



DIVISIÓN DE CBI

# INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

GUÍA DEL TRIMESTRE 12P

Por

*S. Arellano, A. Castellanos, J. Cruz y J. Grabinsky*

# Índice

<b>Información importantísima</b>	<b>3</b>
¡Bienvenido al SAI! . . . . .	4
¿Qué es el SAI? . . . . .	4
¿Qué no es el SAI? . . . . .	4
¿Cómo se aprende cálculo en el SAI? . . . . .	4
Guía y libro de texto . . . . .	5
Introducción al Cálculo. Información 12P . . . . .	6
Diez recomendaciones importantes . . . . .	8
<b>1. Números reales y ecuaciones</b>	<b>10</b>
Objetivo . . . . .	10
Contenido . . . . .	10
Indicadores de evaluación . . . . .	10
Actividades . . . . .	10
Tarea de la unidad 1 . . . . .	11
Ejercicios complementarios . . . . .	12
<b>2. Desigualdades</b>	<b>13</b>
Objetivo . . . . .	13
Contenido . . . . .	13
Indicadores de evaluación . . . . .	13
Actividades . . . . .	13
Tarea de la unidad 2 . . . . .	14
Ejercicios complementarios . . . . .	14
<b>3. Funciones y sus gráficas</b>	<b>16</b>
Objetivo . . . . .	16
Contenido . . . . .	16
Indicadores de evaluación . . . . .	16
Actividades . . . . .	17
Tarea de la unidad 3 . . . . .	17
Ejercicios complementarios . . . . .	18
<b>4. Primer examen integrador</b>	<b>19</b>
Objetivo . . . . .	19
Contenido . . . . .	19
Indicadores de evaluación . . . . .	19
Actividades y tarea . . . . .	19
<b>5. Funciones trigonométricas</b>	<b>21</b>
Objetivo . . . . .	21
Contenido . . . . .	21
Indicadores de evaluación . . . . .	21
Actividades . . . . .	21
Tarea de la unidad 5 . . . . .	22

Ejercicios complementarios . . . . .	22
<b>6. Límites de funciones</b>	<b>24</b>
Objetivo . . . . .	24
Contenido . . . . .	24
Indicadores de evaluación . . . . .	24
Actividades . . . . .	25
Tarea de la unidad 6 . . . . .	25
Ejercicios complementarios . . . . .	26
<b>7. Segundo examen integrador</b>	<b>27</b>
Objetivo . . . . .	27
Contenido . . . . .	27
Indicadores de evaluación . . . . .	27
Actividades y tarea . . . . .	27
<b>8. Funciones continuas</b>	<b>29</b>
Objetivo . . . . .	29
Contenido . . . . .	29
Indicadores de evaluación . . . . .	29
Actividades . . . . .	30
Tarea de la unidad 8 . . . . .	30
Ejercicios complementarios . . . . .	31
<b>9. Funciones derivables</b>	<b>32</b>
Objetivo . . . . .	32
Contenido . . . . .	32
Indicadores de evaluación . . . . .	32
Actividades . . . . .	33
Tarea de la unidad 9 . . . . .	33
Ejercicios complementarios . . . . .	34
<b>10. Evaluación global</b>	<b>35</b>
Objetivo . . . . .	35
Contenido . . . . .	35
Indicadores de evaluación . . . . .	35
Actividades y tarea . . . . .	36
<b>Ventajas del SAI</b>	<b>36</b>
<b>Formulario de cálculo del SAI</b>	<b>38</b>
Perímetros, áreas y volúmenes . . . . .	39
Trigonometría . . . . .	40
Propiedades de logaritmos y exponenciales . . . . .	42
Reglas básicas de derivación . . . . .	42
Fórmulas básicas de integración . . . . .	43

# Información importantísima

“No hay genios en este mundo, todo es trabajo tenaz,  
el uno por ciento es de inspiración y el noventa y nueve de transpiración.”

Thomas Alva Edison (1847-1931)

## ¡Bienvenido al SAI!

Los profesores y tutores de cálculo del *Sistema de Aprendizaje Individualizado* (SAI) te damos la más cordial bienvenida y te deseamos una placentera y provechosa experiencia en este sistema de enseñanza. Todos en el SAI tenemos el compromiso de que tu aprendizaje de cálculo en este sistema se desarrolle en un ambiente de trabajo cordial, responsabilidad y respeto mutuo. En el SAI, todos queremos que te sientas con plena libertad y confianza de trabajar e interactuar activamente con nosotros: *dialogando, haciendo preguntas y resolviendo tus dudas.*

## ¿Qué es el SAI?

El SAI es una modalidad de enseñanza fundada en la *fuerte y constante interacción entre los alumnos y los instructores (profesores y tutores)*. En este sistema, es crucial la combinación del *trabajo constante del alumno* con la *permanente asesoría individual* por parte de los instructores. En el SAI los alumnos no asisten a clases y disponen de gran flexibilidad para *progresar* en su aprendizaje, *a su ritmo* y bajo su propio *estilo*; pero ¡CUIDADO!, el SAI NO ES PARA QUE VENGAS CUANDO QUIERAS Y DEJES TODO PARA EL FINAL DEL TRIMESTRE. Es muy importante que desde un inicio te mantengas en constante contacto con tus instructores y desarrolles el hábito de *trabajar asiduamente*.

## ¿Qué no es el SAI?

- El SAI no es un sistema para *autodidactas*, ni de *enseñanza abierta* ni de *educación a distancia*
- El SAI tampoco es un sistema de  *cursos en línea* ni de *educación virtual*.
- El SAI no es una *reguladora* ni un sistema de *clases particulares*.

## ¿Cómo se aprende cálculo en el SAI?

En el SAI aprendes cálculo realizando las actividades que se especifican en esta *guía*, con ASESORÍA y APOYO PERMANENTE de un grupo de *competentes y amigables instructores*. La guía te indica paso a paso qué materiales debes estudiar y qué ejercicios debes resolver hasta cubrir *todos los temas del curso*. Los instructores supervisan tus avances y te brindan *toda la asesoría*

*que necesites* para resolver tus dudas hasta que asimiles, entiendas y domines cada tema y te sientas listo para presentar tus exámenes. En los cursos de cálculo del SAI

¡LA ESTRELLA DE LA PELÍCULA ERES TÚ!, no el profesor.

Por esta razón, para que tengas buenas expectativas de éxito, es *importantísimo* que *no desaparezcas* y te presentes regularmente a asesoría.

Nuestro **método de enseñanza** se funda esencialmente en:

1. Darte MUCHA ASESORÍA INDIVIDUAL para que resuelvas tus dudas, profundices en los temas, fortalezcas tu independencia y prepares tus exámenes.
2. Calificarte tus tareas y exámenes en tu presencia para que *detectes* y *corrijas inmediata y oportunamente tus errores y tus dudas*.
3. Darte *muchas oportunidades* para pasar los exámenes. EN LUGAR DE REPROBARTE, te asignamos tareas para que repases, superes tus debilidades y presentes nuevamente los exámenes, una y otra vez, *hasta que los apruebes*.
4. Permitirte *aprender y progresar a tu propio ritmo*; puedes terminar un curso y empezar con el siguiente o puedes reanudar el curso en donde te quedaste y completarlo en dos trimestres:

ESTUDIAR CÁLCULO EN EL SAI PUEDE SER LENTO, ¡PERO ES SEGURO!

Una de nuestras metas fundamentales es que desarrolles tu *autodisciplina, seguridad e independencia* para alcanzar tus metas académicas y profesionales.

Si deseas conocer las **ventajas** y **beneficios** de estudiar cálculo en el SAI, consulta la sección **Ventajas del SAI** al final de esta guía.

**Si has decidido tomar cálculo en el SAI:**

- Descarga e imprime esta guía porque aquí encontrarás los objetivos y contenidos, así como todas las actividades que debes realizar para aprobar el curso.
- Lee cuidadosamente la información del curso para el Trimestre 12P que se da en esta guía.
- Consigue el libro de texto y empieza a estudiarlo de acuerdo al plan trazado en la guía.
- Si tienes dudas *¡ven al SAI a asesoría tantas veces como quieras!* La atención a los alumnos de cálculo del SAI se da en el Aula E204, todos los días hábiles de 13:00 a 16:00 horas.
- Cuando apruebes tu primer examen te haremos un expediente para registrar tus avances.

## Guía y libro de texto

*“Sin entusiasmo nunca se logró nada grandioso”*

Emerson (1803-1882)

Para tener éxito en las matemáticas necesitas *entusiasmo, dedicación y organización*; sobre todo si has decidido cursar esta disciplina en el SAI. *El entusiasmo y la dedicación son tu responsabilidad* pero una buena organización requiere de una *guía*, un *libro de texto* y supervisión, orientación y apoyo por parte de tus instructores.

El propósito de esta guía es proveerte un plan de trabajo para que estudies organizadamente y asimiles en un trimestre los contenidos del curso: Introducción al Cálculo.

El **libro de texto** es:

CÁLCULO UNA VARIABLE, de G. B. Thomas, Pearson; 2010, decimosegunda edición.

Para que tu aprendizaje progrese de manera ordenada y sistemática, así como para facilitar la supervisión de tus avances, el curso se ha dividido en *diez unidades*. Cada unidad establece su *contenido*, sus *objetivos* y las *actividades* que debes realizar para preparar los correspondientes exámenes. En cada unidad se detallan los *indicadores de evaluación*, es decir, los temas y habilidades relevantes en las evaluaciones de la unidad. Presta especial atención a esos indicadores porque te sugieren el *tipo de problemas y preguntas que encontrarás en los exámenes*.

**¡Imprime la guía y adquiere el libro de texto!** Es muy importante que dispongas de estos materiales durante todo el trimestre porque –sumados a tu dedicación y al apoyo de tus instructores– serán los principales soportes de tu aprendizaje de cálculo en el SAI.

## Introducción al Cálculo. Información 12P

*“Donde se cuentan mil zarandajas, tan impertinentes como necesarias para el entendimiento de esta grande historia”*

Miguel de Cervantes (1547-1616)

### OBJETIVOS

En este curso estudiarás los conceptos y métodos esenciales que te permitirán emprender un estudio fundamentado del cálculo diferencial e integral en trimestres posteriores. Los **objetivos generales** son:

- Aplicar los conceptos de límite y continuidad para obtener y analizar la gráfica de una función real de una variable real.
- Aplicar la definición de derivada para obtener la ecuación de la recta tangente a una curva y la velocidad instantánea de un objeto en movimiento.

### INSTRUCTORES

#### 1. Profesores Titulares:

- Dr. Arellano Balderas Salvador, sab@correo.azc.uam.mx
- Dr. Cruz Sampedro Jaime, jacs@correo.azc.uam.mx
- Mtro. Grabinsky y Steider Jaime, jags@correo.azc.uam.mx

#### 2. Tutores:

- Barragán Trinidad Melesio, melesiobarragan@gmail.com
- Casero Esteva Víctor Manuel, manuelhooker@hotmail.com
- García Santiago Eloy, egas88@gmail.com
- López Elisea Jovana, jack.smill@hotmail.com
- López Leyva Erika, erika.lopezleyva@hotmail.com
- Meza Martínez Karen Atzin, atzin\_kammak@hotmail.com
- Osorio Infante Arturo, ioan.osorio@gmail.com
- Palacios Serrano Gabriel, butcher\_pro@hotmail.com
- Parra Meneses Ángel, alelic.parra@gmail.com
- Perea Alvarado Francisco, creep\_2@hotmail.com

- Pinto Barrera José Francisco,  
pinto258578@hotmail.com
- Portillo Chávez Roberto,

- mx\_rpc@yahoo.com.mx
- Ramírez Ramírez Filiberto,  
mayor\_filiberto@hotmail.com

#### GUÍA DEL CURSO Y LIBRO DE TEXTO

Es indispensable que dispongas de una impresión o de una copia de la **guía del curso** y de una copia del siguiente libro de texto en el cual se basa la guía:

CÁLCULO UNA VARIABLE, de G. B. Thomas, Pearson; 2010, decimosegunda edición.

#### HORARIO DE ATENCIÓN EN EL SAI

De lunes a viernes (inclusive martes) de 13:00 a 16:00 hrs, en el Aula E204.

#### TAREAS Y EXÁMENES

Para solicitar la evaluación de cada unidad es necesario que:

1. Hayas aprobado todas las unidades anteriores.
2. Presentes correctamente resuelta la tarea de la unidad correspondiente: *completa, bien escrita, engrapada y en limpio*.
3. Dispongas de TRES hojas engrapadas tamaño carta para realizar el examen.

Para que *confirmes tus aciertos y detectes tus errores*, todos tus exámenes se calificarán en tu presencia. En caso de que no apruebes algún examen, nos olvidaremos de ese examen y te asignaremos una tarea para que repases, superes tus debilidades y presentes otro examen de la unidad correspondiente. A este procedimiento del SAI se le denomina **reciclar** y deberás repetirlo hasta que apruebes la unidad.

#### CALIFICACIONES

1. Para pasar el curso debes aprobar las diez unidades.
2. Las calificaciones de las unidades 1, 2, 3, 5, 6, 8 y 9 serán *cualitativas* (A o R).
3. Las calificaciones de las unidades: 4, 7 y 10 serán *numéricas* (de 0 a 10).
4. Los exámenes de las *unidades integradoras* (4, 7 y 10) *solamente los podrán calificar los profesores titulares*. Para mejorar tus calificaciones aprobatorias de estas unidades puedes tomar nuevamente el examen, antes de presentar el examen de la siguiente unidad.
5. Tu **calificación final** se basará en el promedio de tus calificaciones de las unidades integradoras y se determinará como sigue:

**MB: 9.0-10.0,      B: 7.5-8.9,      S: 6.0-7.4.**

6. Puedes mejorar tu calificación final sometiéndote a un examen global o a un examen oral.
7. Si para la semana 13 del trimestre no has aprobado el curso tu calificación final será NA, pero podrás *avanzar o terminar* en la semana de exámenes de recuperación.
8. Si no terminas el curso en la semana de recuperación podrás continuarlo (pero deberás concluirlo) en el trimestre siguiente, reanudando en donde te quedaste.

9. **Copiar ó dejar copiar en los exámenes es un delito académico grave porque fomenta la mediocridad y la corrupción.** Por esta razón, si se te sorprende copiando (o dejando copiar) reciclarás el examen y *si reincides recibirás NA en el curso, sin opción para concluirlo en el SAI.*
10. En los exámenes **no se permite usar el libro de texto** pero, si te hace falta, puedes solicitar al supervisor de exámenes el *Formulario de cálculo del SAI.*

#### ASESORÍAS

Para recibir asesoría es necesario que hayas estudiado el material correspondiente *con anticipación*, que *hayas intentado* los ejercicios muchas veces y que tus preguntas sean concretas y bien formuladas. Si necesitas asesoría adicional, *pídela a tu instructor favorito* o acude al *Centro de Matemáticas: E201.*

#### COMPORTAMIENTO

Por respeto a tu Alma Mater y al trabajo de los demás:

- No dañes el mobiliario. *El estudiante de cálculo que sea sorprendido dañando el mobiliario recibirá NA en el curso y será reportado al Coordinador del SAI.*
- En el salón de exámenes y en el área de atención del SAI, *controla tu lenguaje, modera el volumen de tu voz y apaga tu celular, tu iPod, tu iPad y/o tu iPhone.*

## Diez recomendaciones importantes

1. ¡Comprométete con tu educación, asumiendo tu papel de estudiante con responsabilidad, entusiasmo y dedicación!
2. Adquiere la disciplina de trabajar al menos dos horas diarias para este curso. Te recomendamos hacerlo en las instalaciones del SAI. *Aprende a trabajar solo y en equipo.*
3. Antes de intentar los ejercicios, estudia detenidamente en tu libro de texto los temas que se indican en la guía.
4. Esfuérzate por aprender a manipular expresiones algebraicas y a calcular correctamente con rapidez, precisión e ingenio.
5. Aprende a distinguir las ideas importantes en las soluciones de los problemas y ejercicios y a reproducirlas sin ayuda.
6. Razona detenidamente todos los problemas que se te asignan en la guía; *inténtalos muchas veces y ¡no tengas miedo a equivocarte!* Se aprende mucho de los errores; ¡lo malo es quedarse con la duda!
7. La mejor manera de averiguar si estás entendiendo un tema de matemáticas es tratando de resolver los problemas sin ayuda. Inténtalos y si tienes dificultades, discútelas con tus compañeros o *¡ve a asesoría al SAI o al Centro de Matemáticas!* Los instructores están para ayudarte a resolver tus dudas, *¡piérdeles el miedo!*
8. Es muy importante para tu formación profesional que adquieras el hábito de reportar tu trabajo en limpio y bien presentado; *escrito en forma clara, concisa y ordenada, con tus propias palabras, con buena ortografía, utilizando correctamente la notación matemática y con diagramas y gráficas bien hechas.*
9. Adquiere el hábito de criticar tu mismo tu trabajo y de mejorarlo siempre que le encuentres fallas.
10. Aprende a usar el formulario, tu calculadora, Maple, SAGE, Matlab o Mathematica (*Maple 5 y SAGE son software libre; Mathematica está disponible en el Edif. T).*



“EL GRAN LIBRO DE LA NATURALEZA PERMANECE SIEMPRE ABIERTO ANTE NUESTROS OJOS Y EN SUS PÁGINAS SE ENCUENTRA LA VERDADERA FILOSOFÍA ... PERO NO NOS ES POSIBLE LEERLO A MENOS QUE CONOZCAMOS LOS CARACTERES Y EL LENGUAJE EN EL QUE ESTÁ ESCRITO ... ESTÁ ESCRITO EN LENGUAJE MATEMÁTICO Y LOS CARACTERES SON TRIÁNGULOS, CÍRCULOS Y OTRAS FIGURAS GEOMÉTRICAS.”

Galileo Galilei (1564-1642)

“A ESA LISTA DE CARACTERES, HOY EN DÍA LE AGREGARÍAMOS LAS DERIVADAS Y LAS INTEGRALES.”

Peter Lax (1926-)

# Unidad 1

## Números reales y ecuaciones

### Objetivo

Aplicar las propiedades básicas de la *suma* y el *producto* de números reales para *realizar operaciones* y para *resolver ecuaciones* e interpretar gráficamente sus soluciones.

### Contenido

1. Operaciones con los números reales.
2. Representación de los números reales.
3. Simplificación y racionalización de cocientes.
4. Solución de ecuaciones.
5. El método de completar cuadrados.
6. Rectas circunferencias y parábolas

### Indicadores de evaluación

1. Realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números reales.
2. Distinguir a los números racionales de los irracionales por su representación decimal y expresar los racionales como cocientes de enteros.
3. Usar factorización para simplificar fracciones algebraicas.
4. Usar racionalización para simplificar fracciones algebraicas.
5. Encontrar la ecuación de una recta, dados dos de sus puntos o dada su pendiente y uno de sus puntos.
6. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con una y dos incógnitas.
7. Usar factorización para resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas.
8. Usar la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
9. Usar el método de completar cuadrados para resolver ecuaciones cuadráticas y para esbozar las gráficas de parábolas y circunferencias.
10. Encontrar los puntos de intersección de dos parábolas, así como los de una recta y una parábola.

## Actividades

1. Esta unidad es esencialmente de repaso. Te conviene estudiar los apéndices A.1 y A.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resolver ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 1, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar la unidad 1 antes de finalizar la Semana 1.

## Tarea de la unidad 1

*“Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes.”*

Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Realiza las siguientes operaciones:

$$\frac{5}{7} - \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{-1}{7}\right) \frac{2}{5}}{\left(\frac{2}{7} - \frac{2}{8}\right) \div \left(\frac{3}{5}\right)}, \quad \frac{\sqrt{8}}{6\sqrt{5}} - \frac{2}{3\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}.$$

2. Determina cuáles de los siguientes números son racionales y en caso afirmativo exprésalos como cocientes de números enteros:

$$2.12\overline{41},$$

$$1.23456789101112 \dots$$

3. Simplifica

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}, \quad \frac{x^2 - x - 2}{3 + 2x - x^2}.$$

4. Simplifica

$$\frac{x^2 + x - 12}{x + \sqrt{12 - x}}, \quad \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}}{x - 1}.$$

5. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por:

a)  $(-2, 1)$  y  $(3, -2)$ .

b)  $(6, -1)$  y es perpendicular a  $5x - 2y = 10$ .

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$(a) \frac{1}{3}x - \frac{4}{5} = \frac{5}{7} + \frac{3}{2}x, \quad (b) 3x - y = y - 1, \\ x - y = 6x - 8.$$

7. Usa factorización para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas y cúbicas:

$$x^2 + x - 12 = 0, \quad 2x^2 + 13x + 6 = 0, \quad x^3 - 4x = 0.$$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas (a) completando cuadrados y (b) por la fórmula general:

$$x^2 + x - 1 = 0, \quad 2x^2 = 5x + 1.$$

9. Completa cuadrados para dibujar las siguientes curvas:

$$y = x^2 + x - 12, \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

10. Dibuja los siguientes pares de curvas y encuentra sus puntos de intersección:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y = x^2 - 2x, \\ & y + x^2 = 6x - 8, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & x^2 + y^2 = x + y \\ & x + y = 1/2. \end{array}$$

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Apéndice A.3: 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 24, 25, 26, 37, 38, 39, 40, 43, 44, y 51.

## Unidad 2

# Desigualdades

### Objetivo

Aplicar las propiedades básicas de *orden* y *valor absoluto* de los números reales para *resolver desigualdades* e interpretar gráficamente sus soluciones.

### Contenido

1. Notación de conjuntos.
2. Intervalos.
3. Resolución de desigualdades.
4. El valor absoluto de los números reales.
5. Interior y exterior de una circunferencia.

### Indicadores de evaluación

1. Resolver desigualdades y expresar sus soluciones en términos de intervalos.
2. Resolver desigualdades lineales.
3. Usar factorización para resolver desigualdades.
4. Resolver desigualdades racionales (cocientes de lineales).
5. Resolver desigualdades lineales dobles.
6. Resolver ecuaciones sencillas dadas en términos de valores absolutos.
7. Resolver desigualdades sencillas dadas en términos de valores absolutos.
8. Usar el método de completar cuadrados para resolver desigualdades cuadráticas.
9. Usar propiedades del valor absoluto para resolver desigualdades cuadráticas.

## Actividades

1. Estudia los apéndices A.1 y A.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 2, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar la unidad 2 antes de finalizar la Semana 2.

## Tarea de la unidad 2

*“Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes.”*  
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

En todos los casos, expresa las soluciones de las siguientes desigualdades en términos de intervalos.

1. Resuelve las siguientes desigualdades lineales:

$$(a) -3x - 12 \geq 0, \quad (b) 2x + \frac{3}{2} \geq \frac{4}{5} - \frac{3}{4}x.$$

2. Usa factorización para resolver las siguientes desigualdades:

$$(a) (x + 1)(3x - 2) < 0, \quad (b) x^3 - 4x < 0.$$

3. Resuelve las siguientes desigualdades:

$$(a) x^2 - 2 \leq 2x + 1, \quad (b) 2x^2 - 3x - 10 \geq x^2 - 2x + 20.$$

4. Resuelve las siguientes desigualdades racionales:

$$(a) \frac{3x - 4}{2 + 7x} < 0, \quad (b) \frac{x - 4}{2 + 3x} \leq -3.$$

5. Resuelve las siguientes desigualdades lineales dobles:

$$(a) 2x + 2 > -3x + 1 \geq x - 3, \quad (b) 2x + \frac{3}{2} \geq \frac{2}{5} - \frac{3}{4}x > \frac{2x}{3} - 1.$$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$(a) |3x - 7| = 2, \quad (b) |x^2 - 3x| = 2.$$

7. Resuelve las siguientes desigualdades:

$$(a) 4 - |x - 2| \geq 0, \quad (b) |2x + 3| \geq 3.$$

8. Resuelve las siguientes desigualdades:

$$(a) |5x - 3| < 5, \quad (b) |10 - 5x| \geq 2.$$

9. Completa cuadrados y usa valores absolutos para resolver las desigualdades:

$$(a) x^2 - 2x \geq 7, \quad (b) x - 3x^2 \leq 1/36.$$

10. Resuelve las siguientes desigualdades cuadráticas:

$$(a) \frac{1}{4} \leq (x - 2)^2, \quad (b) x^2 + 2x \leq 3.$$

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Apéndice A.1: 3-23.
- Apéndice A.3: 31, 32, 33, 34, 35, y 36.

## Unidad 3

# Funciones y sus gráficas

### Objetivo

Determinar el *dominio*, el *rango* y los *ceros* de una función y esbozar su *gráfica*. Utilizar funciones para formular y analizar problemas en contextos reales.

### Contenido

1. Funciones: dominio, rango, ceros e intervalos de positividad.
2. Gráfica de una función.
3. Tipos de funciones:
  - Polinomiales, racionales, radicales.
  - Pares, impares, crecientes, decrecientes y periódicas.
  - Funciones definidas por partes.
4. Suma, resta, producto, división y composición de funciones.
5. Traslaciones, reflexiones y cambios de escala de funciones.
6. Funciones como modelos matemáticos de situaciones reales.

### Indicadores de evaluación

1. Dada una función, elaborar una tabla de valores, encontrar sus ceros y sus intervalos de positividad y utilizar esta información para bosquejar su gráfica.
2. Decidir si una curva en el plano representa la gráfica de una función.
3. Determinar gráfica y algebraicamente el dominio y el rango de una función.
4. Realizar la suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones y determinar el dominio de la función resultante.
5. Expresar una función dada como una composición de funciones.
6. Identificar y dar ejemplos de funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, racionales, potencias, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y definidas por partes.
7. Dada la gráfica de una función, obtener las gráficas de traslaciones, reflexiones y cambios de escala de la función original.



8. Dada una función racional o una función definida por partes, determinar su dominio, su rango, su paridad, sus ceros sus intervalos de positividad y sus intervalos de monotonía y utilizar esta información para esbozar su gráfica.
9. Dada la gráfica de una función, obtener una fórmula que represente la función.
10. Utilizar las funciones para modelar situaciones en contextos reales.

## Actividades

1. Estudia las secciones 1.1 y 1.2 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 3, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar la unidad 3 antes de finalizar la Semana 3.

## Tarea de la unidad 3

*“Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes.”*  
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Encuentra los ceros de las siguientes funciones y esboza las gráficas correspondientes a partir de una tabla de valores en 20 puntos bien distribuidos en su dominio:

$$(a) f(x) = x^3 - 4x, \quad (b) f(x) = \frac{x+2}{3-2x}.$$

2. Utiliza la prueba de la recta vertical para decidir, en cada uno de los siguientes casos, si la curva dada en el plano es la gráfica de una función de  $x$ : (a) Una recta; (b) Una circunferencia; (c) Una parábola; (d) Una elipse; (e) Una hipérbola.
3. Esboza la gráfica de las siguientes funciones y determina su dominio y su rango:

$$(a) y = 1 + 3x - x^2, \quad (b) y = \begin{cases} 2-x, & \text{si } -5 \leq x < -1, \\ 2|x| - 1, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 3-x^2, & \text{si } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

4. Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$(a) y = \sqrt{\frac{4x-3}{2x+7}}, \quad (b) y = \frac{x+3}{1-|2x-3|}.$$

5. Si  $f(x) = \sqrt{2-x}$  y  $g(x) = (x-2)^2$ , encuentra  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$ ; así como los respectivos dominios de  $f$ ,  $g$ ,  $f+g$ ,  $\frac{f}{g}$  y  $g \circ f$ .

6. Encuentra el dominio de las siguientes funciones y expresa cada una de ellas como una composición de dos funciones:

$$(a) y = \sqrt{4x^2 - 9}, \quad (b) y = \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{x^2 - 4}.$$

7. Dada la función  $f(x) = |x|$ , calcula  $y = f(x) + 2$ ,  $y = f(x - 2)$  y  $y = 3 - f(x + 1)$ . Esboza las gráficas correspondientes a partir de la gráfica de  $f(x) = |x|$ .
8. Dada la función  $y = x^4 - 2x^2$ , determina el dominio, el rango, la paridad, los ceros y los intervalos de positividad de la función.
9. La gráfica de la función  $y = f(x)$  consiste de la línea quebrada que une los puntos  $A = (-2, 3)$ ,  $B = (2, 7)$  y  $C = (5, 4)$ , en el orden que aparecen. Encuentra una fórmula para esta función.
10. Un vaso cónico de papel tiene  $10 \text{ cm}^3$  de volumen. Expresa la cantidad de papel utilizada para construir ese vaso en términos del radio  $r$  de su base.

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 1.1: 1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 37, 40, 42, 45, 49, 51, 52, 54, 58, 60, 62, 63, 70, 71 y 72.
- Sección 1.2: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 57, 60, 63, 67, 70, 73, 76 y 85.

## Unidad 4

# Primer examen integrador

### Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras tres unidades del curso.

### Contenido

El contenido de esta unidad es el de las tres unidades anteriores.

### Indicadores de evaluación

1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas con una y dos incógnitas e interpretar gráficamente sus soluciones.
2. Resolver desigualdades lineales, cuadráticas y cocientes de lineales y expresar las soluciones en notación de intervalos.
3. Resolver desigualdades sencillas dadas en términos de valores absolutos y expresar sus soluciones en términos de intervalos.
4. Determinar el dominio y rango de una función.
5. Realizar la suma, resta, producto, cociente y composición de funciones y determinar su dominio.
6. Expresar una función dada como una composición de funciones.
7. Dada la gráfica de una función, obtener una fórmula que represente la función.
8. Dada la gráfica de una función, obtener las gráficas de traslaciones, reflexiones y cambios de escala de la función original.
9. Utilizar las funciones para modelar situaciones en contextos reales.
10. Dada una función racional o una función definida por partes, determinar su dominio, su rango, su paridad, sus ceros, sus intervalos de positividad y sus intervalos de monotonía y utilizar esta información para esbozar su gráfica.

## Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. **¡ESTA ES UNA EXCELENTE OPORTUNIDAD PARA QUE REVISES A PROFUNDIDAD LOS TEMAS QUE NO TE HAN QUEDADO CLAROS EN LO QUE VA DEL CURSO Y RESUELVAS TODAS TUS DUDAS! ¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta! Recuerda que la calificación que obtengas en esta unidad será tu primera calificación parcial.**
2. Para que aprecies y valores la importancia y trascendencia del cálculo diferencial e integral en el desarrollo de la ciencia, la tecnología y la cultura humana, en cada examen integrador te pediremos que investigues y escribas un breve ensayo sobre la vida y obra de alguno de los más prominentes hombres de ciencia que crearon y desarrollaron esta importantísima rama de la matemática.

Para presentar tu primer examen integrador debes entregar un ensayo sobre Galileo Galilei (1564-1642), en el que discutas brevemente su papel en el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Recuerda que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

3. Te sugerimos aprobar la unidad 4 antes de finalizar la Semana 4.

## Unidad 5

# Funciones trigonométricas

### Objetivo

Determinar el dominio, el rango y los ceros de funciones trigonométricas y esbozar sus gráficas. Utilizar funciones trigonométricas para formular y analizar problemas en contextos reales.

### Contenido

1. Medida de ángulos en radianes.
2. Triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras.
3. Las seis funciones trigonométricas básicas a partir de un triángulo rectángulo.
4. Las seis funciones trigonométricas básicas a partir del círculo trigonométrico.
5. Gráficas de funciones trigonométricas: amplitud, periodo, frecuencia, rango y ceros.
6. Interpretación gráfica de traslaciones, reflexiones y cambios de escala en funciones trigonométricas.
7. Identidades trigonométricas.
8. Funciones trigonométricas como modelos matemáticos de situaciones reales.

### Indicadores de evaluación

1. Transformar grados en radianes y viceversa.
2. Obtener valores de las funciones trigonométricas básicas por medio de triángulos.
3. Evaluar las funciones trigonométricas básicas a partir del círculo trigonométrico.
4. Bosquejar la gráfica de una función trigonométrica a partir de una tabla de valores.
5. Dada una función trigonométrica sencilla, encontrar sus ceros, su amplitud, su periodo, su frecuencia, su rango y su paridad y esbozar la gráfica.
6. Dada la gráfica de una función trigonométrica básica, obtener las gráficas de traslaciones, reflexiones y cambios de escala de la función original.
7. Obtener los intervalos de positividad de funciones trigonométricas sencillas.
8. Utilizar las identidades básicas para simplificar expresiones trigonométricas.
9. Utilizar las funciones trigonométricas para modelar situaciones en contextos reales.

## Actividades

1. Estudia la sección 1.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Entrega la tarea de la unidad 5, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Procura aprobar la unidad 5 antes de finalizar la Semana 5.

## Tarea de la unidad 5

*“Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes.”*  
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Transforma en radianes las medidas de los ángulos dados en grados y viceversa.

$$(a) \theta = 30^\circ, \quad (b) A = \frac{\pi}{5} \text{ rad}, \quad (c) B = 75^\circ, \quad (d) \alpha = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}.$$

2. Utilizando triángulos e identidades trigonométricas adecuadas, calcula los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de los ángulos de 30 y 105 grados.
3. Utilizando el círculo trigonométrico e identidades trigonométricas adecuadas, calcula los valores exactos de los ángulos de  $\pi$  y  $\pi/8$  radianes.
4. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones, a partir de una tabla 20 valores calculados en puntos uniformemente distribuidos en el intervalo  $[0, 2\pi]$ :

$$(a) y = \cos(2\theta), \quad (b) y = 2 - 3 \operatorname{sen} \theta \quad (c) y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

5. Esboza las gráficas de las siguientes funciones, determinando sus ceros, su amplitud, su periodo, su frecuencia, su rango y su paridad:

$$(a) y = 2 - 2 \cos(3\theta), \quad (b) y = 3 + \operatorname{sen}(\theta/2).$$

6. Esboza las gráficas de las siguientes funciones, realizando traslaciones, reflexiones y cambios de escala en la gráfica de  $y = \cos \theta$ :

$$(a) y = 5 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \quad (b) y = 3 - 2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

7. Determina los intervalos en los que las siguientes funciones son positivas:

$$(a) y = \operatorname{sen} 3x, \quad (b) y = -\cos(x/2).$$

8. Usa identidades trigonométricas para expresar  $\cos(2x + (\pi/6))$  en términos de  $\operatorname{sen} x$  y  $\cos x$ .
9. Se quiere construir un ángulo de  $75^\circ$ , trazando rectas desde el centro de un disco de 50 cm de diámetro hasta los extremos de un arco en el perímetro de ese disco. ¿De qué longitud debe ser el arco?
10. Determina la cantidad de cartón (en  $\text{m}^2$ ) que se necesita para construir un depósito cónico de 1.5 m de altura y base circular de radio  $r$ .

## Ejercicios complementarios

Si requieres práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 1.3: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 18, 19, 22, 25, 26, 27, 31, 34, 36, 41, 44, 46, 47, 50, 53, 54, 61, 62, 64, 65, 66, y 68.

# Unidad 6

## Límites de funciones

### Objetivo

Determinar gráficamente, estimar numéricamente y calcular analíticamente el *límite finito* de una función en un punto dado.

### Contenido

1. Determinación gráfica del límite de una función en un punto.
2. Estimación numérica del límite de una función en un punto.
3. Cálculo de límites de funciones utilizando leyes de los límites.
4. Cálculo de límites de funciones eliminando denominadores nulos por factorización o racionalización.
5. Cálculo de límites de funciones trigonométricas utilizando identidades y límites conocidos.
6. Cálculo de límites de funciones utilizando el teorema del sandwich.
7. Determinación gráfica de los límites laterales de una función en un punto.
8. Estimación numérica de los límites laterales de una función en un punto.
9. Cálculo algebraico de límites laterales.
10. Criterio para la existencia del límite de una función en un punto en términos de sus límites laterales.

### Indicadores de evaluación

1. Determinar gráficamente el límite de una función en un punto dado.
2. Proveer aproximaciones de un punto dado y estimar numéricamente el límite de una función en ese punto.
3. Utilizar las leyes de los límites para calcular límites de funciones.
4. Eliminar denominadores nulos por factorización o racionalización para calcular límites de funciones.
5. Utilizar límites conocidos e identidades para calcular límites de funciones trigonométricas.
6. Utilizar el teorema del sandwich para calcular límites de funciones.



- Determinar gráficamente los límites laterales de una función en un punto dado.
- Proveer aproximaciones por la derecha y por la izquierda de un punto dado y estimar numéricamente el límite de una función en ese punto.
- Determinar algebraicamente los límites laterales de una función en un punto dado.
- Usar límites laterales para determinar la existencia del límite finito de una función en un punto.

## Actividades

- Estudia las secciones 2.1, 2.2 y 2.4 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
- Resuelve y entrega la tarea de la unidad 6, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
- Te sugerimos aprobar la unidad 6 antes de finalizar la Semana 6.

## Tarea de la unidad 6

*“Sólo se aprende haciendo las cosas; porque  
aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza  
hasta que lo intentes.”*  
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

- Esboza la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x < -1, \\ 2|x| - 1, & \text{si } -1 \leq x < 2, \\ 3 - (x - 2)^2, & \text{si } 2 < x, \end{cases}$$

y determina:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

- En cada caso, propón diez números diferentes muy cercanos a  $x_0$  y utiliza tu calculadora para evaluar  $f(x)$  en cada uno de los números que propusiste. Elabora una tabla con estos datos para estimar  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}.$$

- Utiliza las leyes de los límites para calcular:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 1}{2x - 5}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3(5\theta^2)}{\sqrt{4 - \sin \theta}}.$$

- Elimina los denominadores nulos por factorización y calcula:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{1 + x - 2x^2}.$$

5. Elimina los denominadores nulos por racionalización y calcula:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{3 - \sqrt{x^2 + 8}}.$$

6. Utiliza límites de la forma  $(\operatorname{sen} \theta)/\theta$  para evaluar:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{2x}, \quad (b) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t}{\tan \pi t}.$$

7. Usa el teorema del sandwich para calcular:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right), \quad (b) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}.$$

*Sugerencia.* Para (a) recuerda que  $|\operatorname{sen} \theta| \leq 1$ . En (b) usa  $\theta \cos^2 \theta \leq \operatorname{sen} \theta \leq \theta$ .

8. Esboza la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{si } x < 0, \\ 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - 2x + x^2, & \text{si } 1 < x, \end{cases}$$

y determina:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad (d) \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

9. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 2a - x, & \text{si } x < 0, \\ b - 3x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 3b - ax + x^2, & \text{si } 1 < x, \end{cases}$$

Determina los valores de  $a$  y  $b$  para que existan los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

10. Calcula los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\tan(\sqrt{1-x})}.$$

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 2.1: 2, 5, 7, 10, 13, 16 y 21.
- Sección 2.2: 3, 4, 5, 6, 12, 15, 18, 21, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 43, 46, 50, 52, 54, 67, 70 y 73.
- Sección 2.4: 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 14, 17, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40 y 42.

# Unidad 7

## Segundo examen integrador

### Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras seis unidades del curso.

### Contenido

El contenido de esta unidad es el de las seis unidades anteriores.

### Indicadores de evaluación

1. Obtener gráficamente el límite de una función en un punto dado.
2. Estimar numéricamente el límite de una función en un punto dado.
3. Utilizar las leyes de los límites para calcular límites de funciones.
4. Eliminar denominadores nulos por factorización o racionalización para calcular límites de funciones.
5. Dada una función racional o una función definida por partes, determinar su dominio, su rango, su paridad, sus ceros sus intervalos de positividad y sus intervalos de monotonía y utilizar esta información para esbozar su gráfica.
6. Dada una función trigonométrica sencilla, encontrar sus ceros, su amplitud, su periodo, su frecuencia, su rango y su paridad y esbozar gráfica.
7. Utilizar las identidades básicas para simplificar expresiones trigonométricas.
8. Utilizar funciones para modelar situaciones en contextos reales.

### Actividades y tarea

1. Revisa el material de las seis unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado claro. ¡HE AQUÍ OTRA GRAN OPORTUNIDAD PARA QUE REVISES A PROFUNDIDAD LOS TEMAS QUE NO TE HAN QUEDADO CLAROS EN LO QUE VA DEL CURSO Y RESUELVAS TODAS TUS DUDAS! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Recuerda que la calificación que obtengas en esta unidad será tu segunda calificación parcial.*

2. Para presentar el examen de esta unidad debes entregar un ensayo en el que contestes la pregunta ¿qué problemas motivaron a Pierre de Fermat (1601-1665) a investigar el cálculo diferencial e integral? Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Recuerda que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*
3. Te sugerimos aprobar la unidad 7 antes de finalizar la Semana 7.

## Unidad 8

# Funciones continuas

### Objetivo

Dada una función, determinar sus intervalos de *continuidad*; clasificar sus puntos de *discontinuidad*, obtener sus *asíntotas horizontales y verticales* y esbozar su gráfica.

### Contenido

1. Definición de función continua en un punto.
2. Continuidad de la suma, producto, cociente y la composición de funciones.
3. Intervalos de continuidad de una función.
4. Puntos de discontinuidad y su clasificación.
5. El teorema del valor intermedio.
6. Determinación gráfica y estimación numérica del límite al infinito de una función.
7. Cálculo de límites al infinito y asíntotas horizontales.
8. Determinación gráfica y estimación numérica de los límites infinitos de una función en un punto.
9. Gráficas de las funciones tangente y secante.
10. Esbozo de la gráfica de una función racional.

### Indicadores de evaluación

1. Determinar gráfica y algebraicamente si una función es continua en un punto dado.
2. Encontrar los intervalos de continuidad de una función, gráficamente y usando las propiedades de las funciones continuas.
3. Determinar los valores de las constantes de una función seccionada para que sea continua.
4. Determinar y clasificar los puntos de discontinuidad de una función.
5. Utilizar el teorema del valor intermedio para garantizar la existencia de solución de una ecuación en un intervalo de longitud dada.
6. Determinar gráfica, numérica y analíticamente los límites al infinito de una función racional.

- Determinar gráfica, numérica y analíticamente los límites infinitos de una función racional en un punto dado y encontrar las ecuaciones de las asíntotas verticales.
- Proponer funciones racionales que tengan discontinuidades removibles (o evitables) y asíntotas horizontales y verticales especificadas de antemano.
- Dada una función racional, determinar su dominio, sus raíces, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales, sus intervalos de continuidad, sus puntos de discontinuidad y bosquejar su gráfica.
- Bosquejar las gráficas de las funciones tangente y secante.

## Actividades

- Estudia las secciones 2.5 y 2.6 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
- Resuelve y entrega la tarea de la unidad 8, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
- Procura aprobar la unidad 8 antes de finalizar la Semana 8.

## Tarea de la unidad 8

*“Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes.”*  
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

- Bosqueja la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2, & \text{si } x < 0, \\ 2 - 3x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x^2, & \text{si } 1 < x, \end{cases}$$

y determina en que puntos es continua esta función.

- Utiliza las propiedades de las funciones continuas para determinar los intervalos de continuidad de las siguientes funciones.

$$(a) \quad y = 3x - \frac{x}{x-3}, \quad (b) \quad y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 5x - 6}, \quad (c) \quad y = \frac{3x + 1}{\sin x}.$$

- Determina los valores de  $a$  y  $b$  para que las siguientes funciones sean continuas:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2a + 1, & \text{si } x \leq 0, \\ a - x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} b^2x^2 - bx - 1, & \text{si } x \leq 1, \\ 1 - b^2x, & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

- Determina y clasifica los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

$$(a) \quad y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, \quad (b) \quad y = \frac{x^2 - 4}{1 - |x - 1|}.$$

5. Encuentra un intervalo de longitud  $1/10$  que contenga una raíz de cada una de las siguientes ecuaciones:

$$(a) \quad x^3 + 2x - 2 = 0, \quad (b) \quad 5x + \cos x = 2x - 4.$$

6. En cada caso, propón diez números diferentes muy grandes (positivos o negativos, según el caso) y utiliza tu calculadora para calcular  $f(x)$  en cada uno de los números que propusiste. Elabora una tabla con estos datos para estimar:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 16}{4 - 2x^2}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \operatorname{sen} x + x^{5/3}}{x^2 - 4x + 1}.$$

7. En cada caso, propón veinte números diferentes muy cercanos a  $x_0$  y utiliza tu calculadora para calcular  $f(x)$  en cada uno de los números que propusiste. Elabora una tabla con estos datos para estimar:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^2}, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x \operatorname{sen} x + x^{5/3}}{x^2 - 4x + 3}.$$

8. Sugiere una función  $f(x)$  que tenga una discontinuidad evitable en  $x = 1/2$  y una esencial en  $x = -3$  pero que sea continua en los demás valores de  $x$ .

9. Considera la función  $y = \frac{x^2 - 25}{(2x - 5)(x + 5)}$  y determina:

- Su dominio.
- Sus ceros.
- Sus intervalos de positividad.
- Sus intervalos de continuidad.
- El tipo de sus discontinuidades.
- Su rango.
- Las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

Utiliza esta información para esbozar su gráfica.

10. Considera la función  $y = \tan(x/2)$  y determina:

- Su dominio.
- Sus ceros.
- Sus intervalos de positividad.
- Sus intervalos de continuidad.
- El tipo de sus discontinuidades.
- Su rango.
- Las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

Utiliza esta información para esbozar su gráfica.

## Ejercicios complementarios

Si te hace falta práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 2.5: 1, 4, 5, 6, 13, 17, 20, 24, 27, 30, 31, 38, 41, 44, 46, 57, 58, 69, 71, 73, 76.
- Sección 2.6: 1, 2, 3, 6, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 22, 23, 26, 29, 32, 35, 37, 40, 41, 43, 46, 49, 53, 54, 56, 59, 62, 80, 81 y 82.

## Unidad 9

# Funciones derivables

### Objetivo

Usar la definición y las reglas básicas de derivación para calcular la derivada de una función. Obtener la recta tangente a la gráfica de una función en uno de sus puntos y la aproximación lineal estándar a una función en un punto dado; así como la velocidad instantánea de un objeto en movimiento y la tasa de cambio instantánea de una función en un instante dado.

### Contenido

1. Cálculo de la derivada de una función en un punto a partir de la definición.
2. Definición de recta tangente.
3. Definición de velocidad instantánea.
4. Definición de aproximación lineal estándar.
5. Reglas de derivación: potencias, sumas, productos y cocientes.
6. Derivadas de orden superior.
7. Continuidad y derivabilidad (diferenciabilidad).
8. Intervalos de derivabilidad.
9. La derivada como razón de cambio en contextos concretos.

### Indicadores de evaluación

1. Calcular la derivada de una función en un punto dado a partir de la definición.
2. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.
3. Decidir si una función es derivable en un punto dado e identificar gráfica y algebraicamente los intervalos de derivabilidad de una función.
4. Explicar gráfica y analíticamente la inexistencia de la derivada de una función en un punto dado.
5. Calcular derivadas de primer orden y de orden superior usando las reglas de derivación para potencias, sumas, productos y cocientes.
6. Analizar el movimiento rectilíneo de una partícula, determinando su velocidad y aceleración en cada instante a partir de su ecuación de movimiento.



- Interpretar la derivada como una razón de cambio en contextos concretos.
- Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.
- Explicar gráficamente por qué una función puede ser continua en todos los puntos de su dominio pero no necesariamente derivable en algunos de ellos.

## Actividades

- Estudia las secciones 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.9 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
- Entrega la tarea de la unidad 9, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
- Procura aprobar la unidad 9 antes de finalizar la Semana 9.

## Tarea de la unidad 9

*“Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes.”*  
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

- Calcula la derivada de las siguientes funciones a partir de la definición:

$$(a) \quad y = x^2 - 1, \quad (b) \quad y = \sqrt{1 - x}, \quad (c) \quad y = \cos(2\theta).$$

- Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las gráficas de las funciones siguientes en los puntos dados:

$$(a) \quad y = x^2 - 1, \quad (2, 3); \quad (b) \quad y = \sqrt{x}, \quad (4, 2); \quad (c) \quad y = \frac{3x + 1}{x}, \quad (1, 4).$$

- Usa las reglas de derivación para determinar los intervalos de derivabilidad de las siguientes funciones y calcula sus derivadas:

$$(a) \quad y = 5x^3 - x^{1/3}, \quad (b) \quad y = \left( \sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) \left( x + \frac{2}{x} \right), \quad (c) \quad y = \frac{(t+1)(t-2)}{(t-1)(t+2)}.$$

- Explica gráfica y analíticamente por qué la función  $f(x) = 3 + |3x - 6|$  no es derivable en  $x = 2$  pero sí lo es en los demás valores de  $x$ . Calcula  $f'(x)$  para  $x \neq 2$ .

- Calcula la primera y la segunda derivada de las siguientes funciones:

$$(a) \quad y = x - \tan x, \quad (b) \quad y = \frac{t+1}{t-1}, \quad (c) \quad y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}.$$

- La posición de un móvil en el tiempo  $t$  está dada por  $s = 12t - t^3$ , tomando  $t$  en segundos y  $s$  en metros. En cada caso determina:

- La velocidad y la aceleración de ese cuerpo para  $t = 2$ .
- Los instantes en que cambia de dirección el movimiento del cuerpo.

- c) Los instantes y velocidades del cuerpo cuando pasa por  $s = 0$ .
7. Expresa gráficamente y en lenguaje de derivadas los siguientes enunciados y sugiere funciones que modelen estas situaciones:
- El precio del petróleo se ha mantenido estable.
  - El precio del petróleo está subiendo.
  - El precio del petróleo dejó de bajar.
8. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra la aproximación lineal estándar en los puntos dados:
- (a)  $f(x) = \sqrt{x}$ , en  $a = 25$ ; (b)  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ , en  $a = 16$ ; (c)  $f(x) = \sec x$ , en  $a = 0$ .
- Usando estas aproximaciones y sin usar tu calculadora encuentra un valor aproximado de  $\sqrt{26}$ ,  $\sqrt[4]{15.5}$  y  $\sec(0.2)$ .
9. Se desea construir una tubería de hierro cuya longitud es de 2.5 km y cuyo radio interior es de 15 cm. Si se requiere que el radio exterior de esa tubería sea de 15.5 cm, utiliza una aproximación lineal para estimar la cantidad de hierro que se necesita para su construcción. Luego, calcula el volumen exacto del hierro requerido y calcula el error de la aproximación.
10. Dibuja la gráfica de una función  $y = f(x)$ , que sea continua para toda  $x \in \mathbb{R}$  pero que no sea derivable en  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$  y  $x = 10$ .

## Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 3.1: 2, 3, 5, 8, 11, 14, 17, 19, 22, 24, 27, 29, , 39, 42 y 45.
- Sección 3.2: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 23, 26, 27, 30, , 31, 34, 36 y 53.
- Sección 3.3: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 39, 40, 41, 43, 45, 48, 65 y 66.
- Sección 3.4: 2, 4, 7, 8, 9, 14, 20 y 26.
- Sección 3.9. 1, 3, 4, 7, 9, 12, 14, 15, 42, 43 y 44.

# Unidad 10

## Evaluación global

*“Caminante, no hay camino,  
se hace camino al andar.”*

Antonio Machado (1875–1939)

### Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar todos los temas, conceptos y métodos estudiados en el curso.

### Contenido

Todos los temas del curso.

### Indicadores de evaluación

1. Resolver desigualdades lineales, cuadráticas y cocientes de lineales y expresar las soluciones en notación de intervalos.
2. Realizar la suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones y determinar sus correspondientes dominios.
3. Dada una función trigonométrica, determinar su amplitud, periodo, frecuencia, rango, ceros e intervalos de positividad y usar esta información para esbozar su gráfica.
4. Estimar y calcular el límite de una función en un punto y encontrar sus asíntotas horizontales y verticales.
5. Determinar gráfica y analíticamente los intervalos de continuidad de una función y clasificar sus discontinuidades.
6. Utilizar el teorema del valor intermedio para garantizar la existencia de soluciones de una ecuación en un intervalo de longitud dada.
7. Dada una función racional, determinar su dominio, sus raíces, sus intervalos de continuidad, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales, sus puntos de discontinuidad y usar esta información para esbozar su gráfica.
8. Utilizar funciones para modelar situaciones en contextos reales.
9. Usar la definición de derivada para calcular la derivada una función en un punto dado.
10. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.

11. Determinar la velocidad y aceleración instantáneas de una partícula que se mueve en línea recta, a partir de su ecuación de movimiento.
12. Usar las reglas básicas de derivación de *sumas*, *productos*, *cocientes* y *potencias* para calcular derivadas.
13. Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.

## Actividades y tarea

1. Revisa cuidadosamente el material del curso siguiendo lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que aún no dominas. ¡APROVECHA ESTA ÚLTIMA OPORTUNIDAD PARA REVISAR A PROFUNDIDAD LOS TEMAS QUE NO TE QUEDARON CLAROS EN EL CURSO Y RESUELVE TODAS TUS DUDAS! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Recuerda que la calificación que obtengas en esta unidad será tu tercera calificación parcial.*
2. El requisito para presentar el examen de esta unidad es que entregues un ensayo en el que respondas la pregunta ¿qué problemas de la física motivaron a Isaac Newton (1642-1727) investigar el cálculo diferencial e integral? Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Recuerda que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*
3. Procura aprobar la unidad 10 antes de finalizar la Semana 10.

# Ventajas del SAI

A continuación encontrarás algunas de las **ventajas** y **beneficios** de estudiar cálculo en el SAI:

- ¡LA ESTRELLA DE LA PELÍCULA ERES TÚ, NO EL PROFESOR!
- Puedes asistir a asesoría y a exámenes tantas veces como quieras, todos los días hábiles del trimestre, de 13:00 a 16:00 hrs.
- Puedes consultar a cualquiera de nuestros instructores de cálculo, que tienen el compromiso profesional de supervisar tus avances y ayudarte a resolver todas tus dudas del curso.
- Puedes solicitar asesorías adicionales a cualquiera de los instructores.
- Todas tus tareas y exámenes se califican en tu presencia, para que *confirmes tus aciertos, detectes tus errores y adquieras seguridad acerca de lo que sabes.*
- Todos tus exámenes se califican en el día que los tomas o en la siguiente sesión que lo solicites. De este modo, *dispones de retroalimentación inmediata* para proseguir con tu aprendizaje.
- En vez de reprobarte en tus tareas y exámenes, te mostramos tus errores y te asesoramos para que te prepares mejor y te sometas nuevamente a evaluación, hasta que apruebes. A este proceso del SAI le llamamos *reciclar*.
- Puedes mejorar tus calificaciones aprobatorias parciales (de las evaluaciones integradoras), tomando nuevamente el examen, a más tardar dos sesiones después.
- Tu calificación final es el promedio de tus calificaciones parciales; siempre es aprobatoria y la puedes mejorar sometiéndote a un examen oral.
- No pierdes los esfuerzos realizados. Si trabajando a tu ritmo no concluyes el curso, puedes reanudarlo en el trimestre siguiente a partir de donde te quedaste, siempre y cuando hayas aprobado al menos CINCO unidades.
- Puedes adelantar materias. Si concluyes el curso antes de terminar el trimestre, puedes iniciar el curso siguiente y se te toman en cuenta todos tus avances.
- Puedes aprovechar la semana de exámenes de recuperación para avanzar en el curso.
- Siempre se cubre el cien por ciento del programa del curso.
- Te das cuenta que lo más importante es aprender y que pasar los exámenes es una consecuencia.
- Si apruebas nuestros cursos, ¡nunca volverás a tener problemas con cálculo ni te dejarás vencer fácilmente por la flojera!
- Descubres que hay una inmensidad de retos que puedes vencer sin ayuda.
- El placer de hacer las cosas por ti mismo te da *motivación* y *carácter* para *dejar de ser espectador y convertirte en actor.*

- Adquieres una actitud *reflexiva, crítica y edificante* de tu propio conocimiento.
- Adquieres *seguridad, independencia y disciplina* para continuar en tus estudios con mayores posibilidades de éxito.

Debido al vertiginoso avance de la ciencia y tecnología de nuestro tiempo, es *importantísimo actualizarse constantemente*. Por esta razón, en los cursos de cálculo del SAI nos parece imprescindible conferirte un buen grado de responsabilidad para que *jtomes la iniciativa de tu propio aprendizaje!* Hay evidencias que los alumnos que asumen esta responsabilidad y adoptan una conducta activa hacia su educación, aprenden más y mejor que aquellos que pasivamente esperan que sus profesores les enseñen.

Está probado que la experiencia de tomar cursos en el SAI te da seguridad y desarrolla tus habilidades para adquirir nuevos conocimientos por ti mismo; así como para enfrentar los desafíos de tu profesión de manera independiente. Sin duda, estas aptitudes harán de ti un profesional mucho más competitivo en el mercado laboral y en el postgrado.

# Formulario de cálculo del SAI

## Perímetros, áreas y volúmenes

### 1. Perímetro

- Rectángulo de base  $b$  y altura  $a$ :

$$P = 2a + 2b.$$

- Polígono regular de  $n$  lados de longitud  $l$ :

$$P = nl.$$

- Círculo de radio  $r$ :

$$P = 2\pi r, \text{ con } \pi = 3,14159\dots$$

### 2. Área

- Triángulo de base  $b$  y altura  $a$ :

$$A = \frac{ba}{2}.$$

- Triángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , *Fórmula de Herón de Alejandría*:

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}.$$

$S = (a + b + c)/2$  se llama semiperímetro del triángulo.

- Rectángulo de base  $b$  y altura  $a$ :

$$A = ab.$$

- Trapecio de base mayor  $B$ , base menor  $b$  y altura  $a$ :

$$A = \frac{(B + b)a}{2}.$$

- Polígono regular de  $n$  lados de longitud  $l$  y apotema de longitud  $a$ :

$$A = \frac{nla}{2} = \frac{Pa}{2}.$$

El *apotema* de un polígono regular es la distancia entre el centro y cualquiera de sus lados.

- Círculo de radio  $r$ :

$$A = \pi r^2.$$

- Elipse de semiejes  $a$  y  $b$ :

$$A = \pi ab.$$

- Esfera de radio  $r$ :

$$A = 4\pi r^2.$$

- Área lateral de un cono de radio  $r$  y altura  $a$ :

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + a^2}.$$

### 3. Volumen

- Caja de altura  $a$  y base rectangular de lados  $b$  y  $c$ :

$$V = abc.$$

- Esfera de radio  $r$ :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

- Cilindro de radio  $r$  y altura  $a$ :

$$V = \pi r^2 a.$$

- Cono de radio  $r$  y altura  $a$ :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 a.$$

## Trigonometría

- **Teorema de Pitágoras.**

En un triángulo rectángulo de catetos  $a$  y  $b$  e hipotenusa  $h$  (Figura 1) se cumple la relación

$$h^2 = a^2 + b^2.$$

Recíprocamente, si en un triángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $h$  se cumple la relación anterior, entonces es un triángulo rectángulo de catetos  $a$  y  $b$  e hipotenusa  $h$ .

- Funciones trigonométricas del ángulo  $\theta$  (Figura 1):

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{a}{h}, \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{b}{h}, \quad \operatorname{tan} \theta = \frac{a}{b}.$$

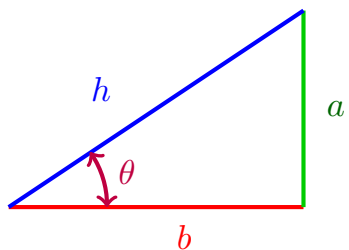


Figura 1: Triángulo rectángulo



- Las funciones trigonométricas de los ángulos de  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $60^\circ$  se calculan fácilmente usando los triángulos de la Figura 2.

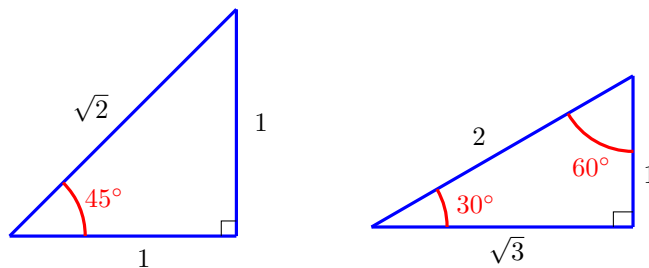


Figura 2: Triángulos especiales

- Funciones trigonométricas del ángulo  $t$  (Figura 3):

$$\operatorname{sen} t = y, \quad \operatorname{cos} t = x, \quad \operatorname{tan} t = \frac{y}{x}.$$

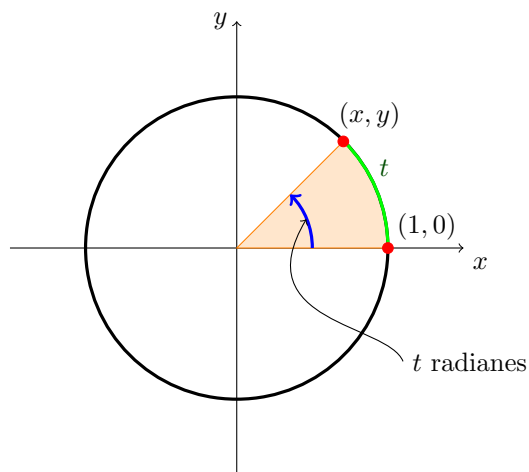


Figura 3: Círculo trigonométrico

- Conversión de grados a radianes. Si la medida de un ángulo en grados es  $A$  y en radianes  $\theta$ , entonces,

$$\theta = \frac{\pi}{180} A.$$

- Longitud  $l$  de un arco de  $\theta$  radianes de un círculo de radio  $r$ :

$$l = \theta r.$$

- Área de un sector de  $\theta$  radianes de un círculo de radio  $r$ :

$$A = \frac{1}{2} \theta r^2.$$

- Identidades trigonométricas básicas:

$$\operatorname{tan} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}, \quad \operatorname{cot} \theta = \frac{\operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta}, \quad \operatorname{sec} \theta = \frac{1}{\operatorname{cos} \theta}, \quad \operatorname{csc} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}.$$

■ **Identidades pitagóricas:**

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta, \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta.$$

■ **Fórmulas para la suma:**

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A, \quad \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B.$$

■ **Fórmulas para el ángulo doble:**

$$\sin(2u) = 2 \sin u \cos u, \quad \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u.$$

■ **Fórmulas para el ángulo medio:**

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}, \quad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}.$$

■ **Ley de los senos.** En un triángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , cuyos ángulos opuestos respectivos son  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se satisface la relación

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

■ **Ley de los cosenos.** En un triángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , en el que  $C$  es el ángulo opuesto a  $c$ , se satisface la relación

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

■ **Otras fórmulas:**

■  $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

■  $\cos(-u) = \cos u$

■  $\tan(-u) = -\tan u$

■  $\sin(-u) = -\sin u$

■  $-|\theta| \leq \sin \theta \leq |\theta|.$

## Propiedades de logaritmos y exponenciales

1.  $\ln(e^x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

6.  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

2.  $e^{\ln x} = x$ ,  $x > 0$ .

3.  $\ln(x^y) = y \ln x$ ,  $x > 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

7.  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

4.  $a^x = e^{x \ln a}$ ,  $a > 0$ .

5.  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ,  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

8.  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ,  $a > 0$ ,  $b \neq 1$ ,  $b > 0$ .

## Reglas de derivación

Notación:  $u' = \frac{du}{dx}$

■ **Linealidad**

$$(cu)' = cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

■ **Regla del producto**

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

▪ **Regla del cociente**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

▪ **Regla de la cadena**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

▪ **Diferenciación logarítmica**

$$(\ln \mu)' = \frac{\mu'}{\mu}.$$

▪ **Otras fórmulas**

- |  |  |
|--|--|
| 1. Si $c$ es una constante, $(c)' = 0$ | 11. $(\sec u)' = (\sec u \tan u)u'$                            |
| 2. $( u )' = \frac{u}{ u }(u')$        | 12. $(\csc u)' = -(\csc u \cot u)u'$                           |
| 3. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$               | 13. $(\arcsen u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$                   |
| 4. $(a^u)' = (\ln a)a^u u'$            | 14. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$                  |
| 5. $(e^u)' = e^u u'$                   | 15. $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$                          |
| 6. $(\log_a u)' = \frac{u'}{(\ln a)u}$ | 16. $(\operatorname{arccot} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$           |
| 7. $(\sen u)' = (\cos u)u'$            | 17. $(\operatorname{arcsec} u)' = \frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$  |
| 8. $(\cos u)' = -(\sen u)u'$           | 18. $(\operatorname{arccsc} u)' = -\frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$ |
| 9. $(\tan u)' = (\sec^2 u)u'$          |  |
| 10. $(\cot u)' = -(\csc^2 u)u'$        |  |

## Fórmulas básicas de integración

▪ **Linealidad**

$$\int k f(u) du = k \int f(u) du, \quad k \in \mathbb{R}; \quad \int (f(u) \pm g(u)) du = \int f(u) du \pm \int g(u) du.$$

▪ **Fórmula de integración por partes**

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad \text{o bien} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

▪ **Regla de sustitución o de cambio de variables.** Si  $u = g(x)$ , entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad \text{o} \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

■ Otras fórmulas:

1.  $\int du = u + C$
2.  $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
3.  $\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C, u \neq 0$
4.  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
5.  $\int e^u du = e^u + C$
6.  $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$
7.  $\int \cos u du = \operatorname{sen} u + C$
8.  $\int \tan u du = -\ln |\cos u| + C$   
 $= \ln |\sec u| + C$
9.  $\int \cot u du = \ln |\operatorname{sen} u| + C$
10.  $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$
11.  $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
12.  $\int \csc u du = -\ln |\csc u + \cot u| + C$
13.  $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
14.  $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C, a \neq 0$
15.  $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$
16.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C, a \neq 0$
17.  $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
18.  $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}}$   
 $= \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C, a \neq 0.$