Escuela de algoritmos de aproximación

Módulo 3: Algoritmos de aproximación para problemas de ruteo

Francisco Javier Zaragoza Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco

Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Posgrado en Optimización

ITAM, 15 de septiembre de 2016

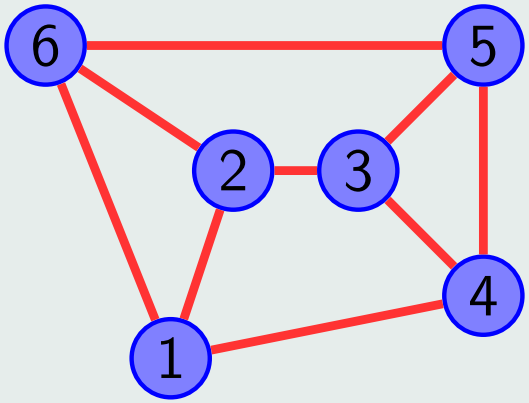
Contenido

1. Gráficas y redes
2. Problemas elementales de redes
3. Problemas de cartero y T-joins
4. Circuitos hamiltonianos
5. Caminos hamiltonianos

Gráficas

Gráficas, vértices y aristas

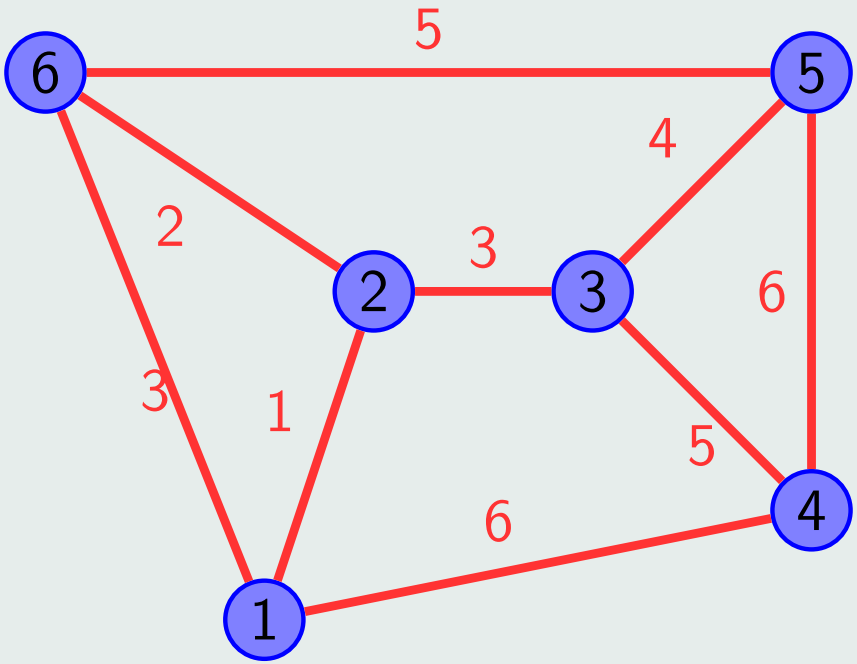
Una gráfica $G = (V, E)$ es una pareja ordenada de conjuntos de vértices y aristas. Todos los vértices y aristas de G deben ser distintos. Cada arista une a dos vértices.



A veces una arista une a un vértice consigo mismo (lazo) o más de una arista une a los mismos vértices (paralelas).

Redes

A veces las aristas tienen costos c. En este caso, (G, c) es una red.



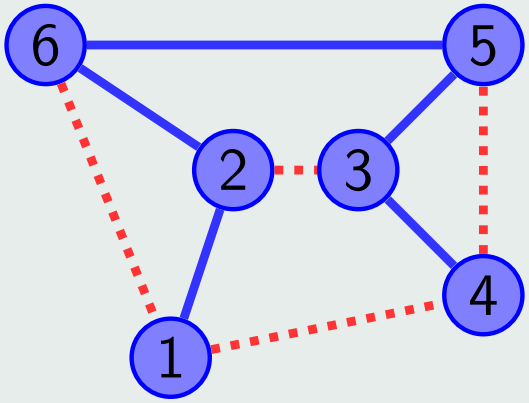
Caminos y conexidad

Camino

Un camino es una secuencia de vértices en la que cada dos vértices consecutivos están unidos por una arista. Una gráfica es conexa si hay caminos entre cada pareja de vértices.

Camino simple

Un camino que no repite vértices se llama camino simple. Un camino simple que pasa por todos los vértices es hamiltoniano.



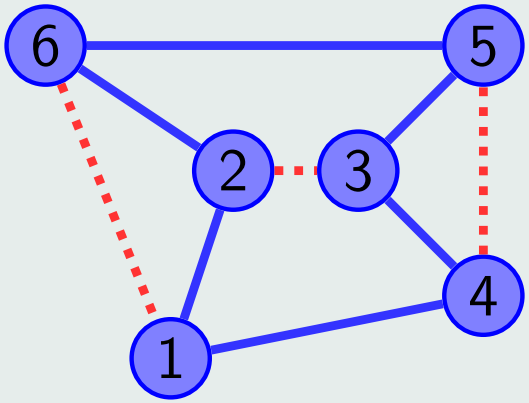
Circuitos y ciclos

Circuito

Un camino que comienza y termina en el mismo vértice es un circuito.

Ciclo

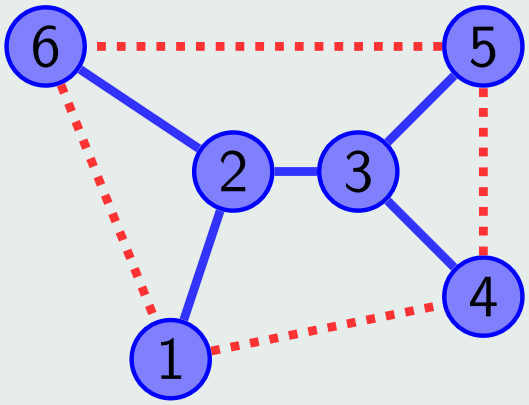
Un circuito que no repite vértices es un ciclo. Un ciclo que pasa por todos los vértices es hamiltoniano.



Bosques y árboles

Árbol

Una gráfica sin ciclos es un bosque. Un bosque conexo es un árbol. Un árbol que pasa por todos los vértices de una gráfica es abarcador.



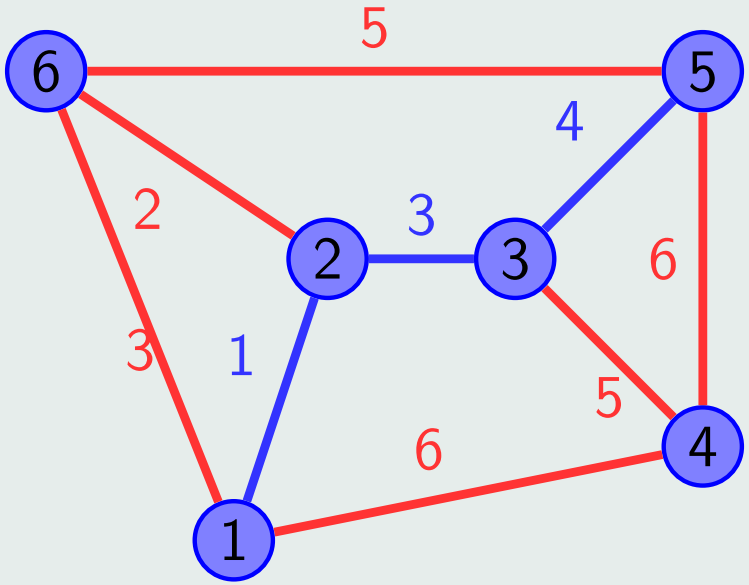
Contenido

1. Gráficas y redes
2. Problemas elementales de redes
3. Problemas de cartero y T-joins
4. Circuitos hamiltonianos
5. Caminos hamiltonianos

Camino más corto

Camino más corto

Dada una red (G, c) y dos vértices u y v, se desea encontrar el camino que une a u y v con costo mínimo. Si $c \geq 0$ esto se puede hacer en tiempo polinomial con el algoritmo de Dijkstra.

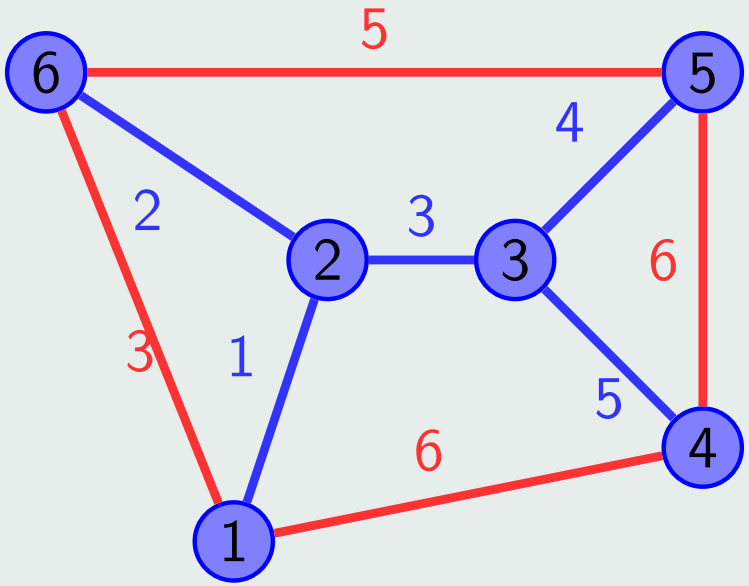


Si se desea encontrar el camino más corto entre todas las parejas de vértices u y v se puede usar el algoritmo de Floyd.

Árbol abarcador de costo mínimo

Árbol abarcador de costo mínimo

Dada una red (G, c) con G conexa, se desea encontrar el árbol abarcador de costo mínimo. Esto se puede hacer en tiempo polinomial con el algoritmo de Kruskal o el algoritmo de Prim.



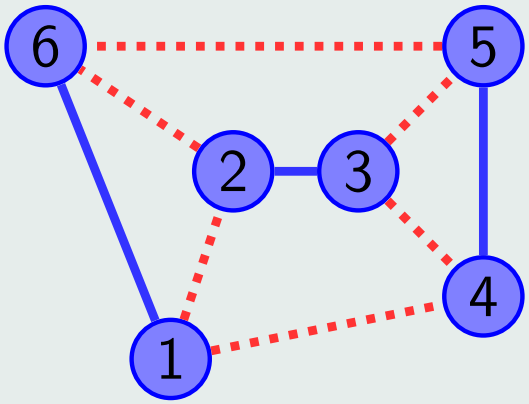
Acoplamientos

Acoplamiento

Un acoplamiento es un conjunto de aristas que no comparten vértices.

Acoplamiento perfecto

Un acoplamiento es perfecto si usa todos los vértices.



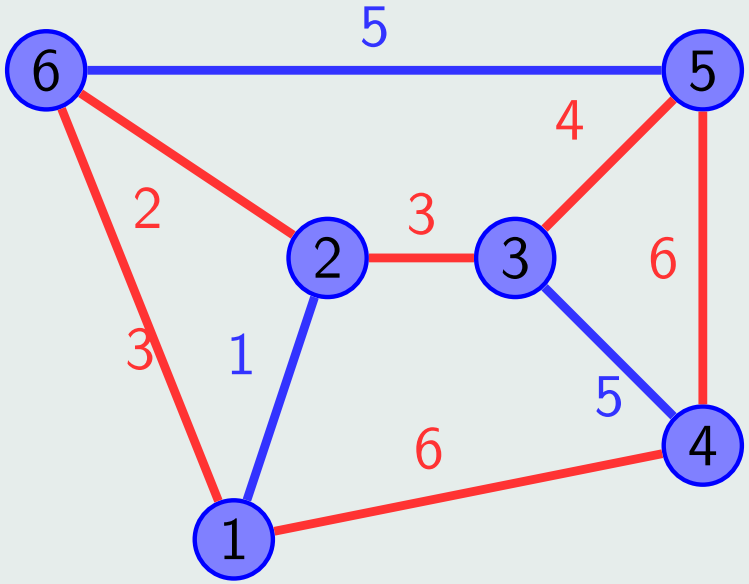
Problemas de acoplamientos

Acoplamiento máximo

Dada una gráfica G se desea un acoplamiento de máxima cardinalidad.

Acoplamiento perfecto de costo mínimo

Dada una red (G, c) se desea un acoplamiento perfecto de costo mínimo.



Algoritmos para acoplamientos

Acoplamiento máximo

Si G es bipartita, se puede hacer en tiempo polinomial con el algoritmo de caminos aumentantes. En general, se puede hacer en tiempo polinomial con el algoritmo de Edmonds.

Acoplamiento perfecto de costo mínimo

Si G es bipartita, se puede hacer en tiempo polinomial con el algoritmo húngaro. En general, se puede hacer en tiempo polinomial con el algoritmo de Edmonds.

Resumen de problemas y algoritmos

Problemas y algoritmos

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con $n = |V|$ vértices.

Problema	Algoritmo	Tiempo
Camino más corto (de uno a todos)	Dijkstra	$O(n^2)$
Camino más corto (todos contra todos)	Floyd	$O(n^3)$
Árbol abarcador de costo mínimo	Kruskal	$O(n^2 \log n)$
Árbol abarcador de costo mínimo	Prim	$O(n^2)$
Acoplamiento máximo (bipartita)	Kuhn	$O(n^3)$
Acoplamiento máximo (general)	Edmonds	$O(n^4)$
Acoplamiento perfecto de costo mínimo (b)	Kuhn	$O(n^4)$
Acoplamiento perfecto de costo mínimo (g)	Edmonds	$O(n^4)$

Para varios de estos problemas hay algoritmos más rápidos.

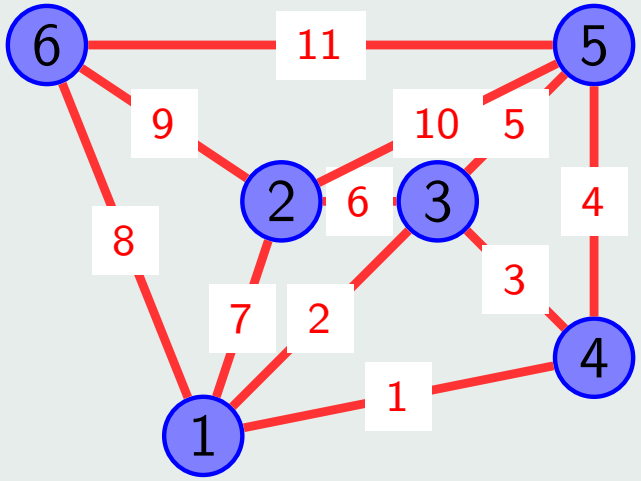
Contenido

1. Gráficas y redes
2. Problemas elementales de redes
3. Problemas de cartero y T-joins
4. Circuitos hamiltonianos
5. Caminos hamiltonianos

Gráficas eulerianas

Caminos y circuitos eulerianos

Un camino que usa cada arista una vez es euleriano. De la misma manera, un circuito que usa cada arista una vez es euleriano.



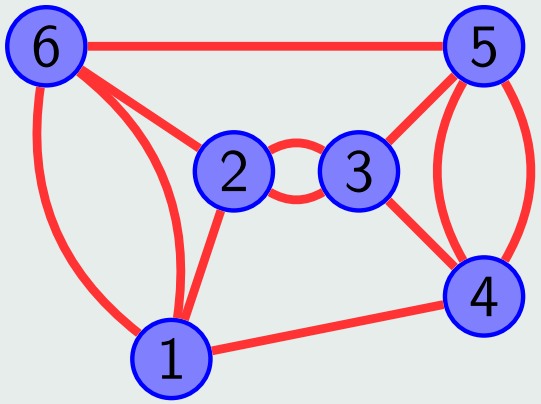
Teorema (Euler y Hierholzer)

Una gráfica conexa tiene un camino euleriano si y sólo si tiene cero o dos vértices de grado impar. Se puede encontrar en tiempo $O(|E|)$.

Problema de cartero

Gráficas no eulerianas

Si una gráfica conexa no tiene un circuito euleriano, entonces podemos duplicar algunas de sus aristas para que sí lo tenga:



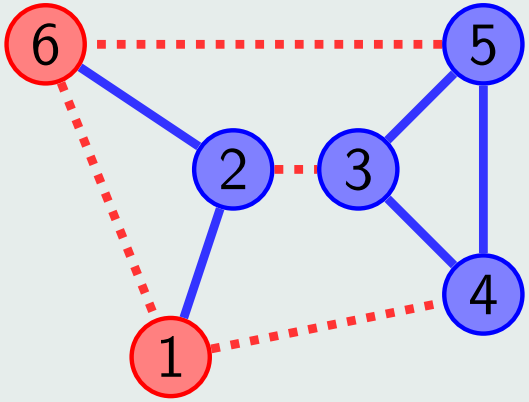
Problema de cartero

Dada una red (G, c) con G conexa y $c \geq 0$, se desea el costo mínimo de las aristas que hay que duplicar para obtener un circuito euleriano.

T-joins

Definición

Sea $G = (V, E)$ y $T \subseteq V$ con $|T|$ par. Entonces $J \subseteq E$ es un T-join de G si los vértices de grado impar de $H = (V, J)$ son exactamente los de T.



Teorema

Todo T-join de G es la unión disjunta de $\frac{1}{2}|T|$ caminos simples disjuntos que unen vértices distintos de T y cero o más circuitos.

Aplicaciones de T-joins

Problema de cartero

Si tomamos T como el conjunto de vértices de grado impar de G, entonces los T-joins de G son los conjuntos de aristas que, al duplicarlos, vuelven a G euleriana.

Subgráficas eulerianas

Si tomamos T como el conjunto vacío, entonces los T-joins de G son los conjuntos de aristas de las subgráficas de G con circuitos eulerianos.

Caminos

Si tomamos T como el conjunto $\{r, s\}$, entonces los T-joins de G son los conjuntos de aristas que forman un camino simple de r a s unión disjunta con cero o más circuitos.

T-joins de costo mínimo

Entrada y salida

Sea $G = (V, E)$ una gráfica conexa, $T \subseteq V$ con $|T|$ par y $c \geq 0$ costos en las aristas. Se desea un T-join J de G con costo mínimo $c(J)$.

Algoritmo

El tiempo de ejecución es $O(n^4)$ con $n = |V|$.

1. Para cada pareja $u, v \in T$ encuentre un camino más corto de u a v, sea $d_{u,v}$ el costo de ese camino $P_{u,v}$.
2. Sea $H = (T, F)$ una red completa con costos $d \geq 0$ en sus aristas.
3. Encuentre un acoplamiento perfecto M de costo mínimo en (H, d).
4. Sea J la diferencia simétrica de los conjuntos de aristas de los caminos $P_{u,v}$ tales que la arista $uv \in M$.

Costos métricos

Costos métricos

Sea (G, c) una red con G completa y $c \geq 0$. Diremos que los costos c son métricos si cumplen la desigualdad del triángulo, es decir, si

$$c_{u,v} \leq c_{u,w} + c_{w,v}$$

para cada tres vértices distintos u, v, w.

T-joins con costos métricos

La desigualdad del triángulo implica que para cada dos vértices distintos u, v y cualquier camino P de u a v se cumple que

$$c_{u,v} \leq c(P).$$

En otras palabras, si tenemos costos métricos entonces siempre existe un T-join de costo mínimo que es un acoplamiento.

Ejemplos de costos métricos

Distancia unitaria en una gráfica conexa

Sea $H = (V, F)$. La red (G, c) con G completa en V y $c_{u,v}$ igual a la mínima longitud de un camino de u a v en H tiene costos métricos.

Caminos más cortos

Sea (H, c) una red con H conexa. La red (G, c) con G completa en V y $c_{u,v}$ igual al costo mínimo de un camino de u a v tiene costos métricos.

Distancia euclideana

Si V es un conjunto de puntos en el plano (espacio, etc.) euclideano. La red (G, c) con G completa en V y $c_{u,v}$ igual a la distancia euclideana de u a v tiene costos métricos.

Contenido

1. Gráficas y redes
2. Problemas elementales de redes
3. Problemas de cartero y T-joins
4. Circuitos hamiltonianos
5. Caminos hamiltonianos

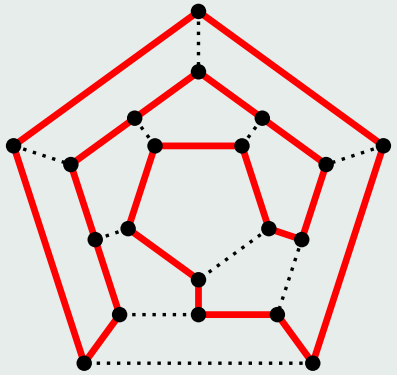
Problema del ciclo hamiltoniano

Ciclo hamiltoniano

Un ciclo que pasa exactamente una vez por cada vértice de una gráfica.

Problema NP completo

Dada una gráfica G ¿tiene un ciclo hamiltoniano?



Gráficas completas con costos

Agente viajero

Dada una gráfica completa $G = (V, E)$ con costos en las aristas encontrar la longitud mínima de un ciclo hamiltoniano es NP duro, aunque es aproximable con garantía $\frac{3}{2}$ si los costos son métricos[a].

[a] Christofides, *Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem*, TR 388, Carnegie-Mellon University, 1976.

Agente viajero con costos generales

Agente viajero

Dada una gráfica completa $G = (V, E)$ con costos no negativos en las aristas, encontrar la longitud mínima de un ciclo hamiltoniano no se puede aproximar en tiempo polinomial (a menos que P=NP).

Idea de la demostración

Si se pudiera aproximar con cualquier garantía $\alpha = \alpha(|V|) \geq 1$ entonces se podría resolver el problema del ciclo hamiltoniano en tiempo polinomial.

Reducción

Sea $H = (V, F)$ una gráfica cualquiera. Sea $G = (V, E)$ una gráfica completa con costos en las aristas $c_e = 1$ si $e \in F$ y $c_e = \alpha|V|$ si $e \notin F$.

Agente viajero con costos generales

Observaciones sobre ciclos hamiltonianos

1. Un ciclo hamiltoniano de G tiene costo $|V|$ si sólo usa aristas de H y tiene costo $\geq \alpha|V| + |V| - 1$ en caso contrario.
2. Si H es hamiltoniana, el costo mínimo es $|V|$ y si no lo es el costo mínimo es $\geq \alpha|V| + |V| - 1$.

Contradicción

Si el supuesto algoritmo de aproximación existiera, entonces generaría un ciclo hamiltoniano de G de costo $\leq \alpha|V|$ cuando H es hamiltoniana y de costo $\geq \alpha|V| + |V| - 1$ en caso contrario.

Agente viajero con costos métricos

Agente viajero métrico

Dada una gráfica completa $G = (V, E)$ con costos métricos en las aristas, encontrar la longitud mínima de un ciclo hamiltoniano se puede aproximar en tiempo polinomial con garantía $\frac{3}{2}$.

Costos métricos

Si $u, v, w \in V$ entonces $c_{uv} + c_{vw} \geq c_{uw}$.

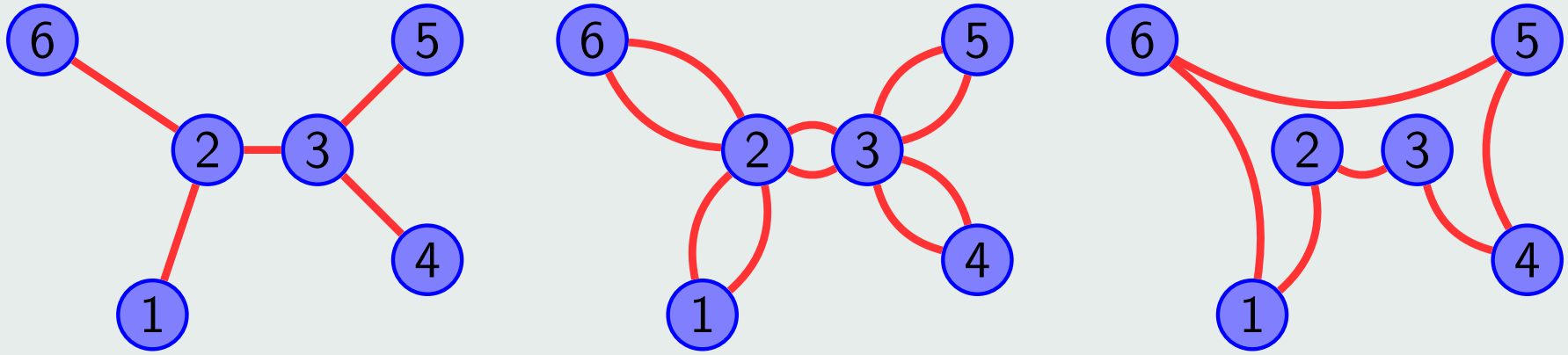
Simplificación

Vamos a presentar un algoritmo de aproximación con garantía 2, que resulta de una simplificación del algoritmo de Christofides.

Algoritmo simplificado

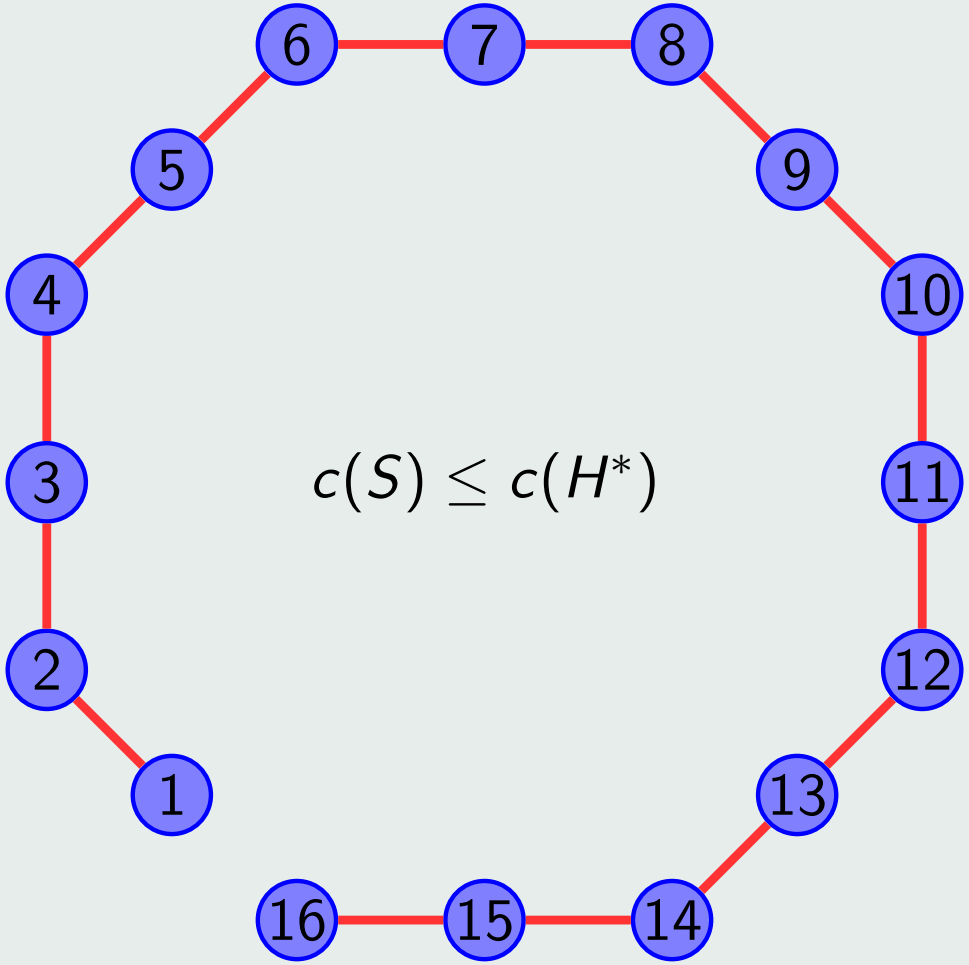
Entrada G y c

1. Construye un árbol abarcador S de costo mínimo en (G, c).
2. Duplica todas las aristas de S para obtener una gráfica $2S$.
3. Encuentra un circuito euleriano C de $2S$.
4. Convierte C en un circuito hamiltoniano H de G saltando vértices.



Propiedades de H^*

H^* contiene un árbol abarcador



$$c(S) \leq c(H^*)$$

Garantía de aproximación

Demostración

Sea H^* un circuito hamiltoniano de costo mínimo de (G, c). Como H^* contiene un árbol abarcador se tiene que

$$c(S) \leq c(H^*).$$

Por la condición métrica $c(H) \leq c(2S)$ y entonces se cumple que

$$c(H^*) \leq c(H) \leq c(2S) = 2c(S) \leq 2c(H^*).$$

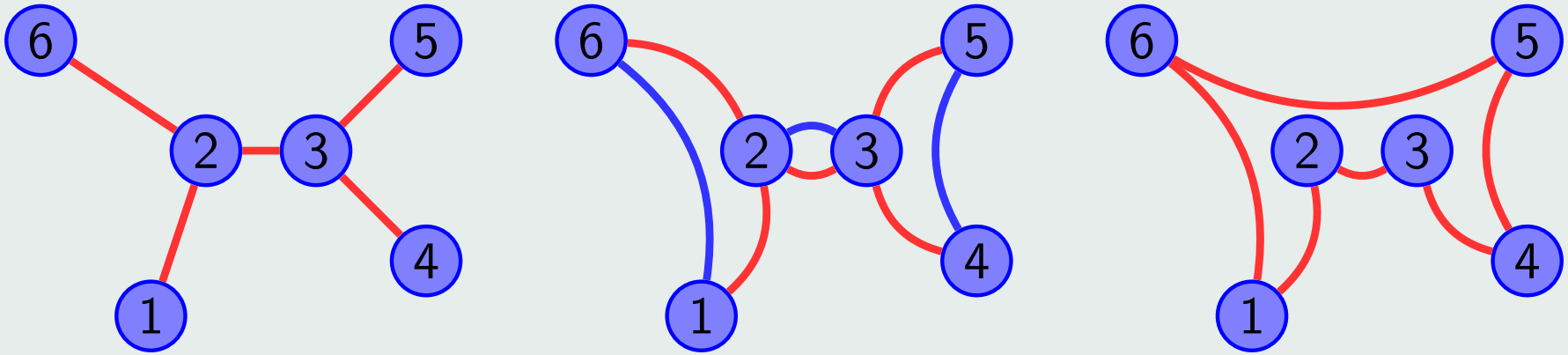
Christofides

Se completa S a una gráfica euleriana de forma óptima.

Algoritmo de Christofides

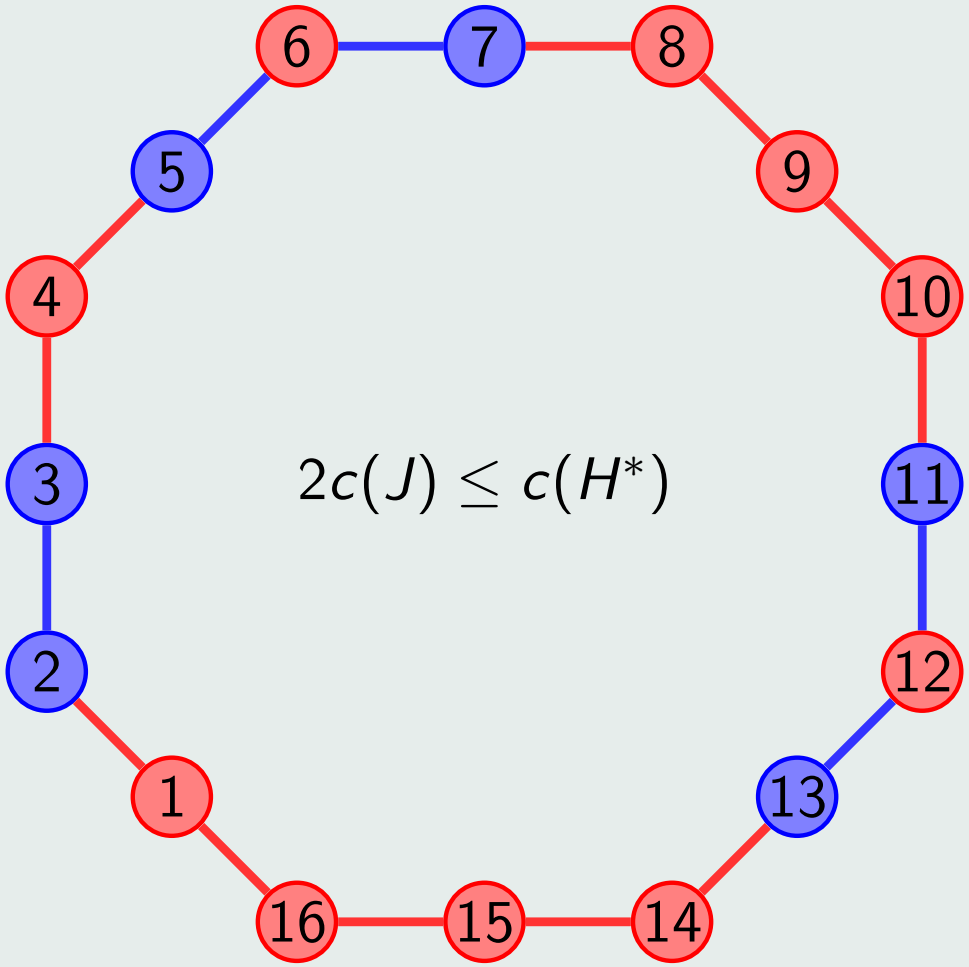
Entrada G y c

1. Construye un árbol abarcador S de costo mínimo en (G, c).
2. Sea $T = \{v \in V : v \text{ tiene grado impar en } S\}$.
3. Sea J un T-join de costo mínimo en (G, c).
4. Sea F el resultado de añadir las aristas de J a S.
5. Encuentra un circuito euleriano C de F.
6. Convierte C en un circuito hamiltoniano H de G saltando vértices.



Propiedades de H^*

H^* contiene dos T-joins disjuntos



$$2c(J) \leq c(H^*)$$

Garantía de aproximación

Demostración

Sea H^* un circuito hamiltoniano de costo mínimo de (G, c). Como H^* contiene un árbol abarcador se tiene que

$$c(S) \leq c(H^*).$$

Como H^* contiene dos T-joins disjuntos se tiene que

$$c(J) \leq \frac{1}{2} c(H^*).$$

Por la condición métrica $c(H) \leq c(F)$ y entonces se cumple que

$$c(H^*) \leq c(H) \leq c(F) = c(S) + c(J) \leq \frac{3}{2} c(H^*).$$

Contenido

1. Gráficas y redes
2. Problemas elementales de redes
3. Problemas de cartero y T-joins
4. Circuitos hamiltonianos
5. Caminos hamiltonianos

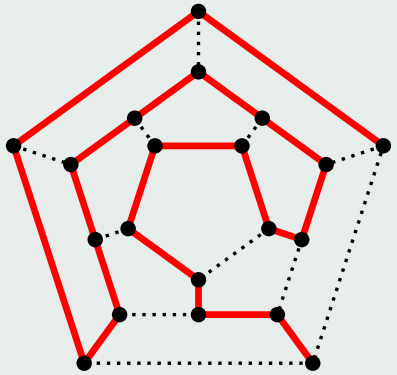
Problema del camino hamiltoniano

Camino hamiltoniano

Un camino que pasa exactamente una vez por cada vértice de una gráfica.

Problema NP completo

Dada una gráfica G ¿tiene un camino hamiltoniano?



Gráficas completas con costos

Problema general

Dada una gráfica completa $G = (V, E)$ con costos en las aristas encontrar la longitud mínima de un camino hamiltoniano es NP duro.

Tres casos

$k = 0$ Ningún extremo especificado.

$k = 1$ Un extremo especificado.

$k = 2$ Los dos extremos especificados.

Modificación del algoritmo de Christofides

Modificaciones requeridas

Hoogeven presenta una modificación con estas características[a]:

1. La unión de S y J debe tener exactamente dos vértices impares.
2. Los extremos especificados deben estar entre ellos.

[a] Hoogeveen. *Analysis of Christofides' heuristic: Some paths are more difficult than cycles*. Operations Research Letters 10, 291-295, 1991.

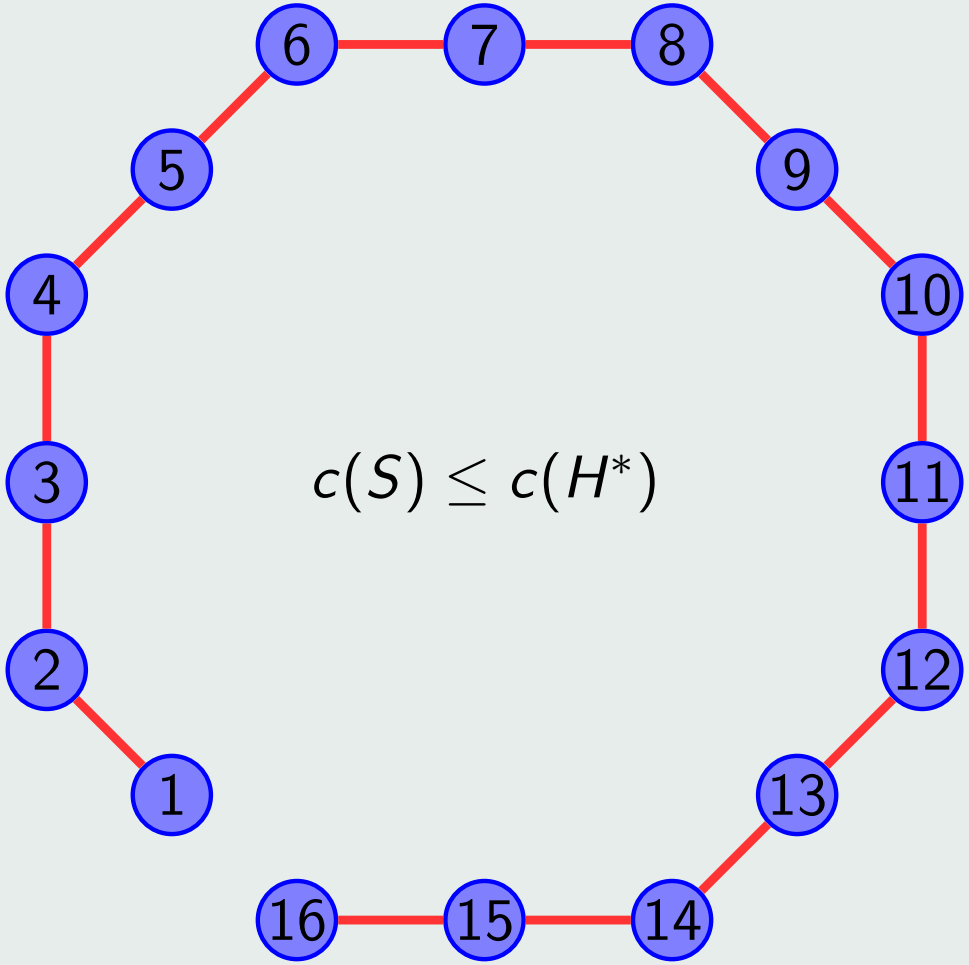
Algoritmo general de Hoogeveen

Algoritmo de Hoogeveen

1. Construye un árbol abarcador S de costo mínimo en (G, c).
2. Sea T el conjunto de vértices con paridad equivocada en S.
3. Sea J un T-join de costo mínimo en $(G, c) + (2 - k)$ vértices.
   1. Los $2 - k$ vértices están unidos a cada vértice de G con aristas de costo cero, pero no están unidos entre sí.
4. Sea F la unión de S y J: Cero o dos vértices de grado impar.
   1. El primer caso ocurre sólo si un extremo especificado pertenece a T y J lo deja expuesto: borre una arista arbitraria incidente a este vértice.
5. Encuentra un camino euleriano P de F.
6. Convierte P en un camino hamiltoniano H de G saltando vértices.

Propiedades de H^*

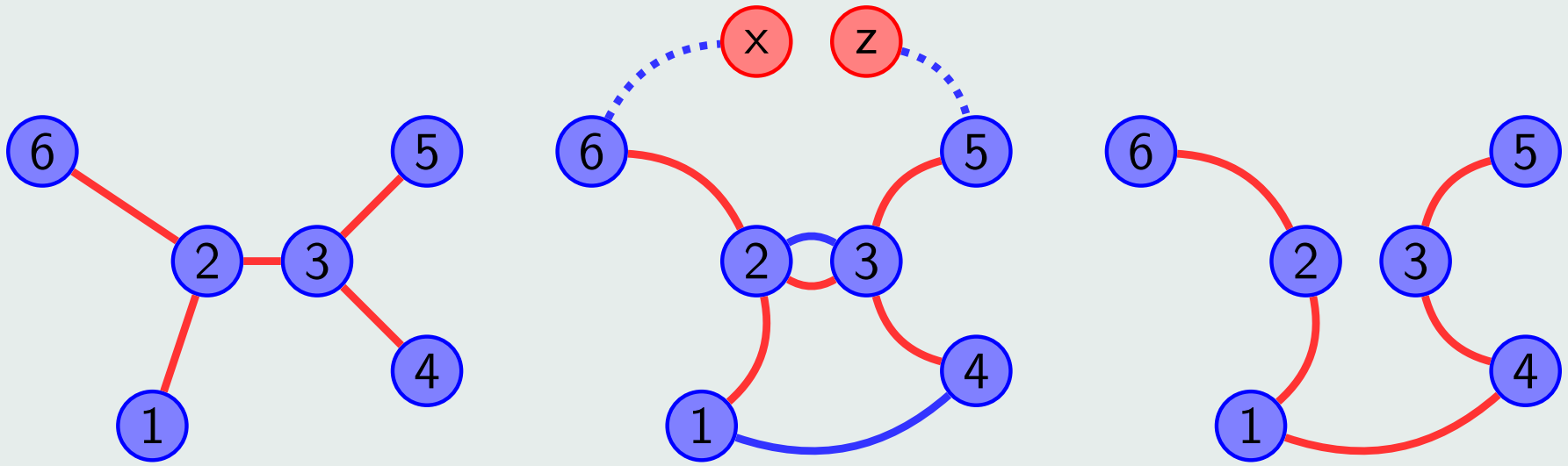
H^* es un árbol abarcador



$$c(S) \leq c(H^*)$$

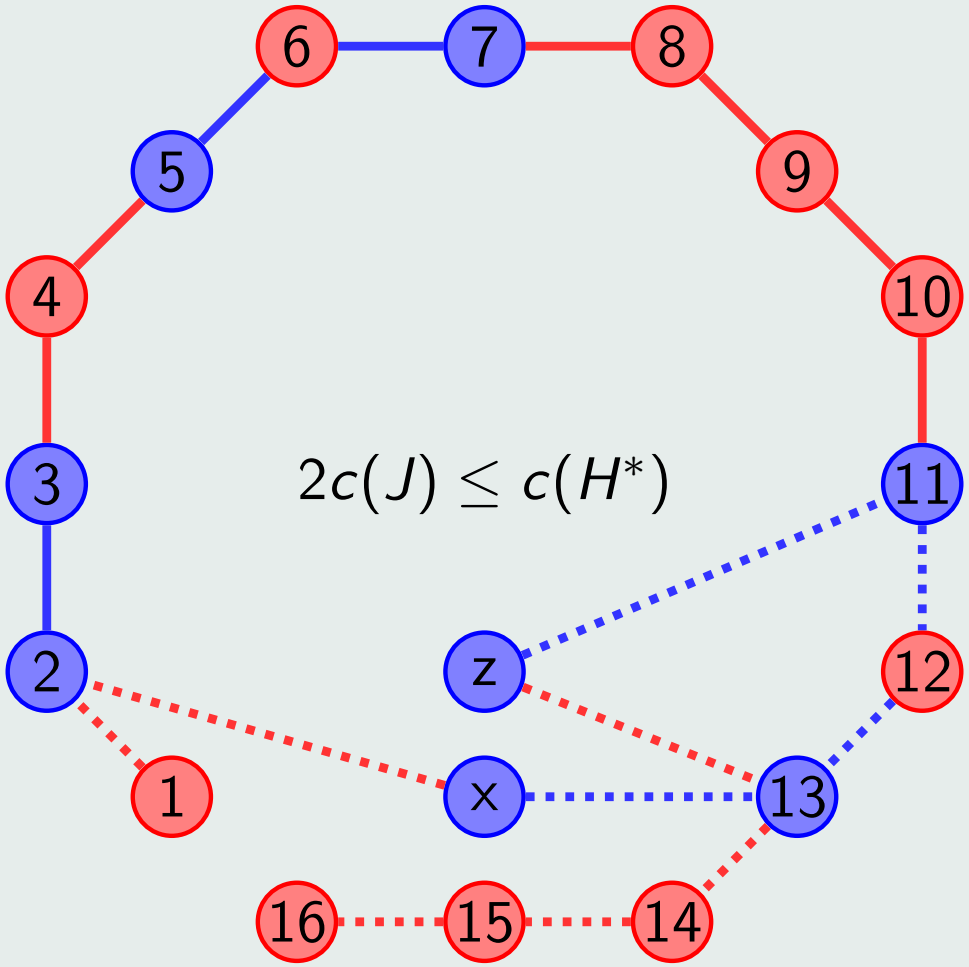
Ejemplo del algoritmo de Hoogeveen

Ningún extremo especificado



Propiedades de H^*

H^* contiene dos T-joins disjuntos



Garantía de aproximación

Demostración

Sea H^* un camino hamiltoniano de costo mínimo de (G, c). Como H^* es un árbol abarcador se tiene que

$$c(S) \leq c(H^*).$$

Como H^* contiene dos T-joins disjuntos se tiene que

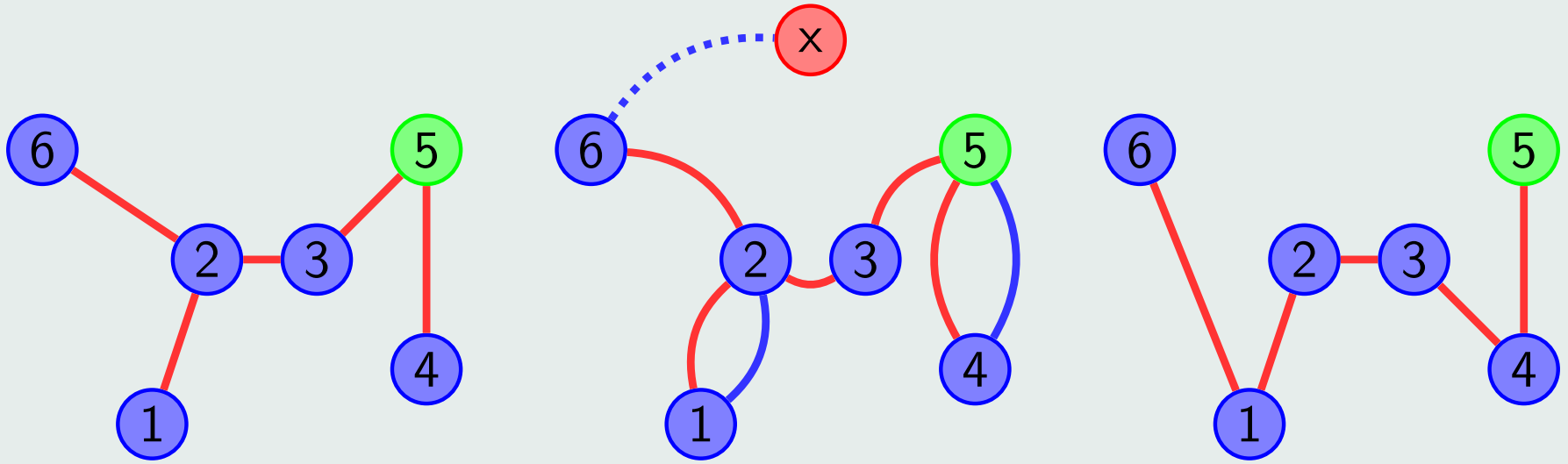
$$c(J) \leq \frac{1}{2} c(H^*).$$

Por la condición métrica $c(H) \leq c(F)$ y entonces se cumple que

$$c(H^*) \leq c(H) \leq c(F) = c(S) + c(J) \leq \frac{3}{2} c(H^*).$$

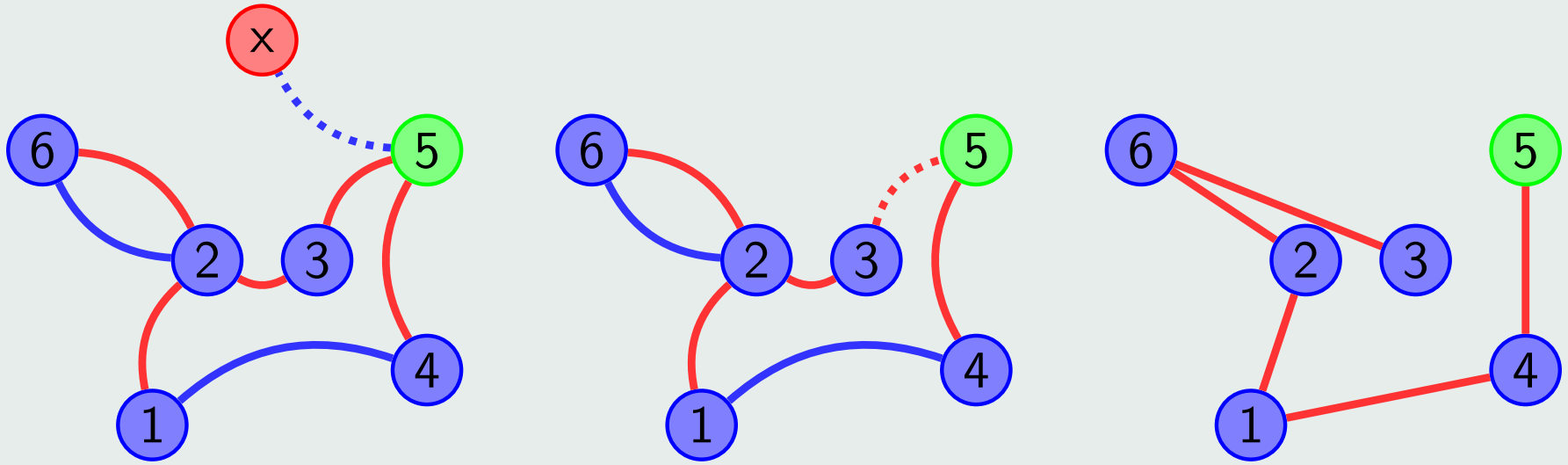
Ejemplo del algoritmo de Hoogeveen

Un extremo especificado (primer caso)



Ejemplo del algoritmo de Hoogeveen

Un extremo especificado (segundo caso)



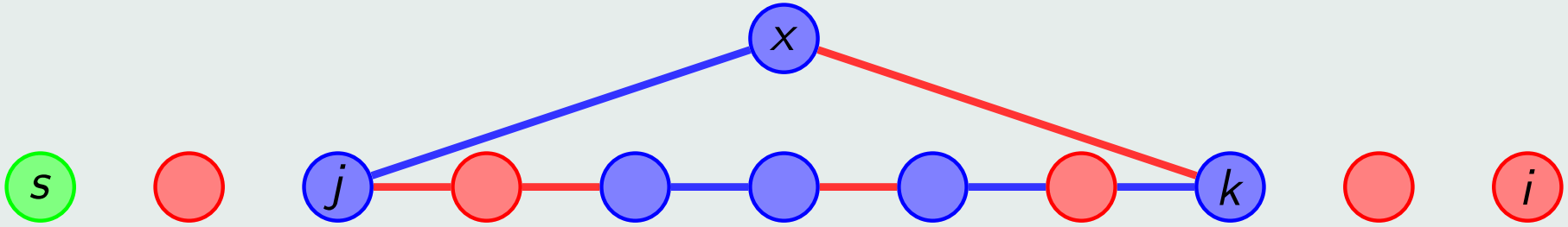
Garantía de aproximación

Demostración

Debemos probar que $c(J) \leq \frac{1}{2}c(H^*)$. Sean s e i los extremos de H^*. Sea j el primer vértice en T después de s y sea k el último vértice en T.

Caso 1: $s \notin T$

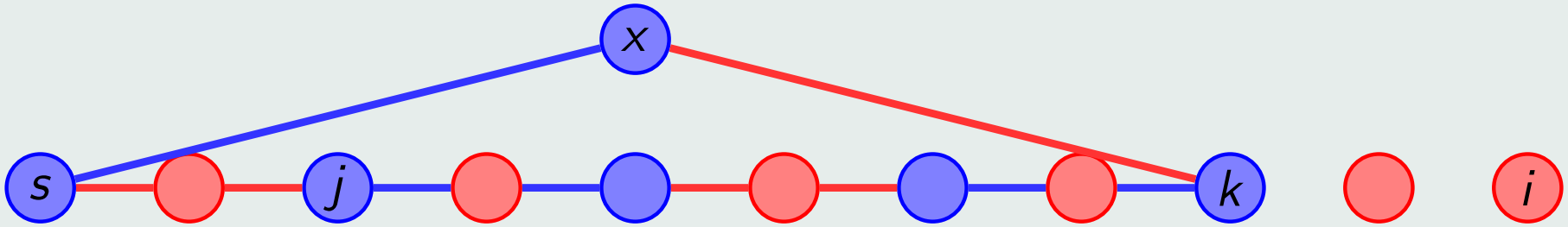
Las aristas de H^* entre j y k forman dos T-joins disjuntos. Por lo tanto $c(J) \leq \frac{1}{2}c(H^*)$ y $c(H^*) \leq c(H) \leq c(F) = c(S) + c(J) \leq \frac{3}{2}c(H^*)$.



Garantía de aproximación

Caso 2: $s \in T$

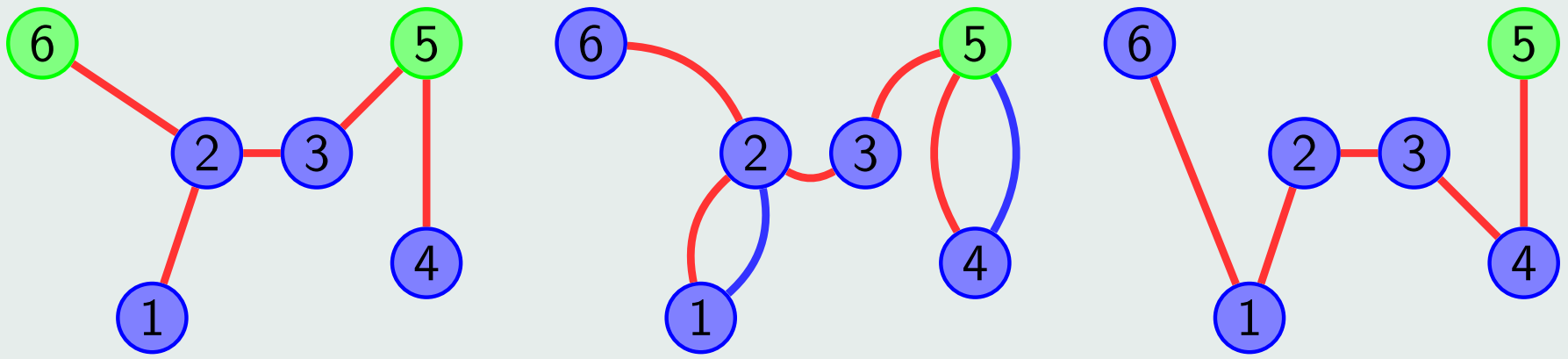
Las aristas de H^* entre s y k forman dos T-joins disjuntos J_1 y J_2. Sea J_1 el T-join que contiene las aristas entre s y j.



Si $c(J_1) \leq c(J_2)$ entonces $c(J) \leq c(J_1) \leq \frac{1}{2}c(H^*)$ y, saltando vértices, obtenemos un camino hamiltoniano con costo $\leq c(S) + c(J) \leq \frac{3}{2}c(H^*)$. Si $c(J_2) \leq c(J_1)$ entonces la unión de S y J_2 es euleriana. Si borramos una arista incidente a s entonces, saltando vértices, obtenemos un camino hamiltoniano con costo $\leq c(S) + c(J_2) \leq \frac{3}{2}c(H^*)$.

Ejemplo del algoritmo de Hoogeveen

Dos extremos especificados



Garantía de aproximación

Teorema (Hoogeveen, 1991)

Con dos extremos especificados, H satisface $c(H) \leq \frac{5}{3}c(H^*)$.

Teorema (An, Kleinberg, Shmoys, 2015)

Existe un algoritmo de aproximación para el problema del camino hamiltoniano con dos extremos especificados y costos métricos con garantía de aproximación $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.618$.

Esto es todo por hoy

¡Gracias!

Posgrado en Optimización

Posgrado en Optimización

UAM Azcapotzalco