx dt + \int_0^L p(x, T) \delta y(x, T) dx + \\
\left[\int_0^T \left(\mu \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \epsilon p(x, t) \right) \delta y(x, t) dt \right]_0^L.
\end{aligned}$$

La condición de optimalidad sobre $\delta J(v)$ implica que los términos anteriores tiene un correspondiente termino con la primera variación de J tal como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\delta J(v) &= \int_0^T (-p(0, t)) \delta v(t) dt + \int_Q \left(-\frac{\partial p}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \epsilon \frac{\partial p}{\partial x} - p \right) \delta y dx dt \\
&\quad \int_0^T v \cdot \delta v dt + k_1 \int_Q y \cdot \delta y dx dt \\
&\quad + \int_0^L p(x, T) \delta y(x, T) dx \\
&\quad + k_2 \int_0^L y(x, T) \cdot \delta y(x, T) dx
\end{aligned}$$

por lo que los términos restantes deben ser nulos. Lo cual se tiene con las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial p}{\partial x}(L, t) + \epsilon p(L, t) &= 0, \quad t \in [0, T], \\
\mu \frac{\partial p(0, t)}{\partial x} + \epsilon p(0, t) &= 0, \quad t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Por eso el sistema de ecuaciones adjunto es

$$\begin{cases} p(x, T) = k_2 y(x, T), \quad x \in [0, L] \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial p}{\partial x} + p = -k_1 y, \quad (x, y) \in Q \\ \mu \frac{\partial p}{\partial x}(L, t) + \epsilon p(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\ \mu \frac{\partial p}{\partial x}(0, t) + \epsilon p(0, t) = 0, \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (\delta ASE)$$

Y además como $\delta J(v) = (\nabla J(v), \delta v)_{\mathcal{U}[0, T]}$ en la norma de integral correspondiente $\left(\delta J(v) = \int_0^T (v(t) - p(0, t)) \delta v(t) dt \right)$ se tiene

$$\nabla J(v) = v - p(0, t)$$

9.3 Discretización del tiempo

Es conveniente que la discretización en el tiempo sea en la dirección hacia adelante, lo que genera un punto extra sobre el termino $\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t}$. En la siguiente sección se muestra como esto ajusta para los cálculos de la forma centrada de $\mu \frac{\partial^2 y^n}{\partial x^2}$ de la primera ecuación del sistema (δSE .)

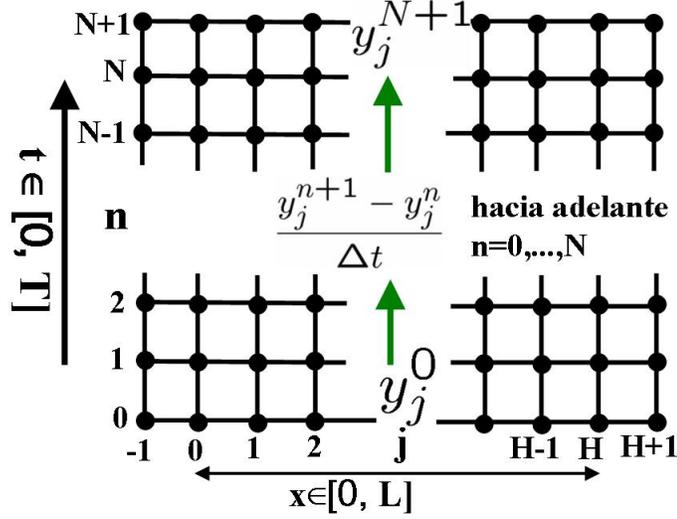


Figure 2: Malla para la discretización de $\frac{\delta y^{n+1} - \delta y^n}{\Delta t}$, $n = 0, \dots, N$

La discretización de la primera variación en el tiempo de $(J^{\Delta t}(v))$ es

$$J^{\Delta t}(v) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^N \|v\|^2 + \frac{k_1 \Delta t}{2} \sum_{n=0}^N \int_0^L \|y^n\|^2 dx + \frac{k_2}{2} \int_0^L \|y^{N+1}(x)\|^2 dx$$

donde $N > 0$, es un entero y $\Delta t = \frac{T}{N}$.

La discretización hacia adelante (forward) en el tiempo para (SE) es

$$\begin{cases} y^0 = y_0 \\ \text{Para } n = 1, \dots, N \\ \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} - \mu \frac{\partial^2 y^n}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial y^n}{\partial x} - y^n = 0, \text{ en } [0, L] \\ -\mu \frac{\partial y^n(0)}{\partial x} = v(t), \\ \mu \frac{\partial y^n(L)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (\text{SE}^{\Delta t})$$

Observe que de forma natural se obtiene una línea extra $N + 1$ al realizar los cálculos hacia adelante, por lo que $y^{N+1}(x)$ es la discretización de $y(x, T)$. La figura 2 describe donde se calcula usando esta discretización del tiempo.

La primera variación de J para el tiempo discretizado es

$$\delta J^{\Delta t}(v) = \left(\nabla J^{\Delta t}(v), \delta v \right)_{\mathcal{U}^{\Delta t}}$$

donde se tiene

$$\delta J^{\Delta t}(v) = \Delta t \sum_{n=0}^N v^n \delta v^n + k_1 \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L y^n \delta y^n dx + k_2 \int_0^L y^{N+1} \delta y^{N+1} dx$$

Por otro lado, la perturbación de $(\text{SE}^{\Delta t})$ es

$$\begin{cases} \delta y^0 = 0 \\ \text{for } n = 1, \dots, N \\ \frac{\delta y^{n+1} - \delta y^n}{\Delta t} - \mu \frac{\partial^2 \delta y^n}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial \delta y^n}{\partial x} - \delta y^n = 0 \text{ en } [0, L] \\ -\mu \frac{\partial \delta y^n(0)}{\partial x} = \delta v^n \\ \mu \frac{\partial \delta y^n(L)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (\delta \text{SE}^{\Delta t})$$

En forma similar al caso de la sección 9.2 se multiplica por una función apropiada p^n para integrar el sistema $(\delta SE^{\Delta t})$. Se tiene entonces la integral

$$0 = \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L p^n \left(\frac{\delta y^{n+1} - \delta y^n}{\Delta t} - \mu \frac{\partial^2 \delta y^n}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial \delta y^n}{\partial x} - \delta y^n \right) dx =$$

$$\Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L p^n \frac{\delta y^{n+1} - \delta y^n}{\Delta t} dx - \mu \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L p^n \frac{\partial^2 \delta y^n}{\partial x^2} dx +$$

$$\epsilon \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L p^n \frac{\partial \delta y^n}{\partial x} dx - \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L p^n \delta y^n dx.$$

Los cuatro términos integrales son (al final de cada integración se muestra la versión continua para mayor claridad y destacar la similaridad de la estructura).

$$\text{i.- } \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L p^n \left(\frac{\delta y^{n+1} - \delta y^n}{\Delta t} \right) dx = - \int_0^L p^0 \frac{\delta y^0}{\Delta t} dx - \Delta t \sum_{n=1}^N \int_0^L \left(\frac{p^n - p^{n-1}}{\Delta t} \right) \delta y^n dx + \int_0^L p^N \delta y^{N+1} dx =$$

$$\int_0^L p^N \delta y^{N+1} dx - \Delta t \sum_{n=1}^N \int_0^L \left(\frac{p^n - p^{n-1}}{\Delta t} \right) \delta y^n dx \quad (7)$$

$$\int_0^L p(x, T) \delta y(x, T) dx - \int_Q \frac{\partial p}{\partial t} \delta y dx dt$$

Note que en forma natural con la formulación hacia adelante surge el termino $p^N \delta y^{N+1}$ de la integración de la diferencia hacia adelante $p^n \left(\frac{\delta y^{n+1} - \delta y^n}{\Delta t} \right)$ cuando $n = N$.

$$\text{ii.- } \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L p^n \left(-\mu \frac{\partial^2 \delta y^n}{\partial x^2} \right) dx = \left[\Delta t \sum_{n=0}^N p \left(-\mu \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \right]_0^L + \left[\mu \Delta t \sum_{n=0}^N \frac{\partial p}{\partial x} \delta y \right]_0^L - \mu \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \delta y dx =$$

$$\left[\Delta t \sum_{n=0}^N p(\delta v(t)) \right]_0^L + \left[\mu \Delta t \sum_{n=0}^N \frac{\partial p}{\partial x} \delta y \right]_0^L - \mu \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \delta y dx$$

$$\left[\Delta t \sum_{n=0}^N p(\delta v(t)) \right]_0^L + \left[\mu \Delta t \sum_{n=0}^N \frac{\partial p}{\partial x} \delta y \right]_0^L - \mu \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \delta y dx \quad (8)$$

$$\left[\int_0^T p \delta v(t) dt \right]_0^L + \left[\mu \int_0^T \frac{\partial p}{\partial x} \delta y dt \right]_0^L - \mu \int_Q \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \delta y dx dt$$

$$\text{iii.- } \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L p^n \left(\epsilon \frac{\partial \delta y^n}{\partial x} \right) dx = \left[\epsilon \Delta t \sum_{n=0}^N p^n(x) \delta y(x) \right]_0^L - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L \frac{\partial p}{\partial x} \delta y dx$$

$$\left[\epsilon \Delta t \sum_{n=0}^N p^n(x) \delta y(x) \right]_0^L - \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L \frac{\partial p}{\partial x} \delta y dx \quad (9)$$

$$\left[\epsilon \int_0^T p \delta y dt \right]_0^L - \epsilon \int_Q \frac{\partial p}{\partial x} \delta y dx dt$$

$$\text{iv.- } \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L p^n (-\delta y^n) dx = \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L (-p^n) \delta y^n dx$$

$$\Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L (-p^n) \delta y^n dx \quad (10)$$

$$\int_Q (-p) \delta y dx dt$$

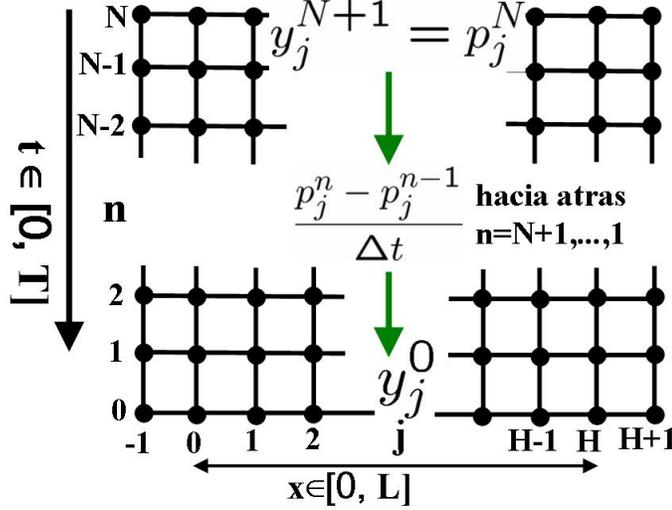


Figure 3: Malla para la discretización de $\frac{p^n - p^{n-1}}{\Delta t}$, $n = N, \dots, 1$

Note que el control sólo actúa en el punto $x = 0$, y por tanto

como en el caso continuo se tiene $\left[\Delta t \sum_{n=0}^N p(\delta v(t)) \right]_0^L = -\Delta t \sum_{n=0}^N p(0) \delta v^n = \Delta t \sum_{n=0}^N (-p(0)) \delta v^n$.

Además se tiene que $\left[\mu \Delta t \sum_{n=0}^N \frac{\partial p}{\partial x} \delta y \right]_0^L + \left[\epsilon \Delta t \sum_{n=0}^N p^n(x) \delta y(x) \right]_0^L =$

$\left[\Delta t \sum_{n=0}^N \left(\mu \frac{\partial p^n}{\partial x}(x) + \epsilon p(x) \right) \delta y(x) \right]_0^L$.

(7)+(8)+(9)+(10) = $\Delta t \sum_{n=1}^N \int_0^L \left(-\frac{p^n - p^{n-1}}{\Delta t} - \mu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \epsilon \frac{\partial p}{\partial x} - p^n \right) \delta y^n dx + \int_0^L p^N \delta y^{N+1} dx + \Delta t \sum_{n=0}^N (-p(0)) (\delta v^n) +$

$\left[\Delta t \sum_{n=0}^N \left(\mu \frac{\partial p^n}{\partial x}(x) + \epsilon p(x) \right) \delta y(x) \right]_0^L$.

Se hacen corresponder los términos con la primera variación discretizada en el tiempo,

$$\begin{aligned} \delta J^{\Delta t}(\underline{v}) = & \Delta t \sum_{n=0}^N (-p(0)) \delta v^n + \Delta t \sum_{n=1}^N \int_0^L \left(-\frac{p^n - p^{n-1}}{\Delta t} - \mu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \epsilon \frac{\partial p}{\partial x} - p^n \right) \delta y^n dx \\ & \Delta t \sum_{n=0}^N v^n \delta v^n + k_1 \Delta t \sum_{n=0}^N \int_0^L y^n \delta y^n dx \\ & + \int_0^L p^N \delta y^{N+1} dx \\ & + k_2 \int_0^L y^{N+1} \delta y^{N+1} dx \end{aligned}$$

Y el término que no corresponde como en caso continuo debe ser nulo, se tiene entonces que $\mu \frac{\partial p^n}{\partial x}(L) + \epsilon p(L) = 0$ y $\mu \frac{\partial p^n}{\partial x}(0) + \epsilon p(0) = 0$.

De lo anterior, el sistema adjunto discretizado en el tiempo es

$$\begin{cases} p^N = k_2 y^{N+1}(x), x \in [0, L] \\ \text{Para } n = N, \dots, 1 \\ \left(\frac{p^n - p^{n-1}}{\Delta t} + \mu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial p}{\partial x} + p^n \right) = -k_1 y^n, x \in [0, L] \\ \mu \frac{\partial p^n(L)}{\partial x} + \epsilon p^n(L) = 0 \\ \mu \frac{\partial p^n(0)}{\partial x} + \epsilon p^n(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{ASE}^{\Delta t})$$

Y

$$\nabla J^{\Delta t}(v) = \{v^n - p^n(0)\}_{n=0}^N.$$

Nótese que la resolución en el tiempo del sistema adjunto es naturalmente hacia atrás y que gracias a la línea extra en $N + 1$ de valores de $y(x)$, este se resuelve a partir de $y^{N+1}(x)$ y los sistemas $(\delta \text{SE}^{\Delta t})$ $(\text{ASE}^{\Delta t})$ están acoplados. La figura 3 describe como se considera esta discretización para el cálculo de p .

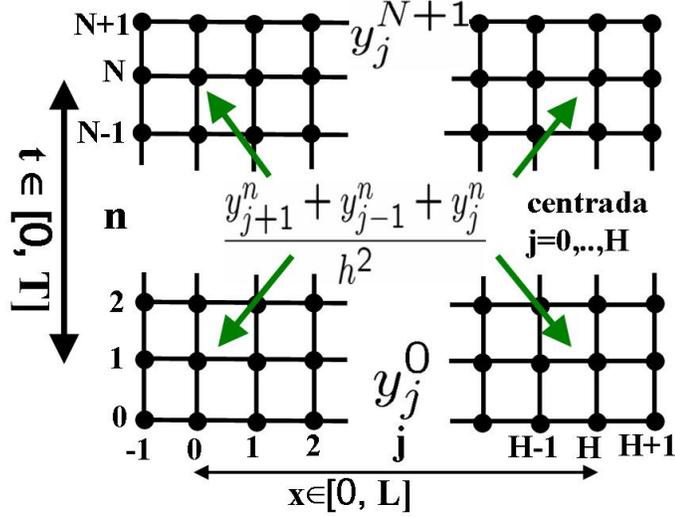


Figure 4: Malla para la discretización de $\frac{\partial^2 \delta y^n}{\partial x^2}$, $j = 0, \dots, H$ y $n = 0, \dots, N$

9.4 Discretización Total

Sea $H > 0$ un entero y $\Delta x = h = \frac{L}{H}$. Los índices para x son $-1 \leq j \leq H + 1$, con este rango el termino $-\mu \frac{y_{j+1}^n + y_{j-1}^n - 2y_j^n}{h^2}$ se puede calcular con $j = 0, \dots, H$ de forma centrada sin problemas gracias a las dos líneas de puntos extras en -1 y $H + 1$. Las figuras 4 y 2 describen donde se calcula considerando esto.

Usando la discretización del tiempo de la sección 9.3, el correspondiente sistema de estado completamente discretizado es

$$\begin{cases} y_j^0 = y_{0,j}, j = 0, \dots, H \\ \text{Para } n = 1, \dots, N, j = 0, \dots, H \\ \frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\Delta t} - \mu \frac{y_{j+1}^n + y_{j-1}^n - 2y_j^n}{h^2} + \epsilon \frac{y_{j+1}^n - y_j^n}{h} - y_j^n = 0, \\ -\mu \frac{y_0^n - y_{-1}^n}{h} = v^n, \\ \mu \frac{y_{H+1}^n - y_H^n}{h} = 0. \end{cases} \quad (\text{SE}_{\Delta x}^{\Delta t})$$

El sistema adjunto completamente discretizado es

$$\begin{cases} p_j^N = k_2 y_j^{N+1}, j = 0, \dots, H \\ \text{Para } n = N, \dots, 1, j = 0, \dots, H \\ \left(\frac{p_j^n - p_j^{n-1}}{\Delta t} + \mu \frac{p_{j+1}^n + p_{j-1}^n - 2p_j^n}{h^2} + \epsilon \frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{h} + p_j^n \right) = -k_1 y_j^n \\ \mu \frac{p_{H+1}^n - p_H^n}{h} + \epsilon p_H^n = 0, \\ \mu \frac{p_0^n - p_{-1}^n}{h} + \epsilon p_{-1}^n = 0. \end{cases} \quad (\text{ASE}_{\Delta x}^{\Delta t})$$

El correspondiente sistema para una pequeña perturbación es

$$\begin{cases} \delta y_j^0 = 0, j = 0, \dots, H \\ \text{for } n = 1, \dots, N, j = 0, \dots, H \\ \frac{\delta y_j^{n+1} - \delta y_j^n}{\Delta t} - \mu \frac{\delta y_{j+1}^n + \delta y_{j-1}^n - 2\delta y_j^n}{h^2} + \epsilon \frac{\delta y_{j+1}^n - \delta y_j^n}{h} - \delta y_j^n = 0 \\ -\mu \frac{\delta y_0^n - \delta y_{-1}^n}{h} = \delta v^n, \\ \mu \frac{\delta y_{H+1}^n - \delta y_H^n}{h} = 0. \end{cases} \quad (\delta \text{SE}_{\Delta x}^{\Delta t})$$

Note que los tres sistemas comparten el rango de índices $j = -1, \dots, H + 1$ pero que el cálculo para el termino de la segunda parcial se realiza de $0, 1, \dots, H$ y las condiciones de frontera permiten en forma natural calcular los

términos para -1 y $H+1$. Además los sistemas necesarios que se utilizan son dos, ya que el totalmente discretizado ($\text{SE}_{\Delta x}^{\Delta t}$) y el de una pequeña perturbación ($\delta\text{SE}_{\Delta x}^{\Delta t}$) son similares, lo que cambian es

$$y_j^0 = y_{0,j} \text{ por } \delta y_j^0 = 0$$

y

$-\mu \frac{y_0^n - y_{-1}^n}{h} = v^n$ por $-\mu \frac{\delta y_0^n - \delta y_{-1}^n}{h} = \delta v^n$. Por lo que $y_{0,j}$ y v^n son los parámetros de una rutina para resolver estos sistemas.

El problema de control totalmente discretizado es

$$\begin{cases} \text{Buscar } u = \{u^n\} \in \mathcal{V} = \mathcal{U}_{\nabla x}^{\Delta t} = \mathbf{R}^N. \\ J_{\Delta x}^{\Delta t}(u) \leq J_{\Delta x}^{\Delta t}(v), \forall v \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (\text{CP}_{\nabla x}^{\Delta t})$$

donde

$$J_{\Delta x}^{\Delta t}(v) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^N [v^n]^2 + \frac{k_1 \Delta t h}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^H [y_j^n]^2 + \frac{k_2 h}{2} \sum_{j=0}^H [y_j^{N+1}]^2,$$

con $y = \{y_j^n\}_{-1 \leq j \leq H+1}^{0 \leq n \leq N+1}$ solución de ($\text{SE}_{\Delta x}^{\Delta t}$) para v .

9.5 El Algoritmo del Gradiente Conjugado para el problema ($\text{CP}_{\nabla x}^{\Delta t}$)

Los pasos del algoritmo son

1. Sea ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) un valor de tolerancia para detener el algoritmo y $\{u^{n,0}\} = 0 \in \mathcal{V}$.
2. Sea $\{y_j^0\}_{-1 \leq j \leq H+1} \neq 0$ la perturbación a controlar, con esta resolver ($\text{SE}_{\Delta x}^{\Delta t}$) para obtener $\{y_j^{n,0}\}_{-1 \leq j \leq H+1}^{0 \leq n \leq N+1}$.
3. Con $\{y_j^{n,0}\}_{-1 \leq j \leq H+1}^{0 \leq n \leq N+1}$ resolver ($\text{ASE}_{\Delta x}^{\Delta t}$) para obtener $\{p_j^{n,0}\}_{-1 \leq j \leq H+1}^{0 \leq n \leq N}$.
4. $g^0 = \{u^{n,0} + p_0^{n,0}\}_{0 \leq n \leq N}$.
5. $w^0 = g^0$.
6. Si $(g^0, g^0)_{\mathcal{V}} < \varepsilon^2$ termina, $\{u^{n,0}\}$ es la solución.
7. Para $k \geq 0$ (se tienen u^k, g^k , y w^k , por calcular u^{k+1}, g^{k+1} y w^{k+1}).
8. Resolver ($\delta\text{SE}_{\Delta x}^{\Delta t}$) para obtener $\bar{y} = \{\delta y_j^{n,k}\}_{-1 \leq j \leq H+1}^{0 \leq n \leq N+1}$.
9. Con $\bar{y} = \{\delta y_j^{n,k}\}_{-1 \leq j \leq H+1}^{0 \leq n \leq N+1}$ resolver ($\text{ASE}_{\Delta x}^{\Delta t}$) para obtener $\bar{p} = \{p_j^{n,k}\}_{-1 \leq j \leq H+1}^{0 \leq n \leq N}$.
10. $\bar{g}^k = \{w^{n,k} + \bar{p}_0^{n,k}\}_{0 \leq n \leq N}$.
11. $\rho^k = (g^k, \bar{g}^k)_{\mathcal{V}}$.
12. $u^{k+1} = u^k - \rho^k w^k$.
13. $g^{k+1} = g^k - \rho^k \bar{g}^k$.
14. Si $\frac{(g^{k+1}, g^{k+1})_{\mathcal{V}}}{(g^0, g^0)_{\mathcal{V}}} < \varepsilon^2$ entonces u^{k+1} es la solución y se termina.
15. de otra forma $\gamma^k = \frac{(g^{k+1}, g^{k+1})_{\mathcal{V}}}{(g^k, g^k)_{\mathcal{V}}}$.
16. $w^{k+1} = g^{k+1} + \gamma^k w^k$ repetir desde el paso. 7

9.6 Programas para OCTAVE o Matlab para el problema (CP $\frac{\Delta t}{\nabla x}$)

Para correrlo se llama al programa principal solver_GC. A continuación se muestran todos los códigos.
solver_GC.m

```
%-----  
% "solver_GC.m"  
% El Algoritmo del Gradiente Conjugado para el problema (CPdelTdelX)  
%-----  
% Carlos Barron  
% UAM Azcapotzalco  
%-----  
% Este programa es la implementacion del siguiente problema de control:  
%  $J(u) \leq J(v) \forall v \in U=L^2(0,T)$   
% donde  
%  $J(v) = (1/2) \int_0^T |v|^2 dt$   
%  $+ (k_1/2) \int_Q |y|^2 dx dt$   
%  $+ |k_2/2) \int_0^1 (y(x,T))^2 dx$   
% donde  $Q=(0,1) \times (0,T)$ , and  
%  $y_t - \mu_y y_{xx} + \epsilon y_x - y = 0$  in  $Q$   
%  $y(0) = y_0$   
%  $-\mu_y y_x(0,T) = v(t)$   
%  $\mu_y y_x(1,T) = 0$   
%-----  
clear all;  
% Define las variables globales  
variables_globales;  
  
% Asigna los valores de los parametros  
define_parametros;  
  
step=0;  
% (1)  
Epsilon_GC=0.5e-6; % Tolerancia  
  
% Control inicial  
u0=zeros(size(t));  
  
% (2)  
% Asigna  $y(0)=y(x,0)$   
y0=y0_function(x);  
  
% (3)  
y1=solver_SEdelTdelXyeq(u0,y0);  
  
% Muestra la situacion inicial  
line_status=sprintf('Algoritmo GC, paso=%d',step);  
  
disp(line_status);  
  
sey=y1;  
  
grafica_sey;  
  
disp('Para continuar oprima un boton del raton sobre la grafica');
```

```

key=waitforbuttonpress ;

% (3)
p=solver_AdjSEdelTdelXpeq(y1);

% (4)
g0 = u0 + p(2,:);

% (5)
w0 = g0;

g0g0 = g0*g0';

g0ref = g0g0;

gkgk = g0g0;

% Verifica si hace el ciclo o termina
if g0g0 < Epsilon_GC
    % termina u0 es la solucion
    break
else
    % (7) Ciclo para resolver el problema
    while (1)
        step=step+1;

        % (8) Resuelve el sistema perturbado
        ybar= solver_SEdelTdelXyeq(w0,dely0);

        % (9) Resuelve el sistema adjunto
        pbar = solver_AdjSEdelTdelXpeq(ybar);

        % (10)
        gbar = w0 + pbar(2,:);
        gbarw0 = gbar*w0';

        % (11)
        rhok = gkgk / gbarw0;

        % (12)
        u1 = u0 - rhok * w0;

        % (13)
        g1 = g0 - rhok * gbar;
        gk1gk1 = g1*g1';

        err_step=(gk1gk1/g0ref);
        line_status=sprintf('Algoritmo GC paso=%d error=%e',step,err_step);
        disp(line_status);
        % muestra la solucion que se tiene
        if mod(step,5)==0
            sey=solver_SEdelTdelXyeq(u1,y0);
            disp(line_status);

```

```

        grafica_sey;
        disp('Para continuar oprima un boton del raton sobre la grafica');
        key=waitforbuttonpress ;
    end

    % (14) Verifica si termina o continua
    if (err_step < Epsilon_GC)
        u0=u1; % u0 es la solucion
        break;
    end

    % (15)
    gamma = gk1gk1 / gkgk;

    % (16)
    w0 = g1 + gamma * w0;

    % se intercambian terminos k+1 -> k
    gkgk=gk1gk1;
    g0 = g1;
    u0 = u1;
end;
end;

% Con el control optimo resuelve el sistema y muestra la solucion
sey=solver_SEdelTdelXyeq(u0,y0);
line_status=sprintf('El GC termino en el paso=%d',step);
disp(line_status); grafica_sey;
%-----

```

solver_SEdelTdelXyeq.m

```

function [y1]=solver_SEdelTdelXyeq(v,y0); variables_globales;
%-----
% Carlos Barron
% UAM Azcapotzalco
%-----
% Rutina del sistema de estado con control v(t)
%  $y_t - \mu y_{xx} + \epsilon y_x - y = 0$  in Q
%  $y(x,0) = y_0$ 
%  $y_x(0,t) = v(t)$ 
%  $y_x(L,t) = 0$ 
% Notacion
% -1 (corresponde al indice 1) Punto extra para discrtizacion en XX
% 0 a H (corresponden a los indices 2 H+2) donde es el intervalo X
% H+1 (corresponde al indice H+3) punto extra en X
% 0 (corrresponde a 1) es el tiempo inicial
% 1 a N+1 (corresponde 2 a N+2) es el rango del tiempo
% Regresa una matriz de (H+3)x(N+2)
% donde y1(2..H+2,1..N+2) son los valores de inicio del sistema adjunto
y1=zeros(H+3,N+2);
%
% Asigno los valores iniciales (y0(x)) para n=0
y1(2:H+2,1) = y0';

```

```

% Calculo del efecto del control sobre los puntos extremos del punto  $y^n_{(-1)}$ 
y1(1,1) = v(1) * h / mmu + y1(2,1);
% punto extra de X
y1(H+3, 1) = y1(H+2, 1); for n=1:N+1
    % calculo de los puntos intermedios
    for j=2:H+2
        y1(j,n+1) = y1(j,n) + ...
            deltat * ( mmu * (y1(j+1,n) + y1(j-1,n) - 2*y1(j,n)) / h2 ...
                - eeps * (y1(j+1,n) + y1(j,n)) / h ...
                + y1(j,n));
    end
    % Se calculan los puntos extremos en n+1
    % Calculo del efecto del control sobre el punto  $y^n_{(-1)}$ 
    %  $-mmu (y0^n_0 - y^n_{(-1)})/h = v^n$ 
    if n == N+1
        break;
    end
    y1(1,n+1) = v(n+1) * h / mmu + y1(2,n+1);
    % punto extra de X
    y1(H+3, n+1) = y1(H+2, n+1);
end;

```

solver_AdjSEdelTdelXpeq.m

```

function [p]=solver_AdjSEdelTdelXpeq(y1);
%-----
% Carlos Barron
% UAM Azcapotzalco
%-----
variables_globales;
% Sistema Adjunto
%  $P(j,N) = k_2 y(j,N+1)$ 
%  $p(n)_t + \backslash mmu p_{xx}(n) + \backslash eeps p_x(n) + p(n) = -k_1 y^n$  in Q
%  $mmu p_x(L,n) = 0$ 
%  $mmu p_x(0,n) + eeps p(0,n) = 0$ 
% del sistema de estado con control  $v(t)$ 
%  $y_t - \backslash mmu y_{xx} + \backslash eeps y_x - y = 0$  in Q
%  $y(x,0) = y_0$ 
%  $-mmu y_x(0,t) = v(t)$ 
%  $mmu y_x(L,t) = 0$ 
% Notacion
% -1 (corresponde al indice 1) Punto extra para discrtizacion en XX
% 0 a H (corresponden a los indices 2 H+2) donde es el intervalo X
% H+1 (corresponde al indice H+3) punto extra en X
% 0 (corrresponde a 1) es el tiempo inicial
% 1 a N+1 (corresponde 2 a N+2) es el rango del tiempo
%-----
% Regresa una matriz de  $(H+3) \times (N+1)$ 
% donde  $p(1..H+1,1..N+1)=p(0..L, 0..T)$ 
p = zeros(H+3, N+1);
% valores iniciales
p(2:H+2, N+1) = k2 * y1(2:H+2, N+2);
% puntos extremos
p(H+3, N+1) = (mmu - eeps * h) * p(H+2, N+1) / mmu; p(1, N+1) = mmu *

```

```

p(2, N+1) / (mmu - eeps * h);

for n=N+1:-1:2
    for j=2:H+1
        p(j,n-1) = p(j,n) + ...
            deltat *( mmu * (p(j+1,n) + p(j-1,n) - 2*p(j,n)) / h2 + ...
            eeps *(p(j+1,n) - p(j,n)) / h + p(j,n) + ...
            k1 * y1(j,n) );
    end
    % puntos extremos
    p(H+3, n - 1) = (mmu - eeps * h) * p(H+2, n - 1) / mmu;
    p(1, n - 1) = mmu * p(2, n - 1) / (mmu - eeps * h);
end;

```

y0_function.m

```

function [y]=y0_function(x)
%-----
% Carlos Barron
% UAM Azcapotzalco
%-----
% calcula (y_0) valores iniciales del sistema
%  $y_t - \mu y_{xx} + \epsilon y_x - y = 0$  in Q
%  $y(0) = y_0$ 
%  $-\mu y_x(0,T) = v(t)$ 
%  $y_x(1,T) = 0$ 
% donde  $Q=(0,1) \times (0,T)$ 
%-----
y = sin(pi*x)* 10.0;

```

variables_globales.m

```

%-----
% "variables_globales.m"
%-----
% Carlos Barron
% UAM Azcapotzalco
%-----
%
global T; % Tiempo
global L; % Longitud
%
global H; % Puntos de x
global N; % Numero de pasos de tiempo
%
global h; %  $h=L/H$ 
global deltat; %  $\text{deltat} = T/N$ 
global h2; %  $h^2$ 
%-----
global t; % tiempo
global x; % espacio
global y; % y variable de estado

```

```

%-----
global mmu; % parametro de  $y_{xx}$ 
global eeps; % parametro de  $f y_x$ 

global k1; % parametro de  $\int_Q ||y||^2 dxdt$ 
global k2; % parametro de  $\int_0^1 ||y(x,T)||^2 dx$ 

global dely0; % Para resolver el delSEdelTdelX
% (sistema perturbado)

```

define_parametros.m

```

%-----
% "define_parametros.m"
%-----
% Carlos Barron
% UAM Azcapotzalco
%-----
% Program "solver_CG.m"
%-----
T=1.0; % Tiempo final
L=1.0; % Longitud
%
H=19; % numero de puntos em x
% Notacion
% -1 (corresponde al indice 1) Punto extra para discrtizacion en XX
% 0 a H (corresponden a los indices 2 H+2) donde es el intervalo X
% H+1 (corresponde al indice H+3) punto extra en XX
N=420; % Numero de pasos en el tiempo
% 0 (corrresponde a 1) es el tiempo inicial
% 1 a N+1 (corresponde 2 a N+2) es el rango del tiempo
%
h=L/H; % h is deltax, h=deltax=L/H
deltat=T/N; h2=h*h;
%
t=linspace(0,T,N+1); % tiempo
x=linspace(0,L,H+1); % espacio
u=zeros(size(t));

% Parametros de la ecuacion diferencial
mmu=0.5; eeps=0.004;

% parametros del control
k1=10000000000000000.0; k2=100000000000000000.0;

% perturbacion nula
dely0=zeros(size(x));

```

grafica_sey.m

```

%-----
% "grafica_sey.m"
%-----
% Carlos Barron

```

```

% UAM Azcapotzalco
%-----
% Grafica los resultados de la variable matricial sey
%-----
figure(1) if step==0
    clf;
    subplot(6,1,1)
    umax=max(max(sey(2:H+2,2:N+2)));
    umin=min(min(sey(2:H+2,2:N+2)));
    surf(x,t,sey(2:H+2,2:N+2)');
    xlabel('x');
    ylabel('t');
    title(line_status);
    view(97,28);
    subplot(6,1,2)
    plot(x,sey(2:H+2,1),'-r');
    grid on;
    subplot(6,1,3)
    plot(x,sey(2:H+2,N+2),'-g');
    grid on;
    drawnow;
else
    subplot(6,1,4)
    umax=max(max(sey(2:H+2,2:N+2)));
    umin=min(min(sey(2:H+2,2:N+2)));
    surf(x,t,sey(2:H+2,2:N+2)');
    xlabel('x');
    ylabel('t');
    title(line_status);
    view(97,28);
    subplot(6,1,5)
    plot(x,sey(2:H+2,1),'-r');
    grid on;
    subplot(6,1,6)
    plot(x,sey(2:H+2,N+2),'-g');
    grid on;
    drawnow;
end

```

Comentarios

Estas notas intentan dar un procedimiento conciso y teóricamente fundamentado para motivar y ayudar a los estudiantes en la solución de problemas de control óptimo en ecuaciones en derivadas parciales. Por favor envía tus comentarios y sugerencias a cbarron@correo.azc.uam.mx.

References

- [1] R. Glowinski. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Computational Physics. Springer-Verlag, 1984.
- [2] R. Glowinski. A Brief Introduction on the Optimal Control of Partial Differential Equations. Workshop en Métodos Numéricos de Optimización y de Control Óptimo en PDE, Guanajuato, Gto., México, 2006.

- [3] R. Glowinski, J. L. Lions, and J. He. *Exact and Approximate Controllability for Distributed Parameter Systems*. Encyclopedia of Mathematics. Cambridge University Press, 2008.
- [4] K. W. Morton and D. F. Mayers. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1994.