

International Seminar on Applied Analysis, Evolution Equations and Control

Breve Introducción al Control Óptimo en Ecuaciones de Derivadas Parciales

Carlos Barrón Romero

cbarron@correo.azc.uam.mx

(ISAAEEC)

2, 3 y 4 de mayo de 2011

**Centro de Extensión Educativa y Cultural
Casa de la Primera Imprenta de América**

[UAM](http://www.uam.mx)

Resumen

- Este seminario se basa en el curso: A BRIEF INTRODUCTION ON THE OPTIMAL CONTROL OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, impartido por Roland Glowinski en 2006 durante el Workshop Métodos Numéricos de Optimización y de Control Óptimo en PDE en Guanajuato, México.
- En la primera sesión se muestra la necesidad de un control en una Ecuación Parabólica de Advección, Reacción y Difusión, para luego formular e introducir una función de control para su formulación como un problema de Control Óptimo, estableciendo las condiciones de optimalidad y de existencia de la solución. Se describen los métodos para resolverlo.
- En la segunda sesión se desarrolla un ejemplo completo y se presentan dos ejemplos de problemas de control óptimo en EDP.
- Las notas están a disposición de los interesados por medio de los organizadores de ISAAEEC o un servidor.

Nota histórica de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y **una reflexión**

- Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker se deben nombrar Jhon- Karush-Kuhn-Tucker, ¿Quién es F. Jhon?
- “The historical record is clear and I believe that the moral is equally clear: **The lines of communications between applied fields such as mathematical programming and the practitioners of the classical branches of mathematics should be broadened and not narrowed by specialization**”, Nonlinear Programming: A Historical Note, Harold W. Khun, 1991

Necesidad de un Control Efectivo

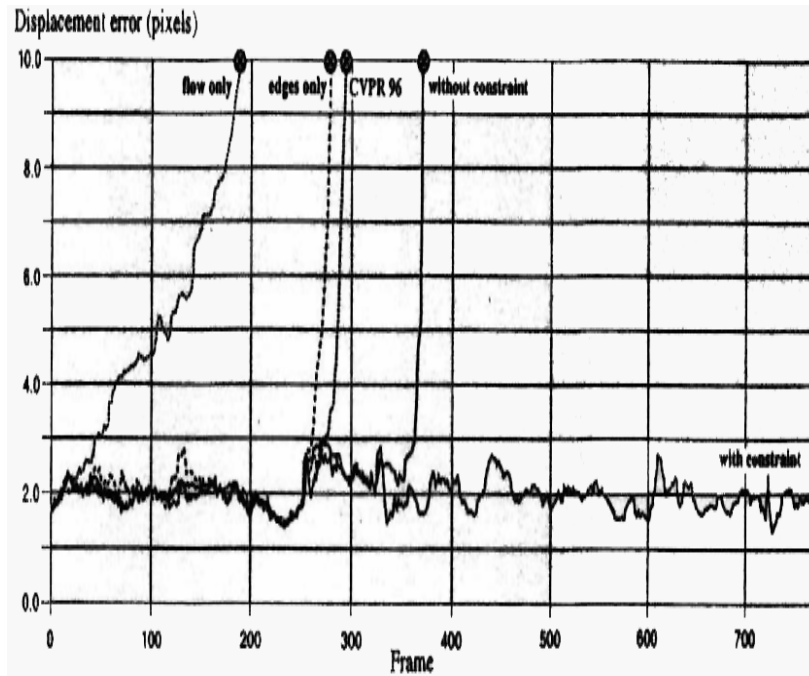


Figure 17: Tracking performance of various frameworks

D. DeCarlo and D. Metaxas, "Optical Flow Constraints on Deformable Models with Applications to Face Tracking", *ICV*, 38(2), 99-127, July 2000.

Video of figure 13: Frames from the basketball game sequence with novel views.

C. Barrón and I.A. Kakadiaris. A Convex Penalty Method for Optical Human Motion Tracking. In *ACM International Workshop on Video Surveillance (IWVS)*, Berkeley, CA, November 7, 2003.

Numerical Methods for Optimization and Control over PDE

Roland Glowinski's Workshop

CIMAT

Enero 11-13, 2006



Consejo de
Ciencia y
Tecnología

Sistema PDE del Problema de Control Óptimo del Curso Introducción al Control Optimo con PDE por Roland Glowinski

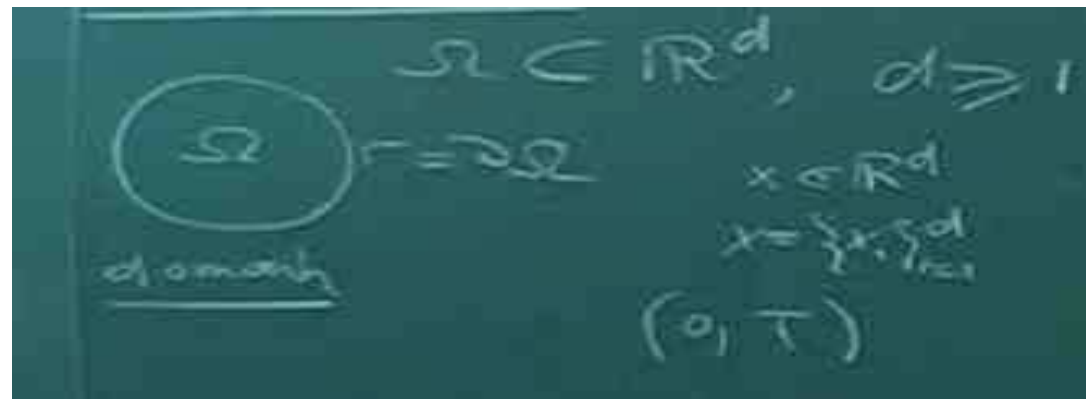
Ecuación parabólica de advección ($V \cdot \nabla \varphi$),
reacción ($f(\varphi)$) y difusión ($\nabla \cdot (A \nabla \varphi)$) en el tiempo

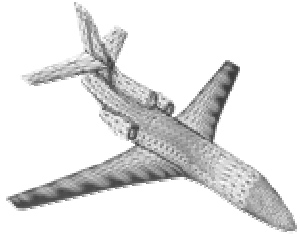
Ecuación de Estado (SEE)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla \cdot (A \nabla \varphi) + V \cdot \nabla \varphi + f(\varphi) = 0 \text{ en } Q = \Omega \times (0, T),$$

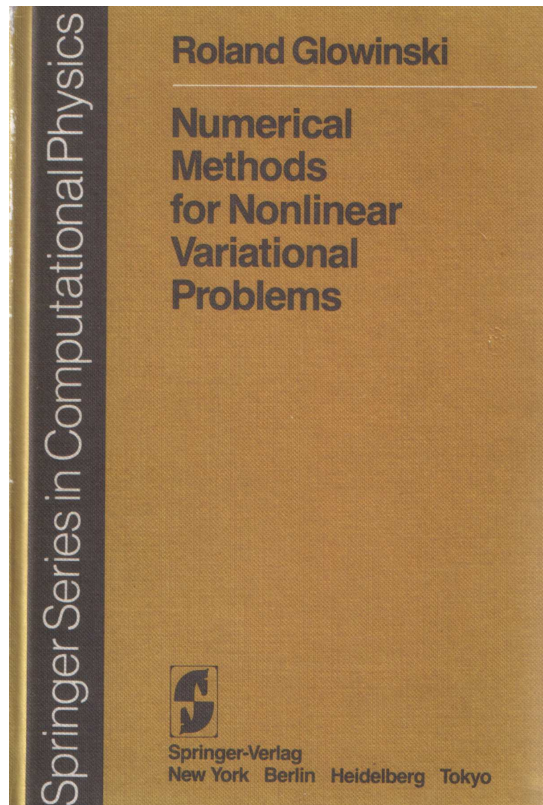
$$A \nabla \varphi \cdot n = 0 \text{ en } \Sigma = \Gamma \times (0, T),$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad x \in \Omega$$





Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems



- V : real Hilbert space with scalar product (\cdot, \cdot) and associated norm $\|\cdot\|$,
- V^* : the dual space of V ,
- $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ is a bilinear, continuous and V -elliptic form on $V \times V$.

A bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ is said to be V -elliptic if there exists a positive constant α such that $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V$.

- $L: V \rightarrow \mathbb{R}$ continuous, linear functional,
- K is a closed convex nonempty subset of V ,
- $j(\cdot): V \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ is a convex lower semicontinuous (l.s.c.) and proper functional ($j(\cdot)$ is proper if $j(v) > -\infty, \forall v \in V$ and $j \not\equiv +\infty$).

P1: Find $u \in V$ such that

$$a(u, v - u) \geq L(v - u), \forall v \in K, u \in K$$

Elliptic variational inequalities (EVI)

Problema de desigualdades variacionales

elípticas

find $u \in V$ such that (P1)

$$a(u, v - u) \geq L(v - u), \forall v \in K, u \in K$$

V espacio de Hilbert, $K \subset V$, a Función bilinear V -elíptica, L Función lineal

T3.1. (Lions and Stampacchia) The problem (P1) has a unique solution.

Uniques (direct from V -Ellipticity)

Existence. From the Lax-Milgram Lemma and the Riesz Representation Theorem

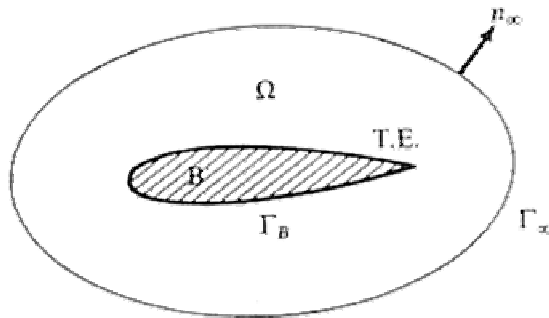
Problema de Control de flujo transónico

Let X be a set of feasible transonic flow solutions; the least-squares problem is then

$$\text{Min}_{\xi \in X} J(\xi), \quad (4.21)$$

with

$$J(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y(\xi)|^2 dx, \quad (4.22)$$



where, in (4.22), $y(\xi)$ ($= y$) is the solution of the state equation:
Find $y \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ such that

$$\int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} \rho(\xi) \nabla \xi \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} g v d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4.23)$$

If the transonic flow problem has solutions, these solutions solve the least-squares problem and give the value zero to the cost function J .

Problema de Control Óptimo sobre un sistema de PDE

$$\text{PCL} \quad \begin{cases} v^0 \in U = L^2((0, T), \mathbb{R})^M \\ J(v) \leq J(u), \forall u \in U \end{cases}$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \|v\|^2 dt + \frac{k_1}{2} \int_0^L \|y(T) - z_0\|^2 dx + \frac{k_2}{2} \int_0^L \|\varphi_x\|^2 dx,$$

$$y_{tt} - y_{xx} + y^3 = f + \sum_{j=1}^M v_j \delta(x - a_j), \quad (\text{EDy})$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0,$$

$$y(0) = y_0,$$

$$y_t(x, 0) = y_1(x)$$

$$-\varphi_{xx} = y_t(T) - z_1, \quad (\text{EDz})$$

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

$$L > 0, z_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$z_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, y_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R},$$

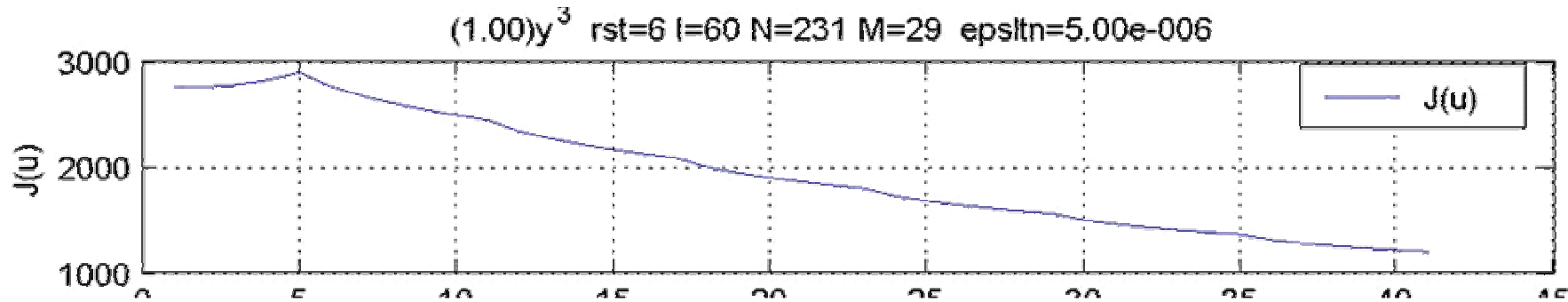
$$a_j \in [0, L], j = 1, \dots, M$$

Método de Solución del Problema de Control Óptimo sobre un sistema de PDE

1. Construir la discretización en el tiempo del problema
2. Calcular la variación $\delta J^{\Delta t}$
3. Calcular $\delta J'^{\Delta t}$ y construir la discretización completa (espacio-tiempo)
4. Adaptar el Método del Gradiente Conjugado al Problema

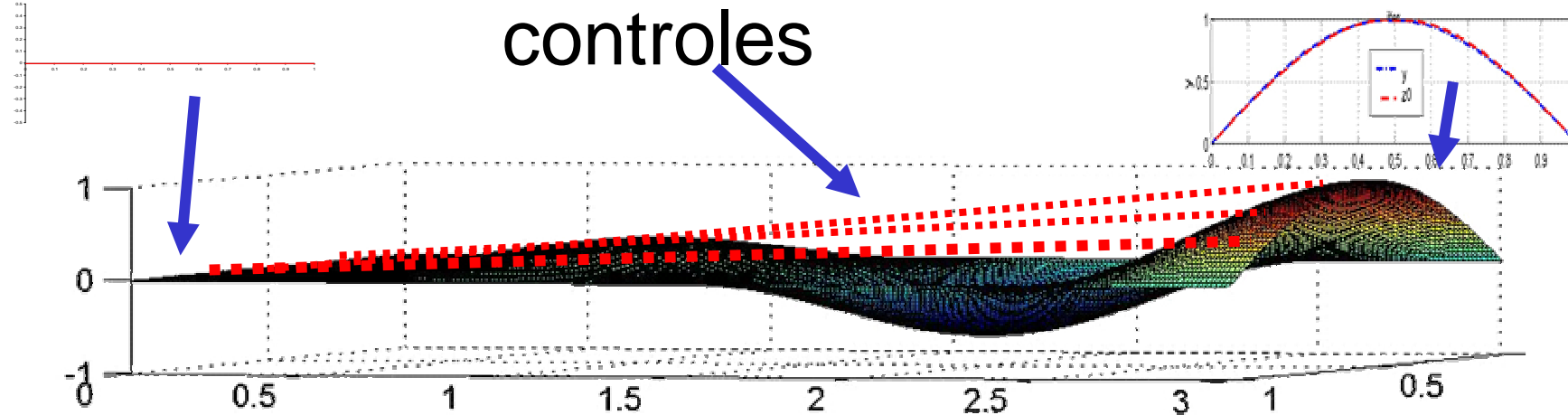
Ejemplo de Control Numérico del problema anterior por Gradiente Conjugado

Costo para lograr la forma objetivo

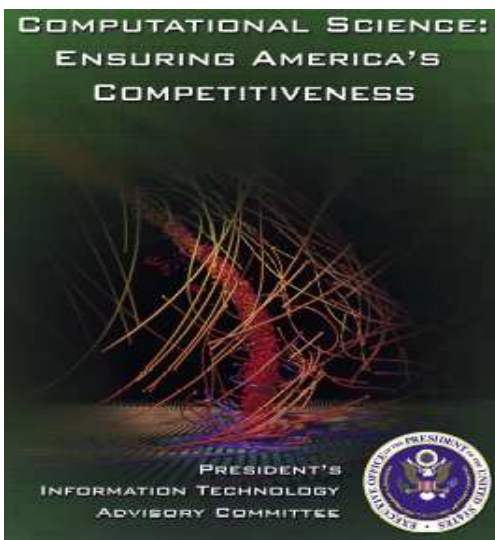
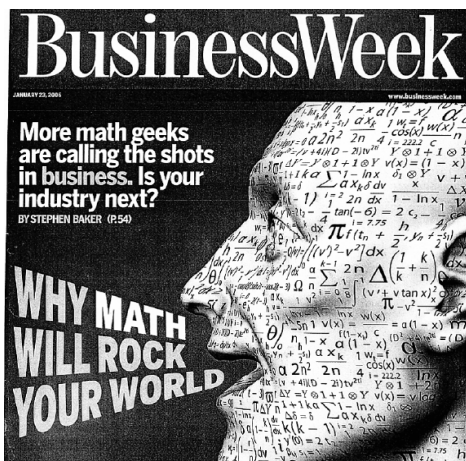


Forma Inicial

Forma objetivo



Preguntas



To pave the way for a more advanced and comprehensive approach to storm data-gathering, researchers at the University of Oklahoma recently used the Pittsburgh Supercomputing Center's terascale system to conduct the largest tornado simulation ever performed. The simulation required an area 50 kilometers on each side and an altitude of 16 kilometers. Using 24 hours of computing time with 2,048 processors, the simulated storm yielded 20 terabytes of data.

Contacto: Carlos Barrón R cbarron@correo.azc.uam.mx