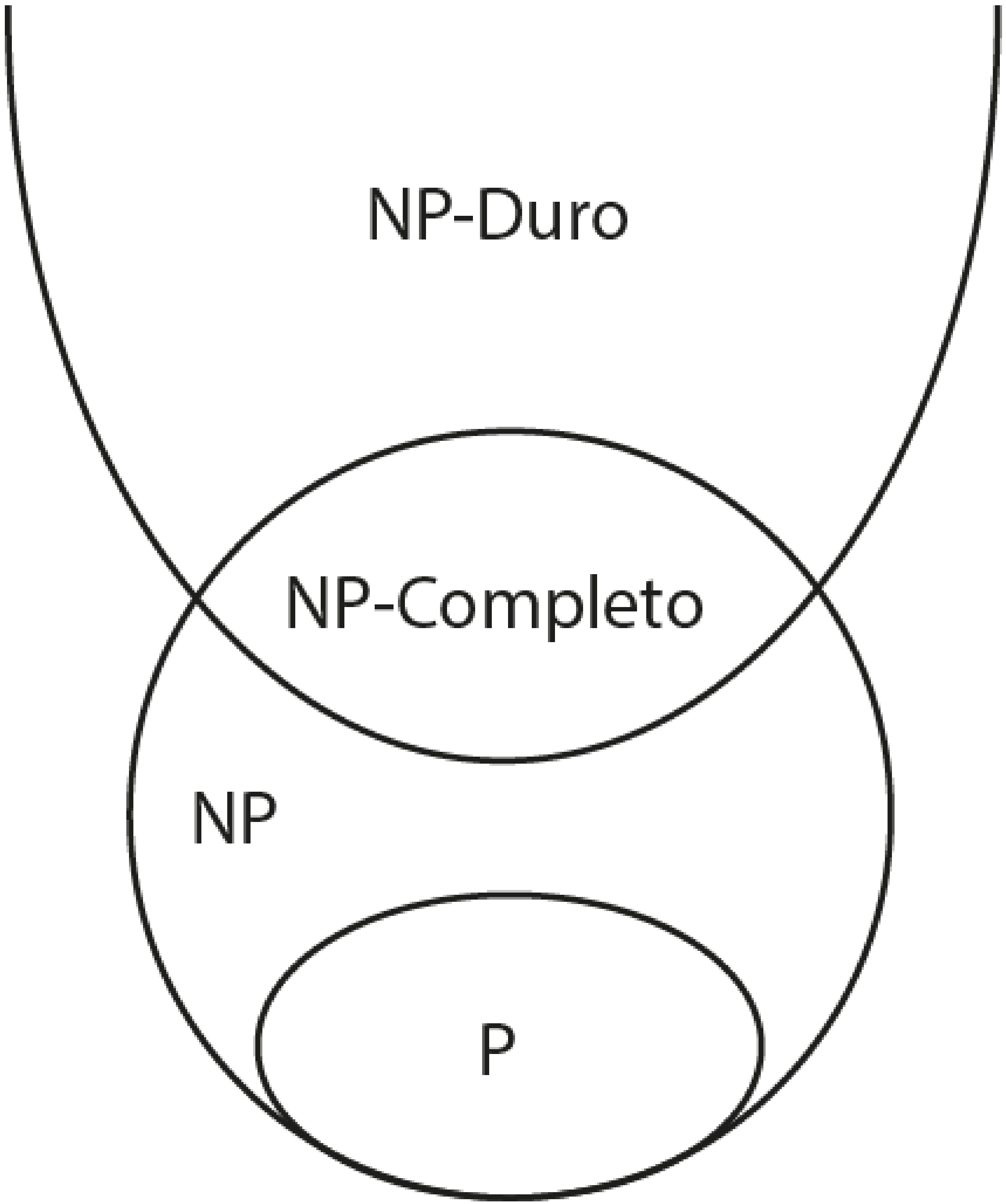
Escuela de Algoritmos de Aproximación
Inaproximabilidad

Marco Antonio Heredia Velasco

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco

Recordemos

Categorias de complejidad

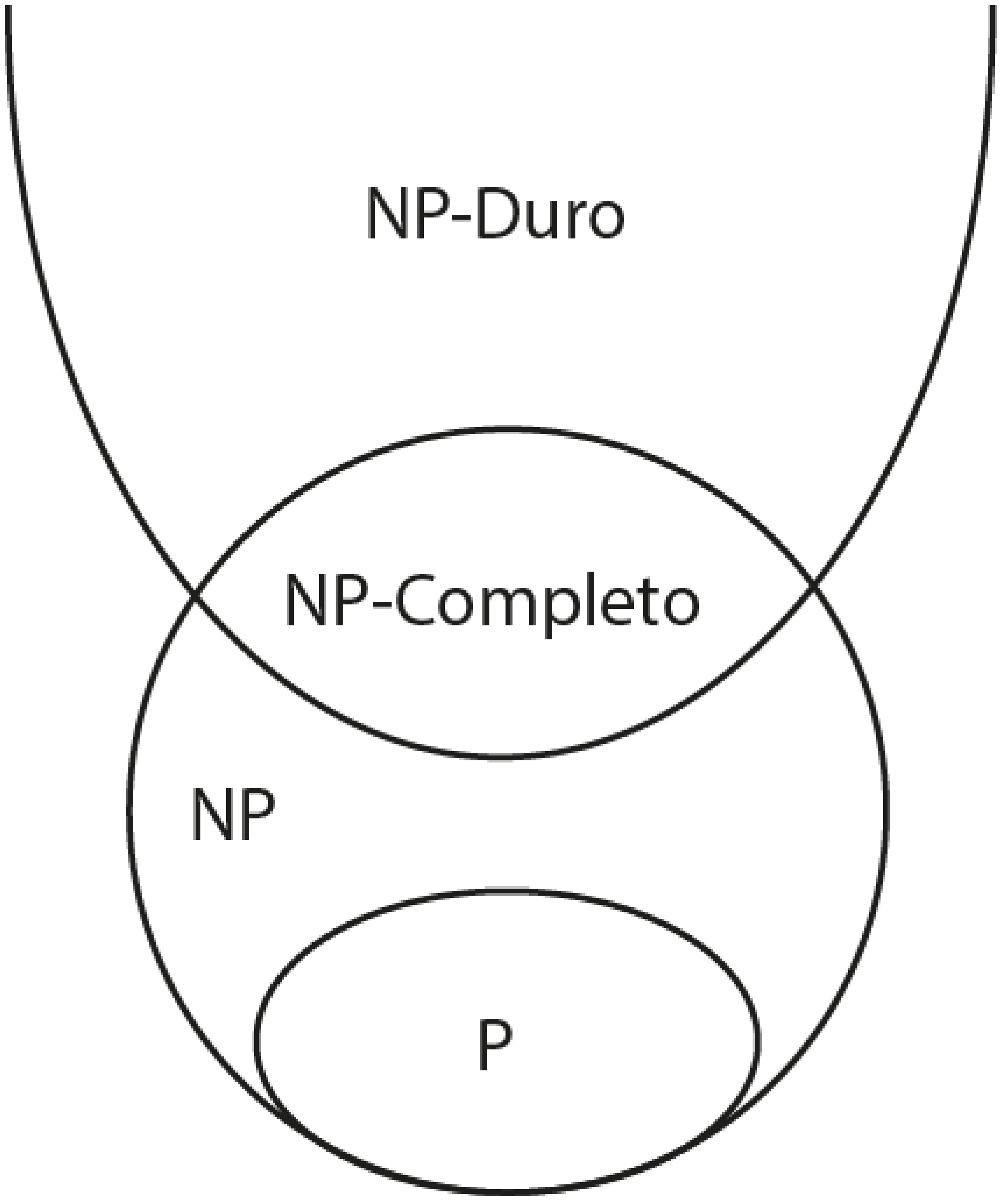


P = Polinomial

NP = No Determinista Polinomial
(una solución se puede verificar en tiempo polinomial)

NP-Completo = Los "difíciles" de NP

Categorias de complejidad



NP-Hard

NP-Difícil

NP-Complejo

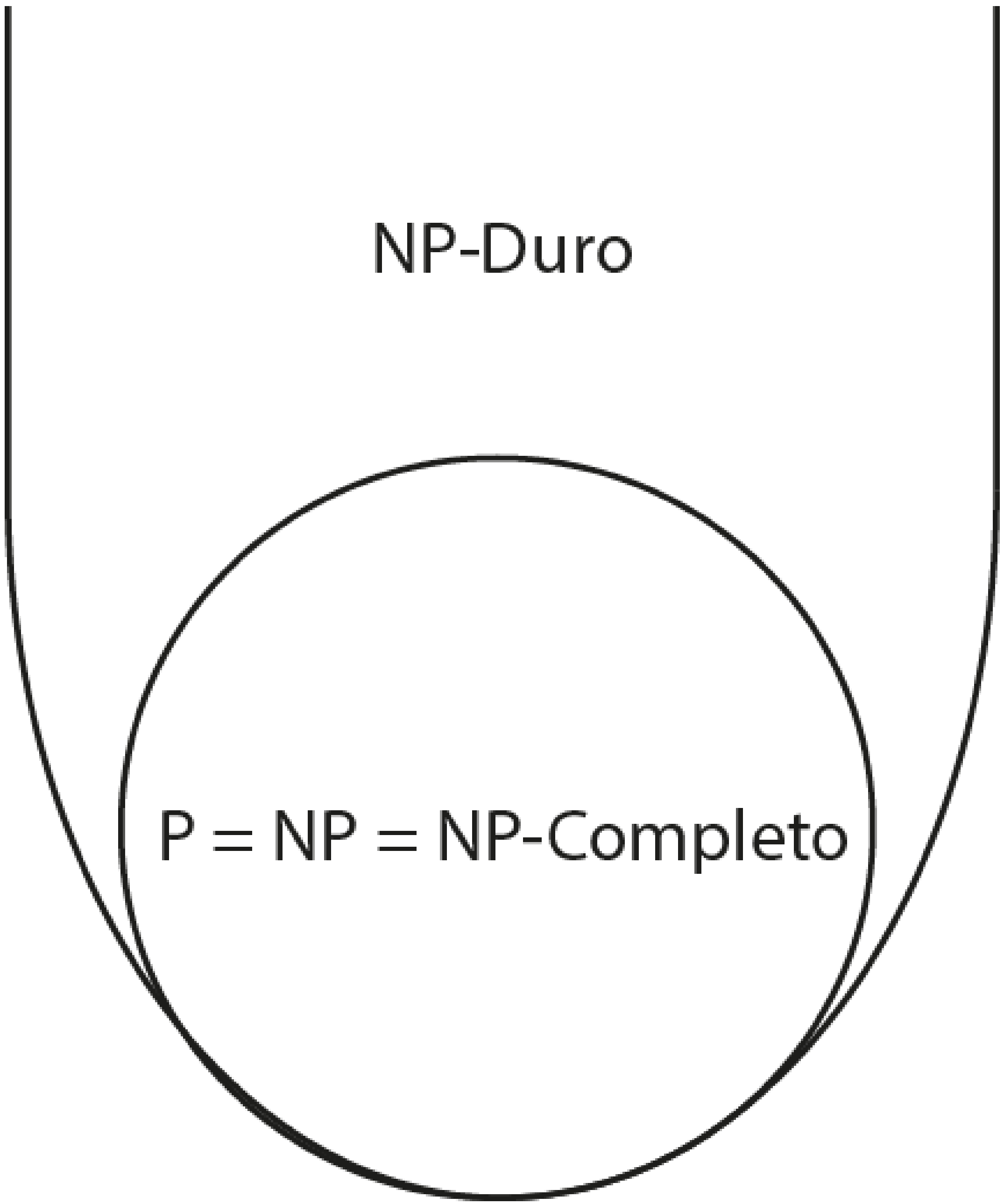
NP-Duro

La pregunta del millón

$$P \subseteq NP$$

$$¿P = NP?$$

La pregunta del millón



$$P \subseteq NP$$

$$¿P = NP?$$

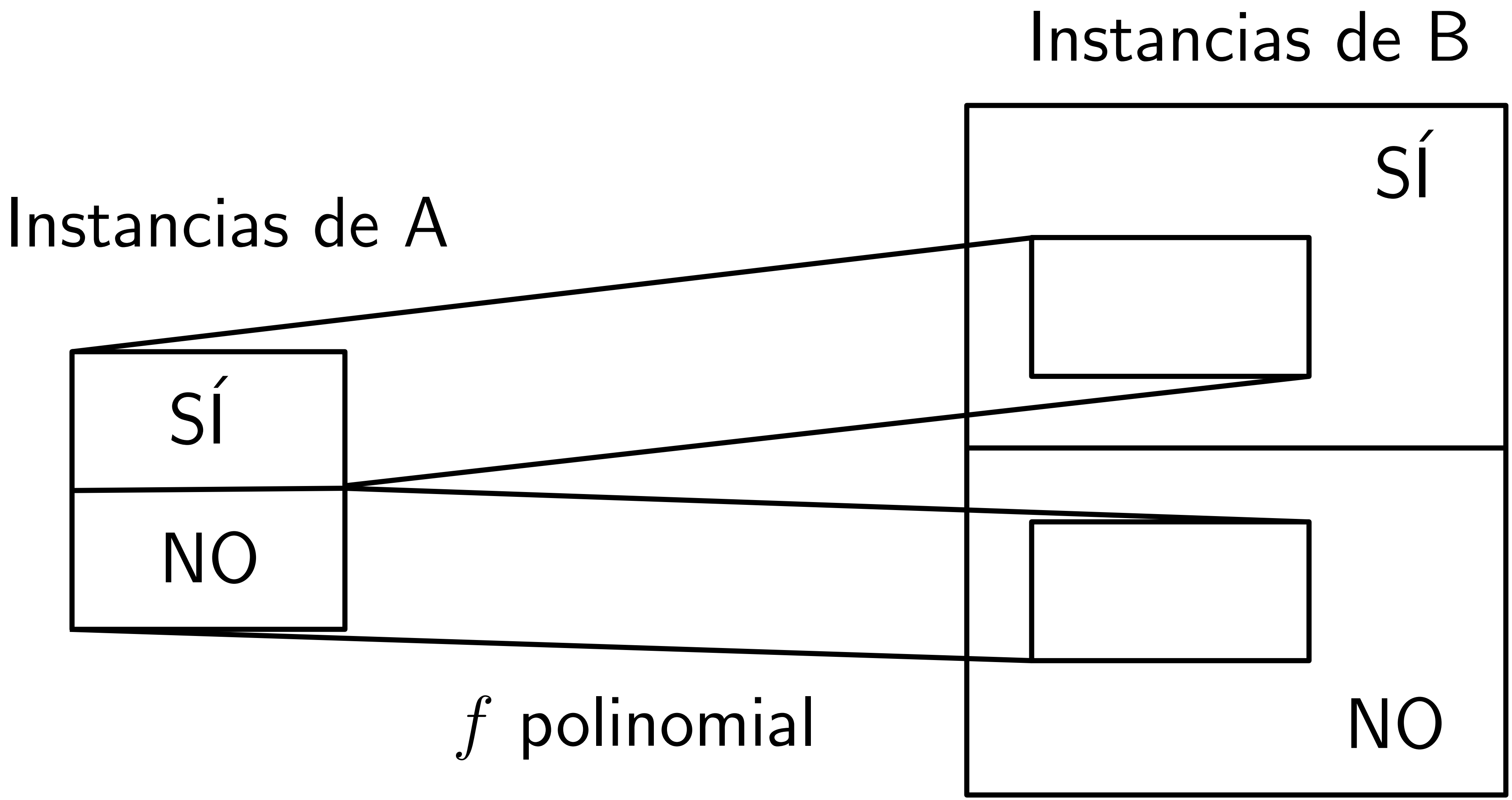
Para que P=NP basta demostrar que algún problema NP-Completo se puede resolver en tiempo polinomial.

Si fueran iguales

Reducción polinomial

Sean A y B dos problemas (lenguajes)

$$A \leq_P B$$



Muchos a uno

A $\leq_P$ B

- B es al menos tan difícil como A
- Cualquier instancia de A puede ser resuelta con un algoritmo que resuelva B.
- Si B tiene algoritmo polinomial entonces A también

Definiciones

L es NP-Difícil si:

$$\forall L' \in \text{NP se tiene } L' \leq_P L$$

L es NP-Completo si:

L es NP-Difícil

$L \in$ NP

Inaproximabilidad de k-centros

k-centros (más general)

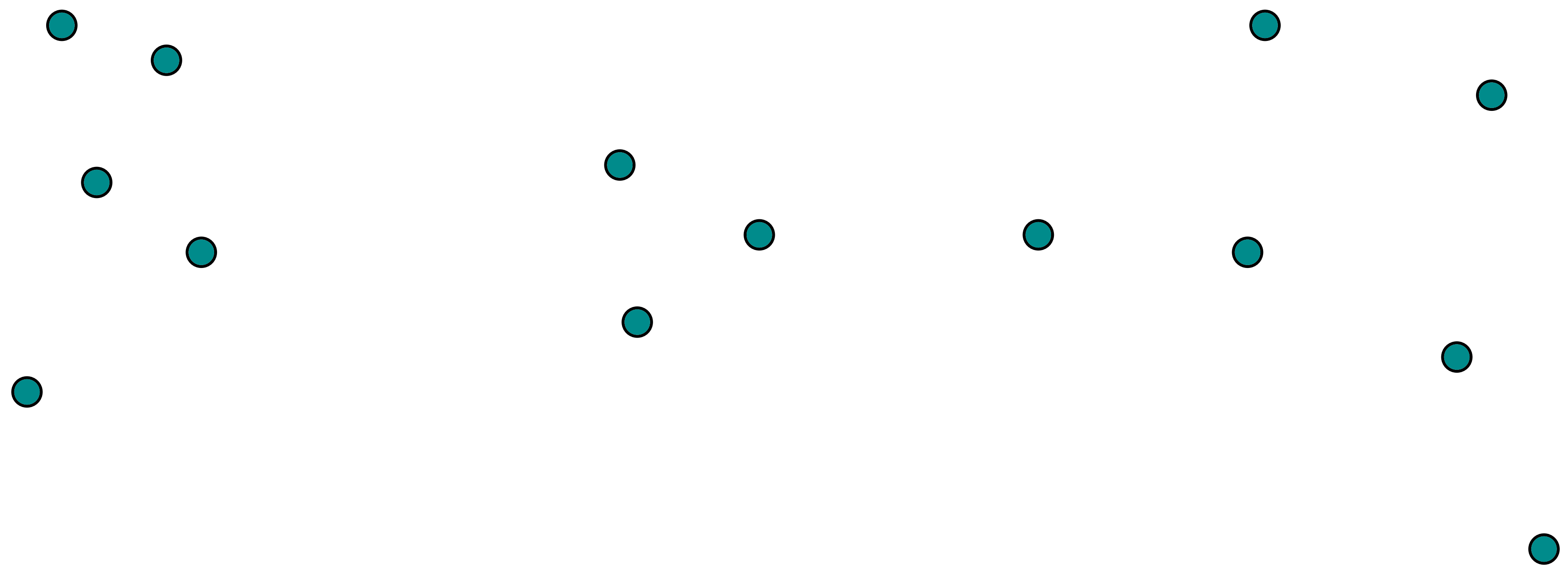
Dada la gráfica completa no dirigida $G = (V, E)$ y una función distancia entre vértices d, que es una métrica.

Seleccionar k vertices, que llamaremos centros, tal que se minimiza la distancia máxima de los vértices a su centro más cercano.

k-centros (más general)

Dada la gráfica completa no dirigida $G = (V, E)$ y una función distancia entre vértices d, que es una métrica.

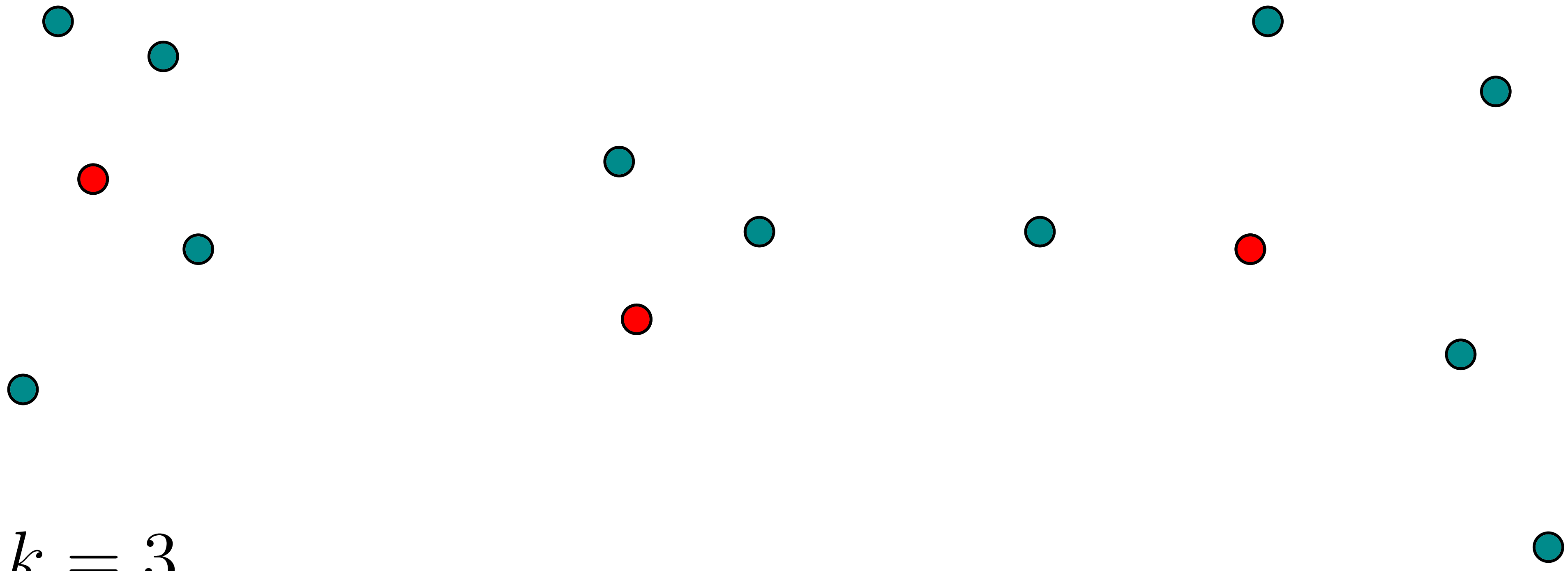
Seleccionar k vertices, que llamaremos centros, tal que se minimiza la distancia máxima de los vértices a su centro más cercano.



k-centros (más general)

Dada la gráfica completa no dirigida $G = (V, E)$ y una función distancia entre vértices d, que es una métrica.

Seleccionar k vertices, que llamaremos centros, tal que se minimiza la distancia máxima de los vértices a su centro más cercano.

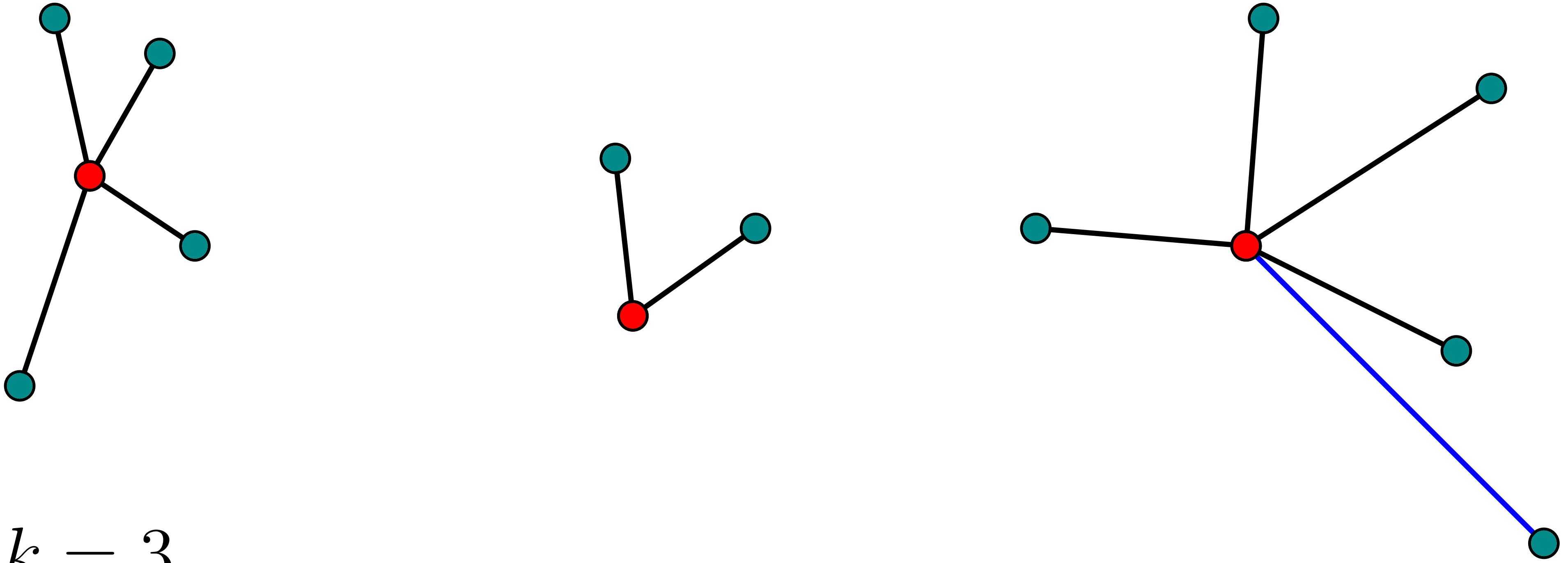


$k = 3$

k-centros (más general)

Dada la gráfica completa no dirigida $G = (V, E)$ y una función distancia entre vértices d, que es una métrica.

Seleccionar k vertices, que llamaremos centros, tal que se minimiza la distancia máxima de los vértices a su centro más cercano.

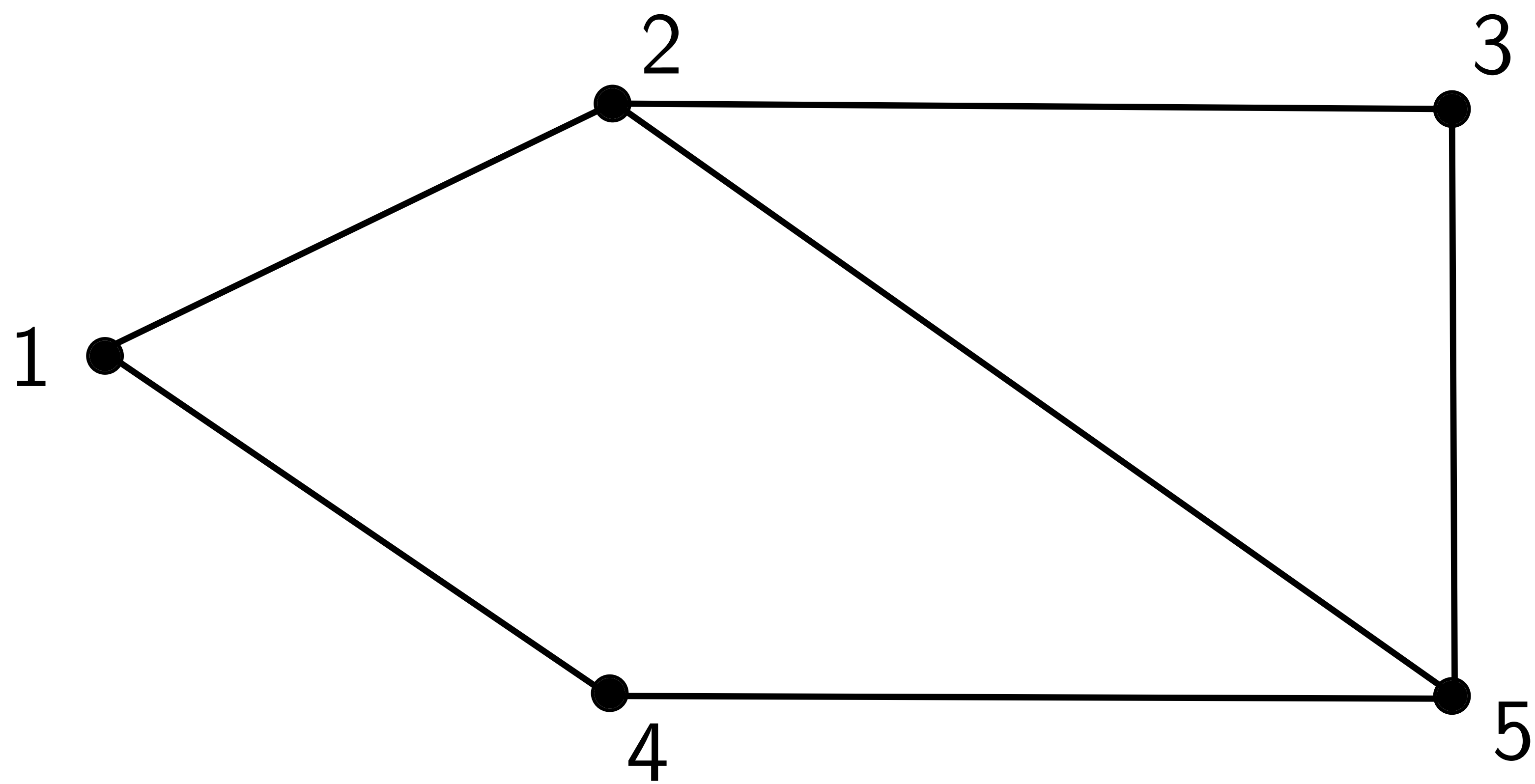


$k = 3$

Conjunto Dominante

Dado $G = (V, E)$ y un entero k.

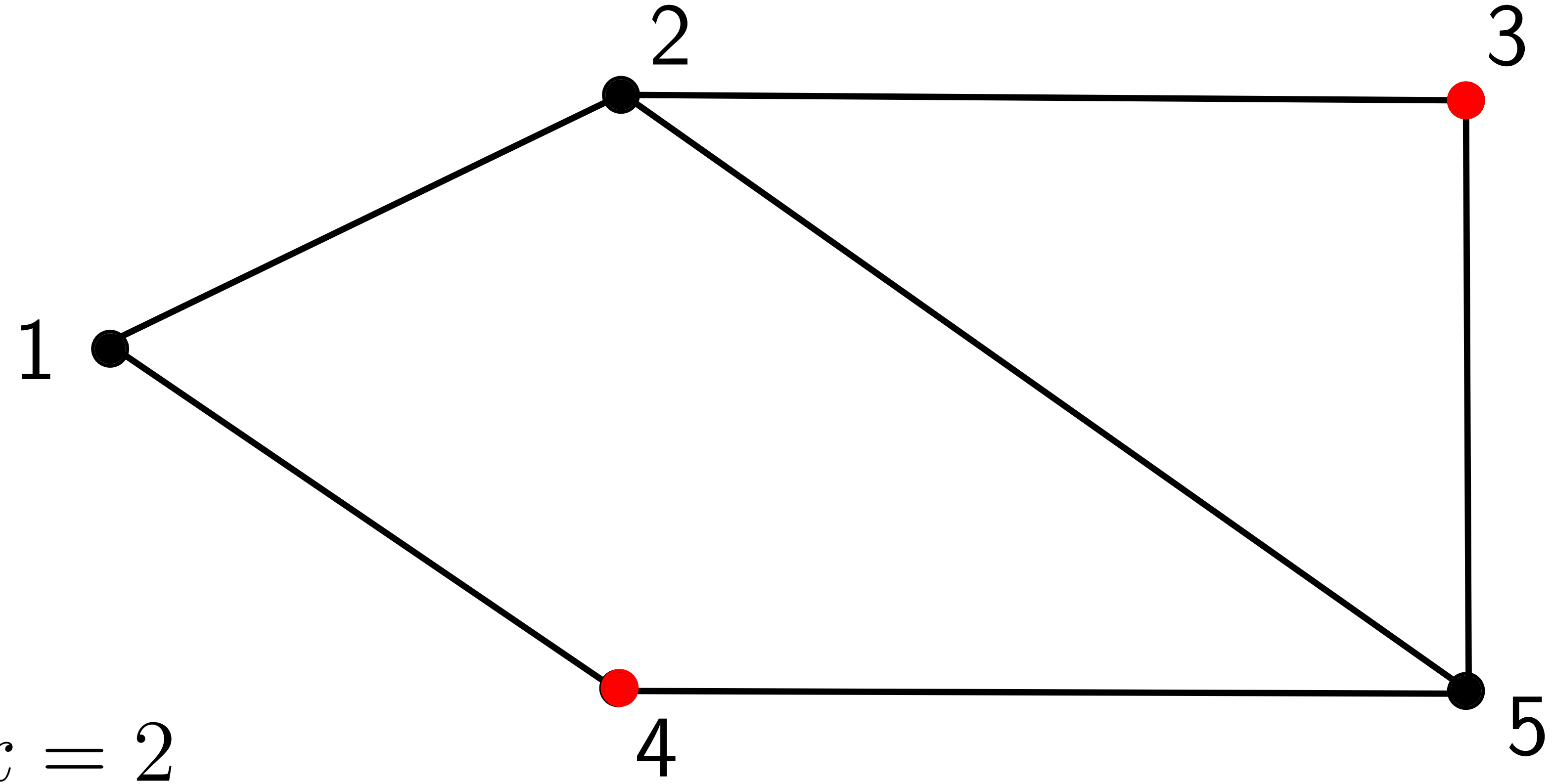
¿Existe un conjunto $S \subseteq V$ de tamaño k de forma que cada vértice está en S o es adyacente a algún vértice en S?



Conjunto Dominante

Dado $G = (V, E)$ y un entero k.

¿Existe un conjunto $S \subseteq V$ de tamaño k de forma que cada vértice está en S o es adyacente a algún vértice en S?



$k = 2$

Conjunto Dominante

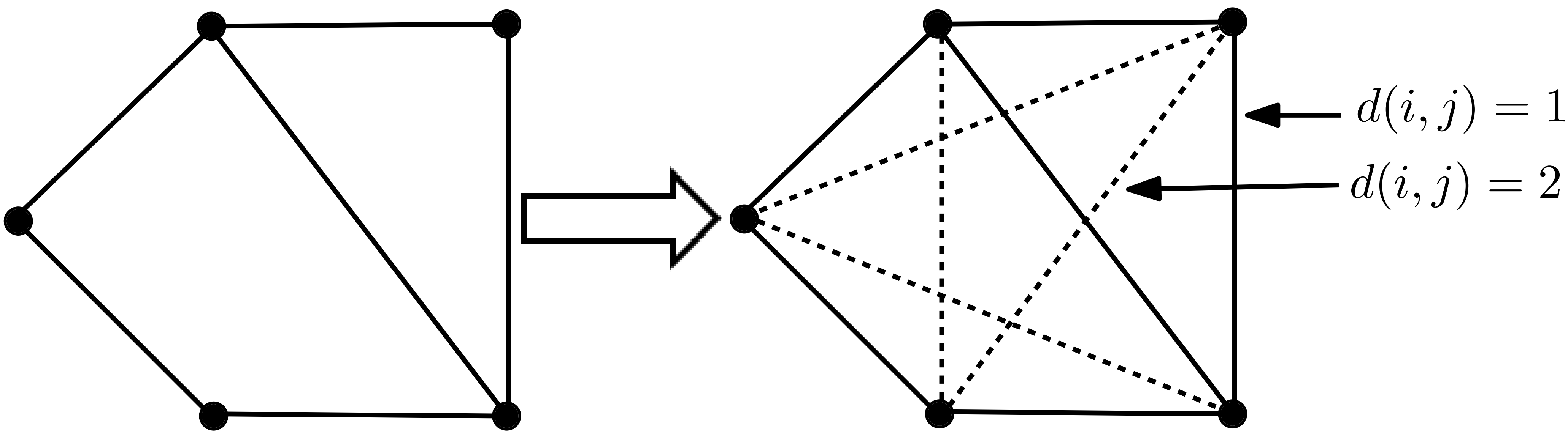
Dado $G = (V, E)$ y un entero k.

¿Existe un conjunto $S \subseteq V$ de tamaño k de forma que cada vértice está en S o es adyacente a algún vértice en S?

Sabemos que es NP-Completo.

Teorema

A menos que P=NP, no hay una ρ-aproximación para el problema k-centros para cualquier $\rho < 2$.



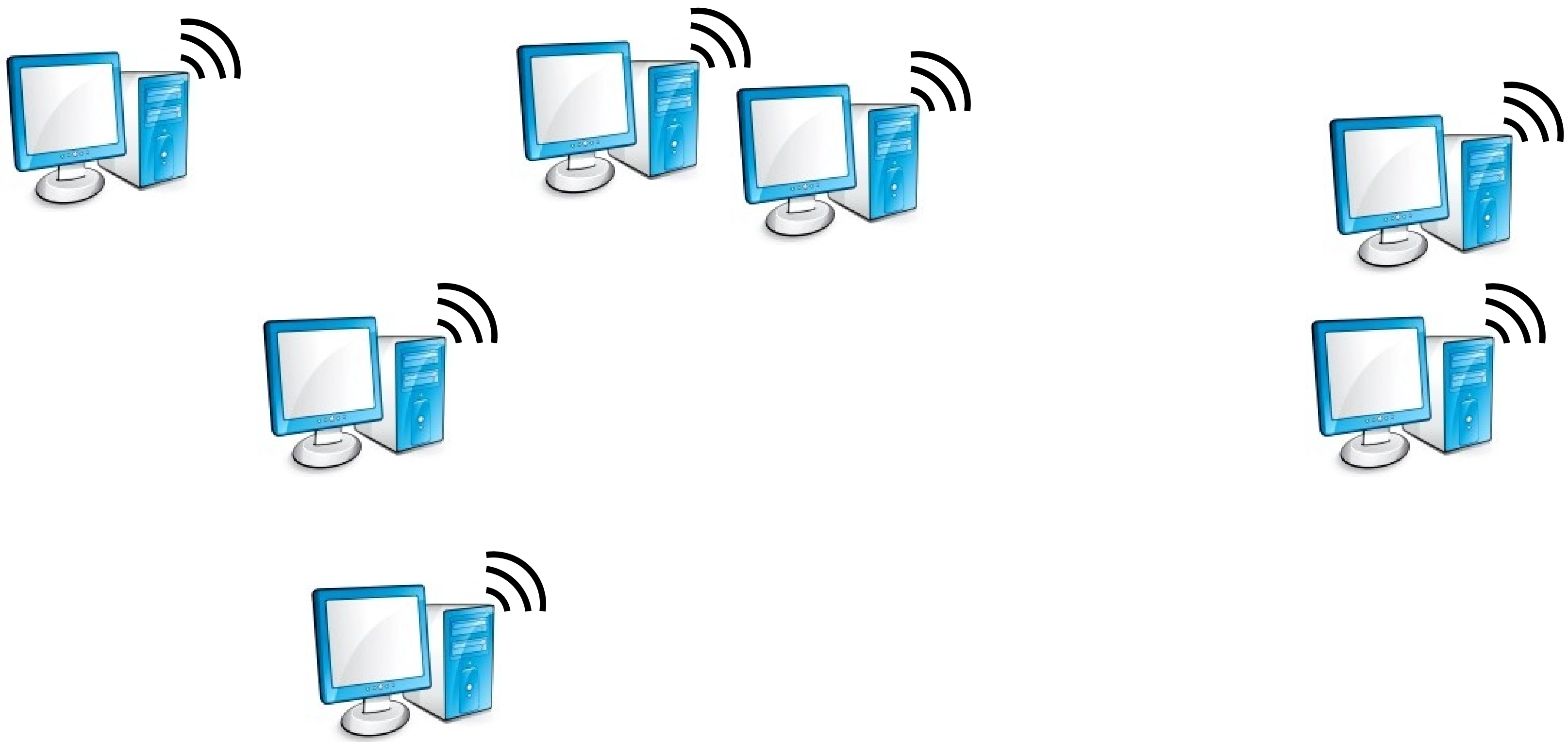
Instancia de conjunto dominante

Instancia de k-centro

Difusión en redes móviles optimizando energía.

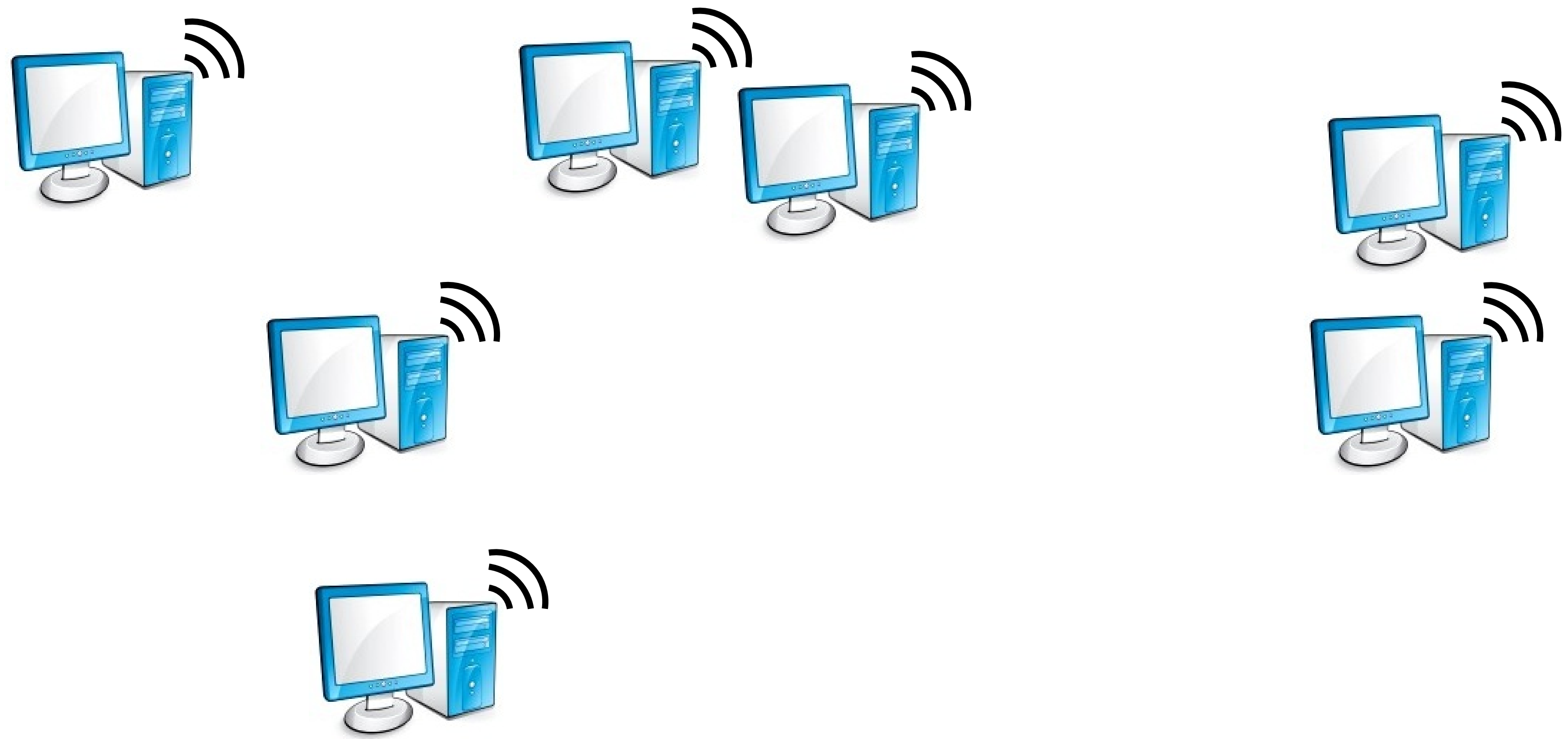
J. M. Díaz-Báñez, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, M. A. Heredia, y J. Urrutia.
Min-energy broadcast in mobile ad hoc networks with restricted motion.
Journal of Combinatorial Optimization, 24:413–426, 2012.

Red inalámbrica *ad-hoc*



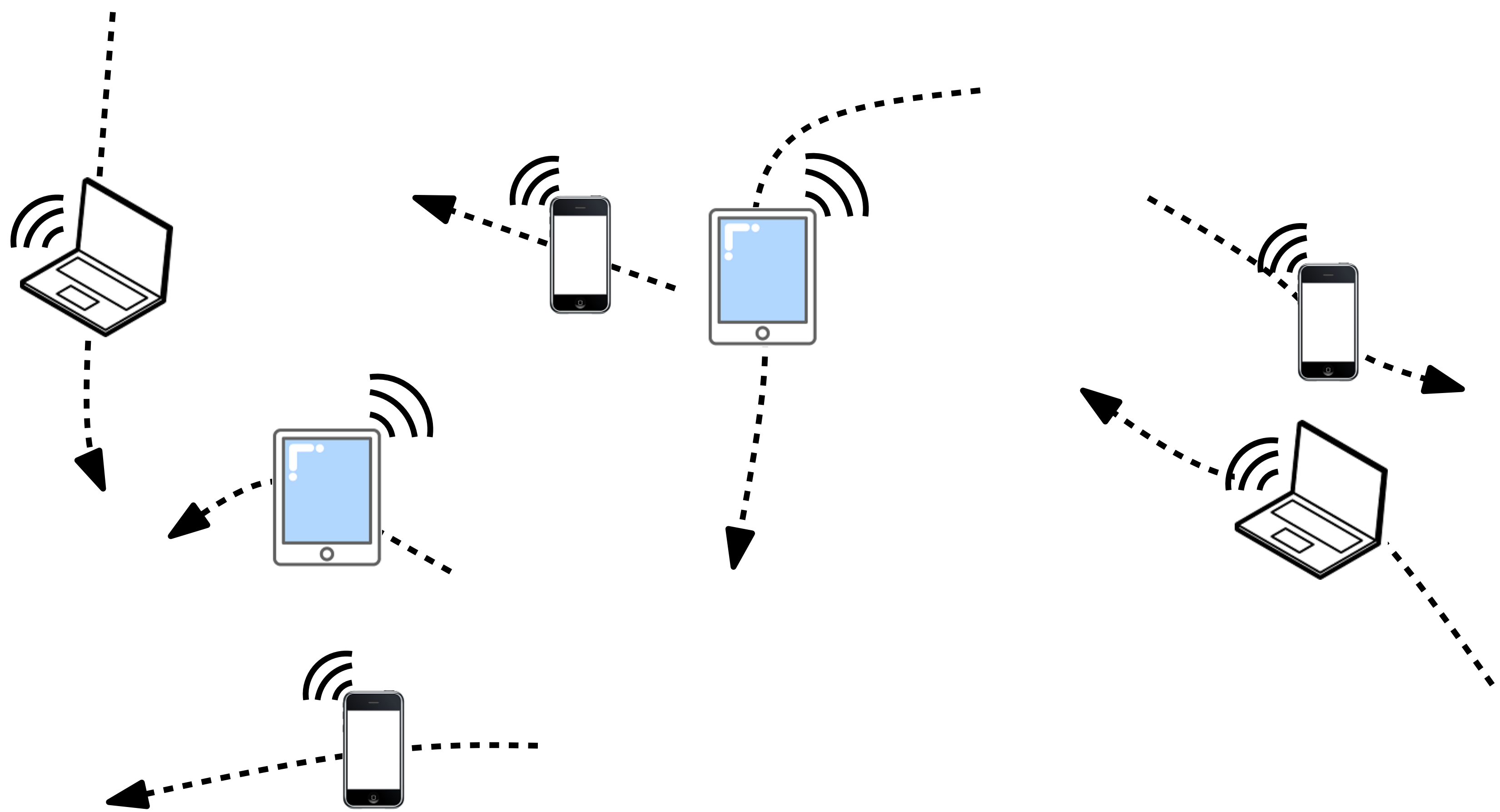
Red inalámbrica *ad-hoc*

No centralizada (sin infraestructura).



Red inalámbrica *ad-hoc*

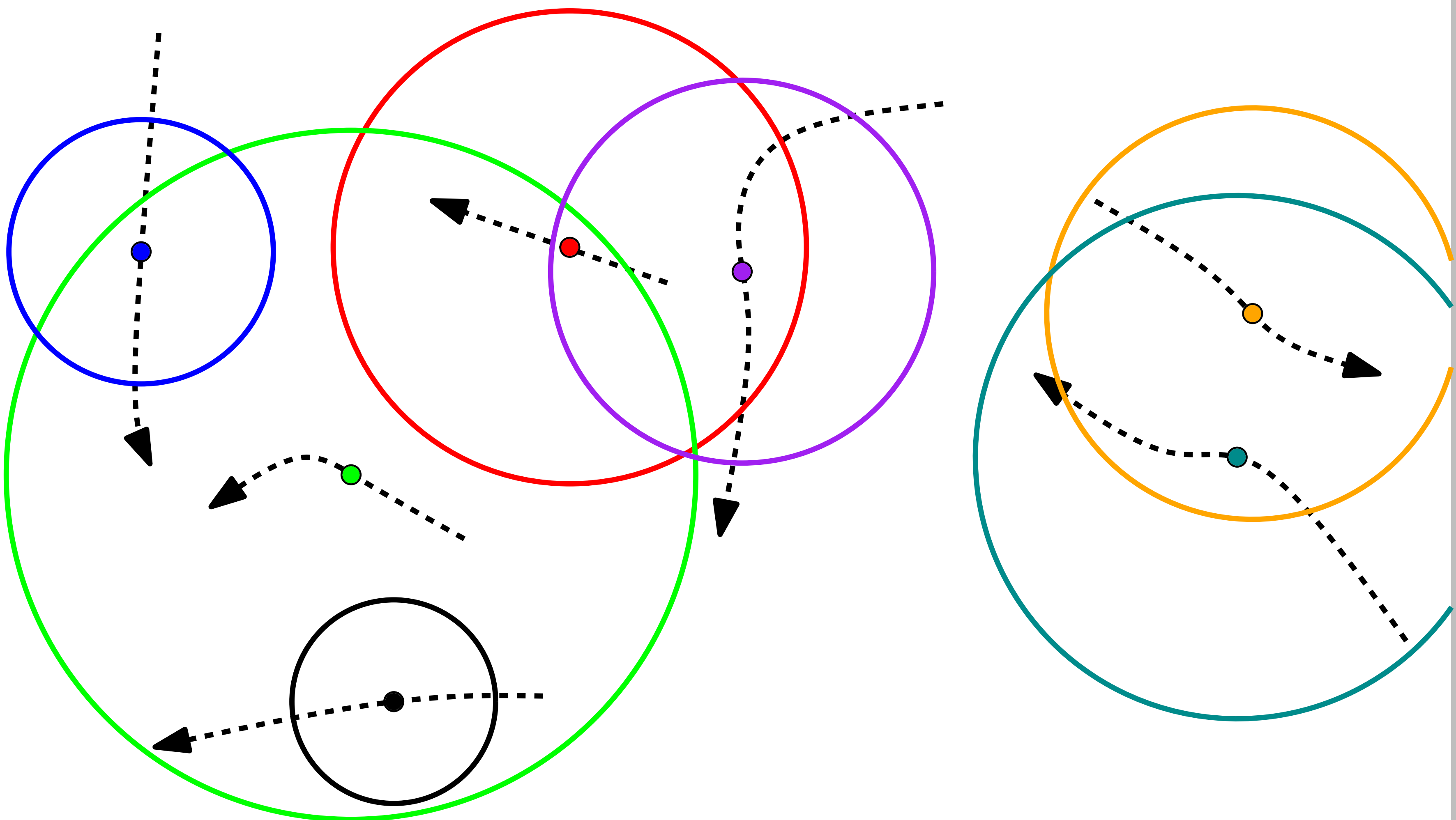
Mobile Ad-hoc Networks (MANETs)



Red inalámbrica *ad-hoc*

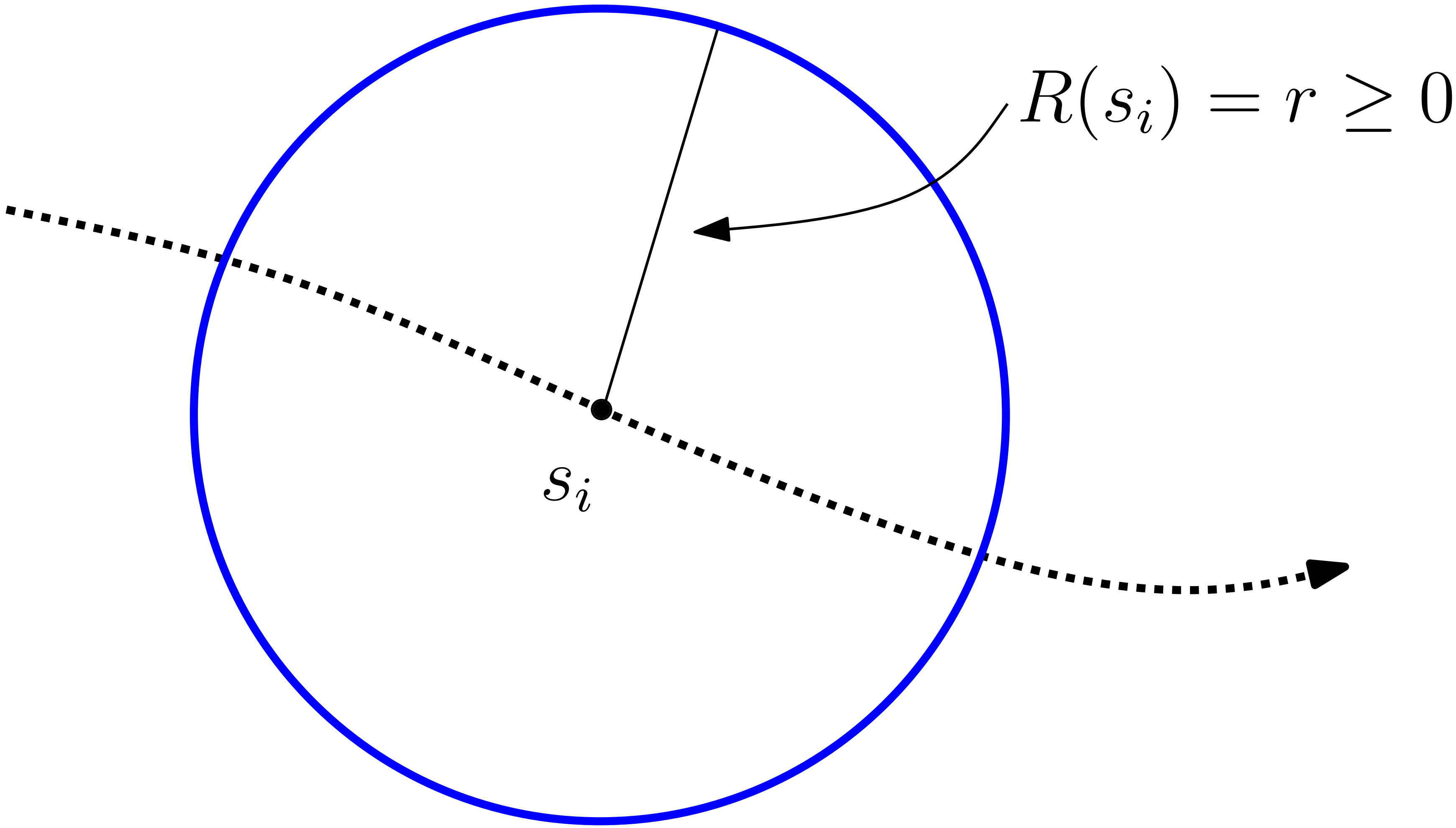
Mobile Ad-hoc Networks (MANETs)

Se modelan con un conjunto S de n puntos.



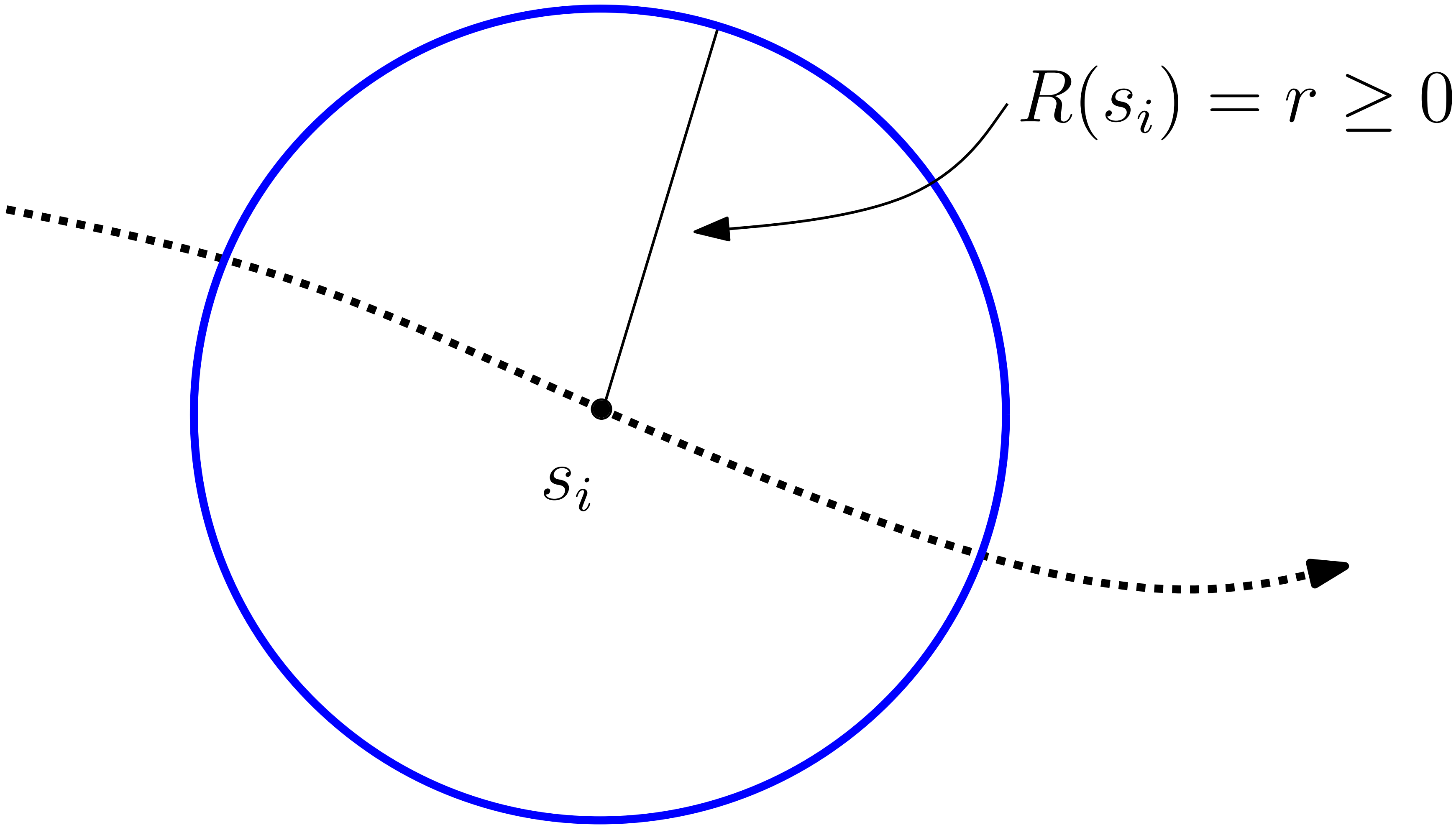
Rango de Transmisión

Una asignación de rangos R da radios a las $s_i \in S$.



Rango de Transmisión

Una asignación de rangos R da radios a las $s_i \in S$.

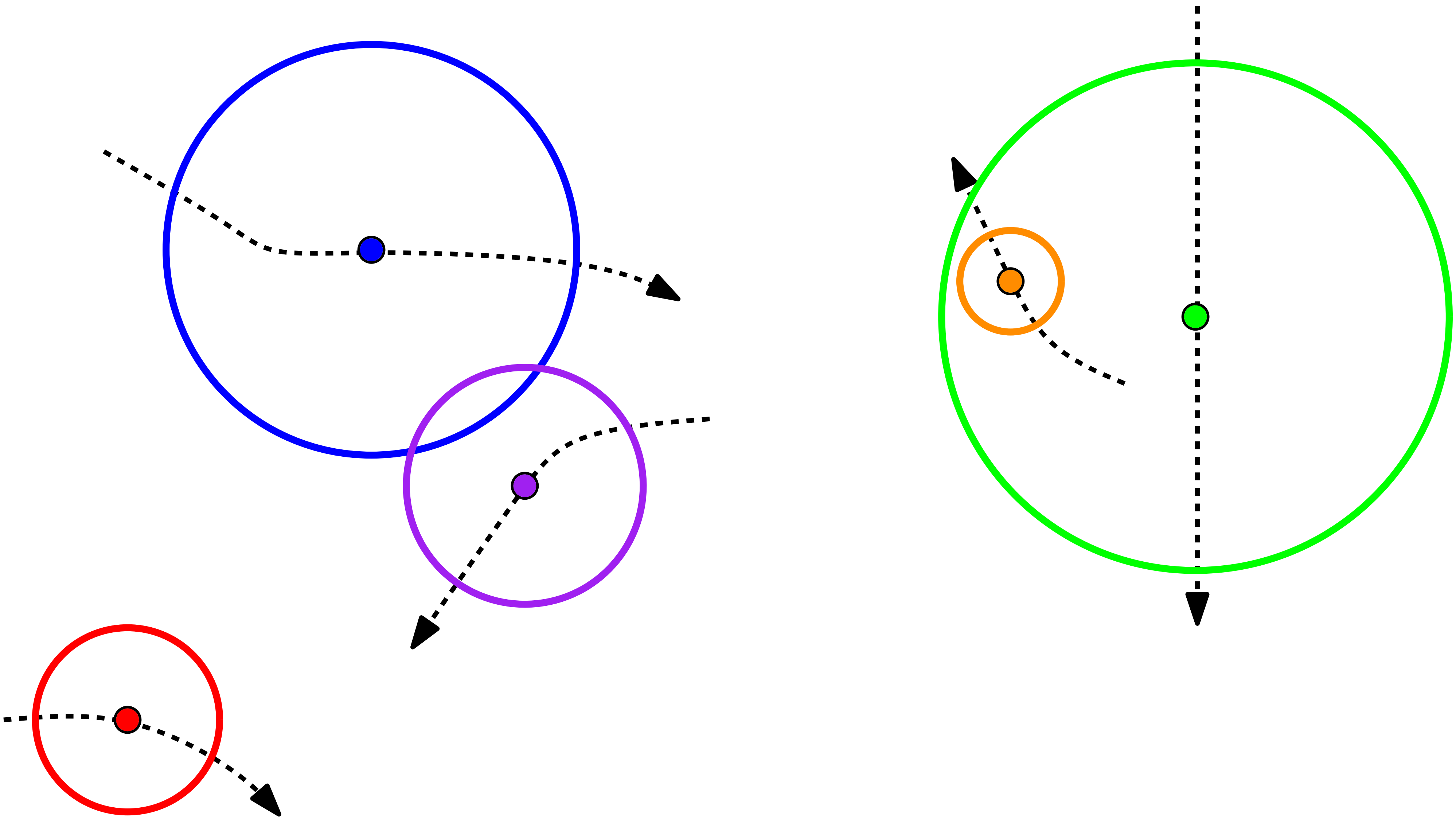


El tamaño de radio de transmisión representa la cantidad de energía utilizada por una estación.

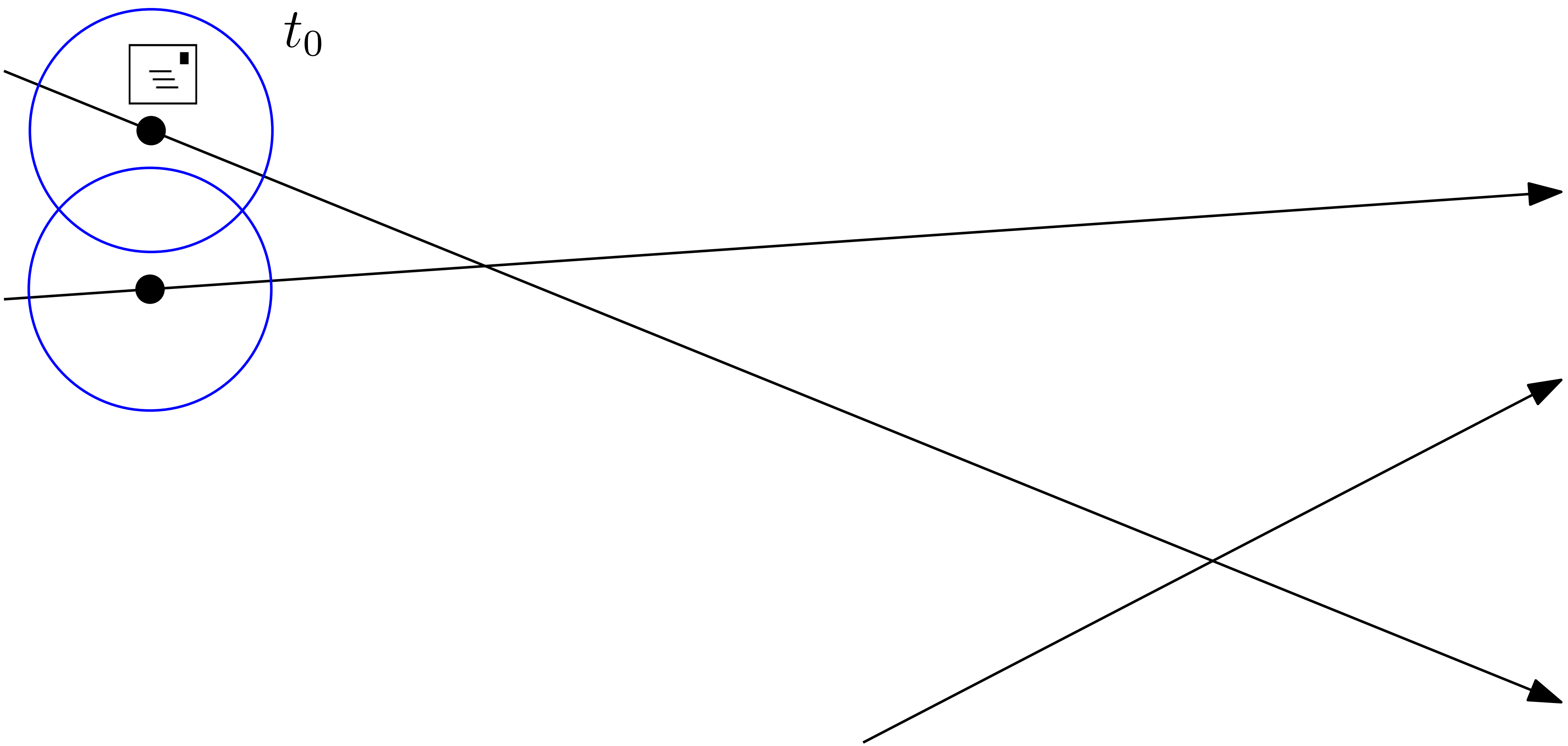
Costo total de energía de una red

$\sum_{s_i \in S} R(s_i)^\alpha$

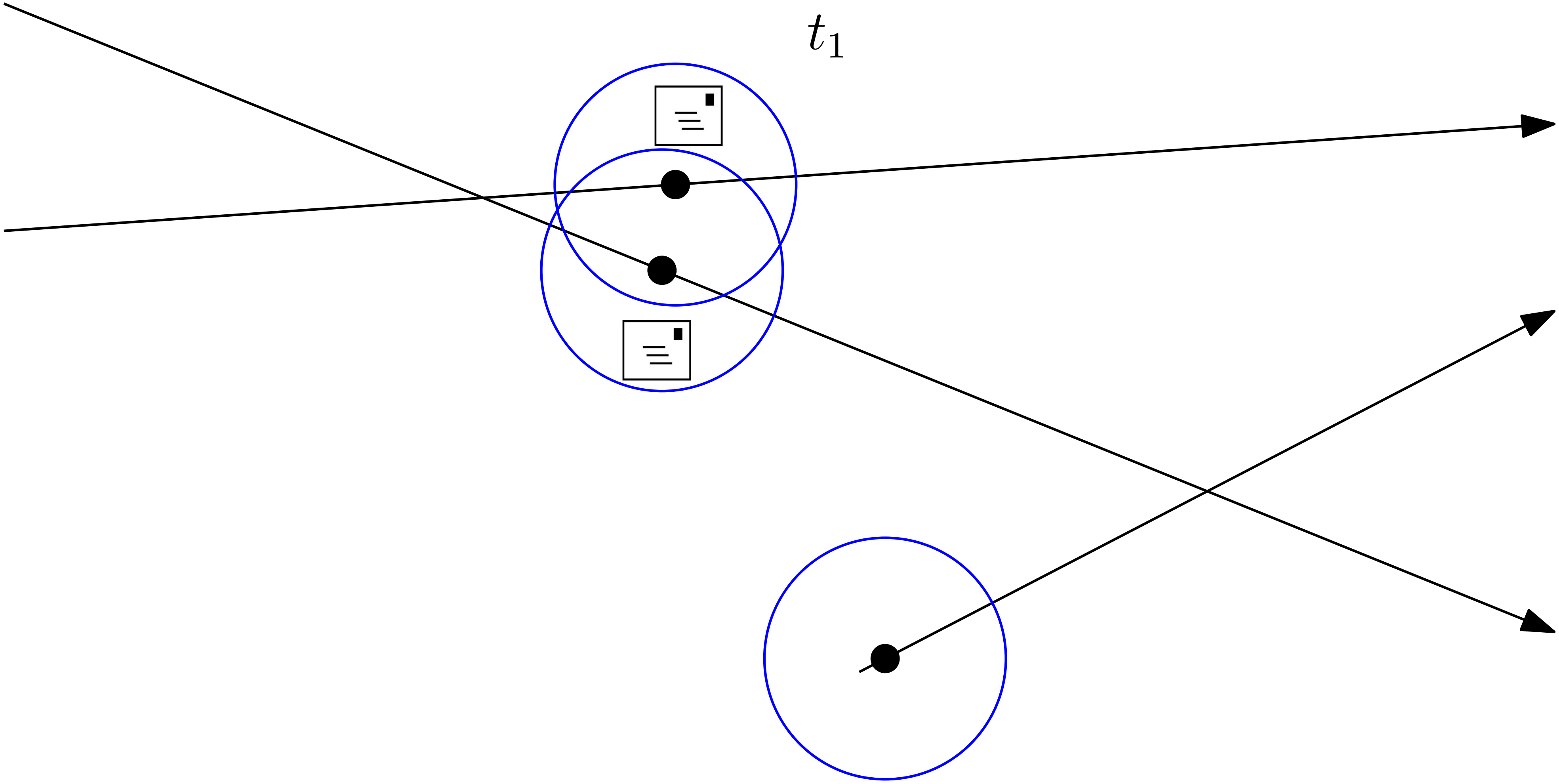
$\alpha \geq 1$ gradiente distancia-poder



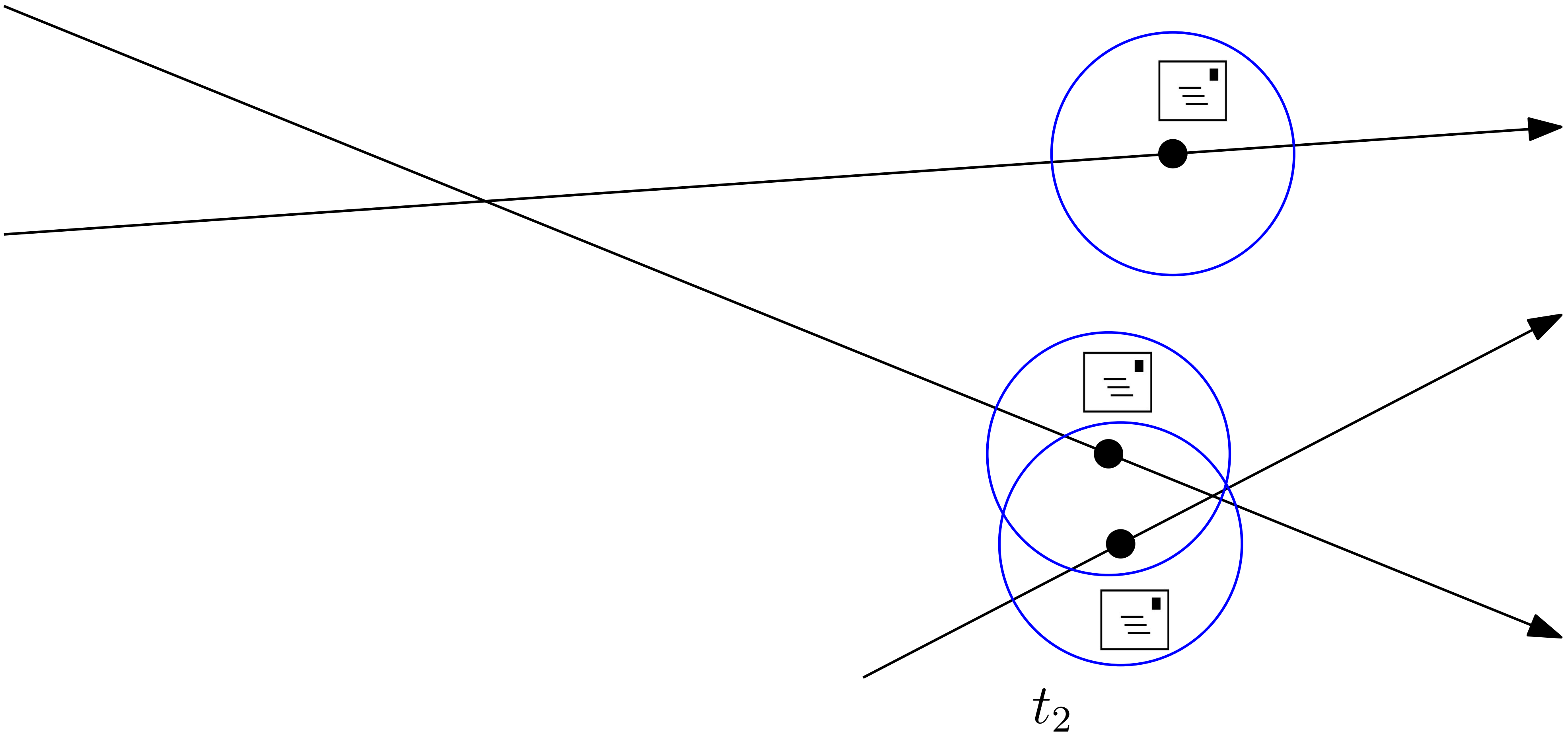
Operación de difusión (Broadcast)



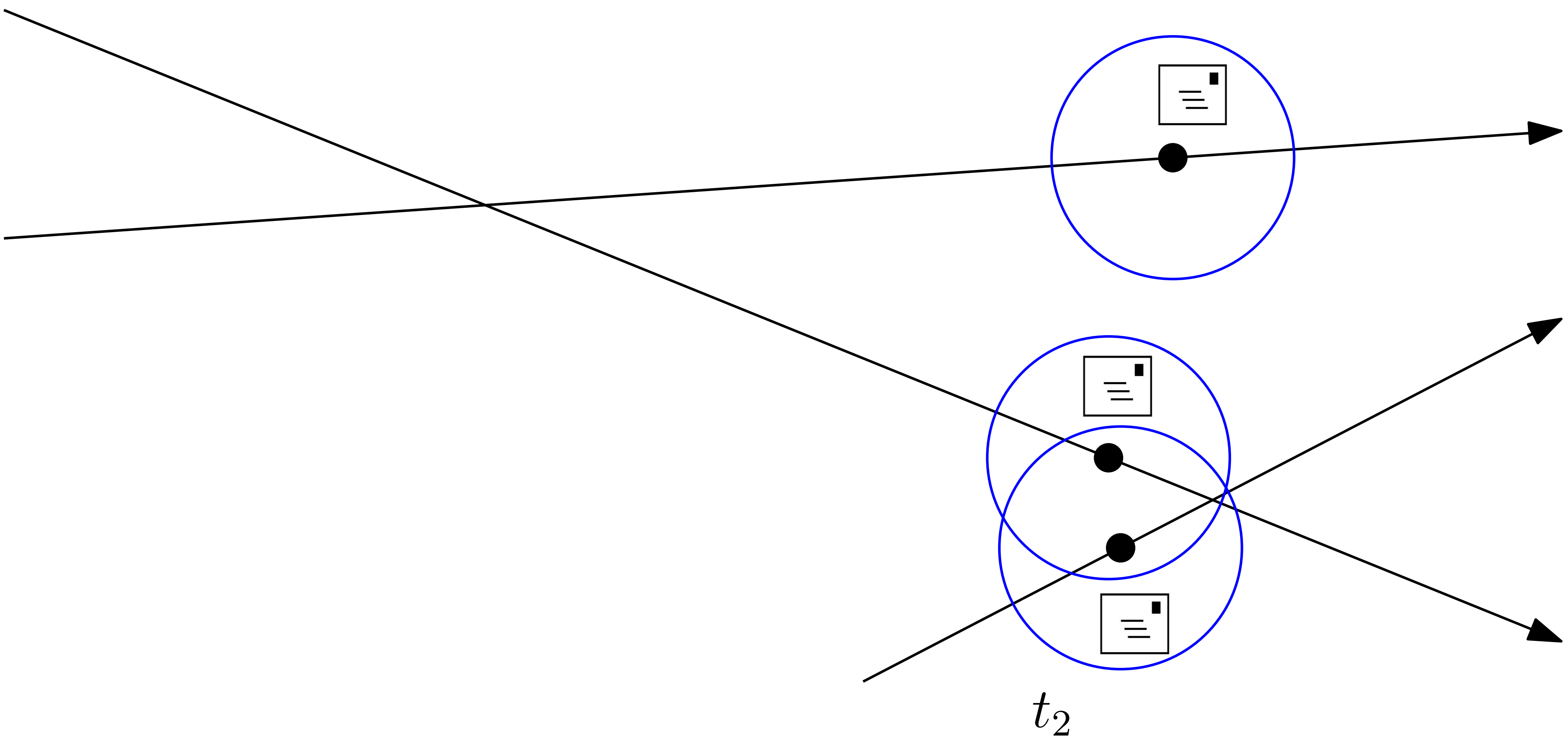
Operación de difusión (Broadcast)



Operación de difusión (Broadcast)



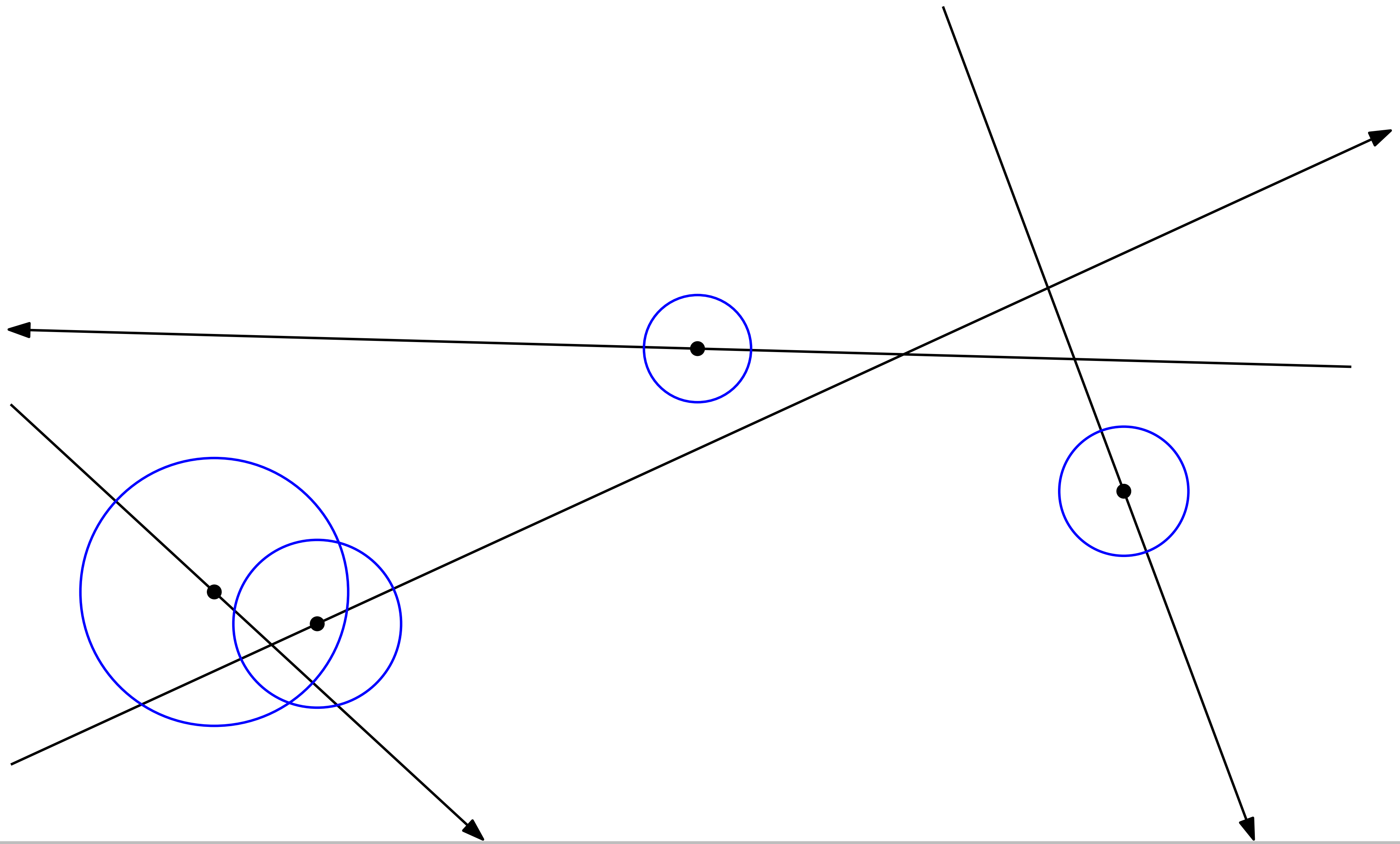
Operación de difusión (Broadcast)



La operación es exitosa si todas las estaciones reciben el mensaje.

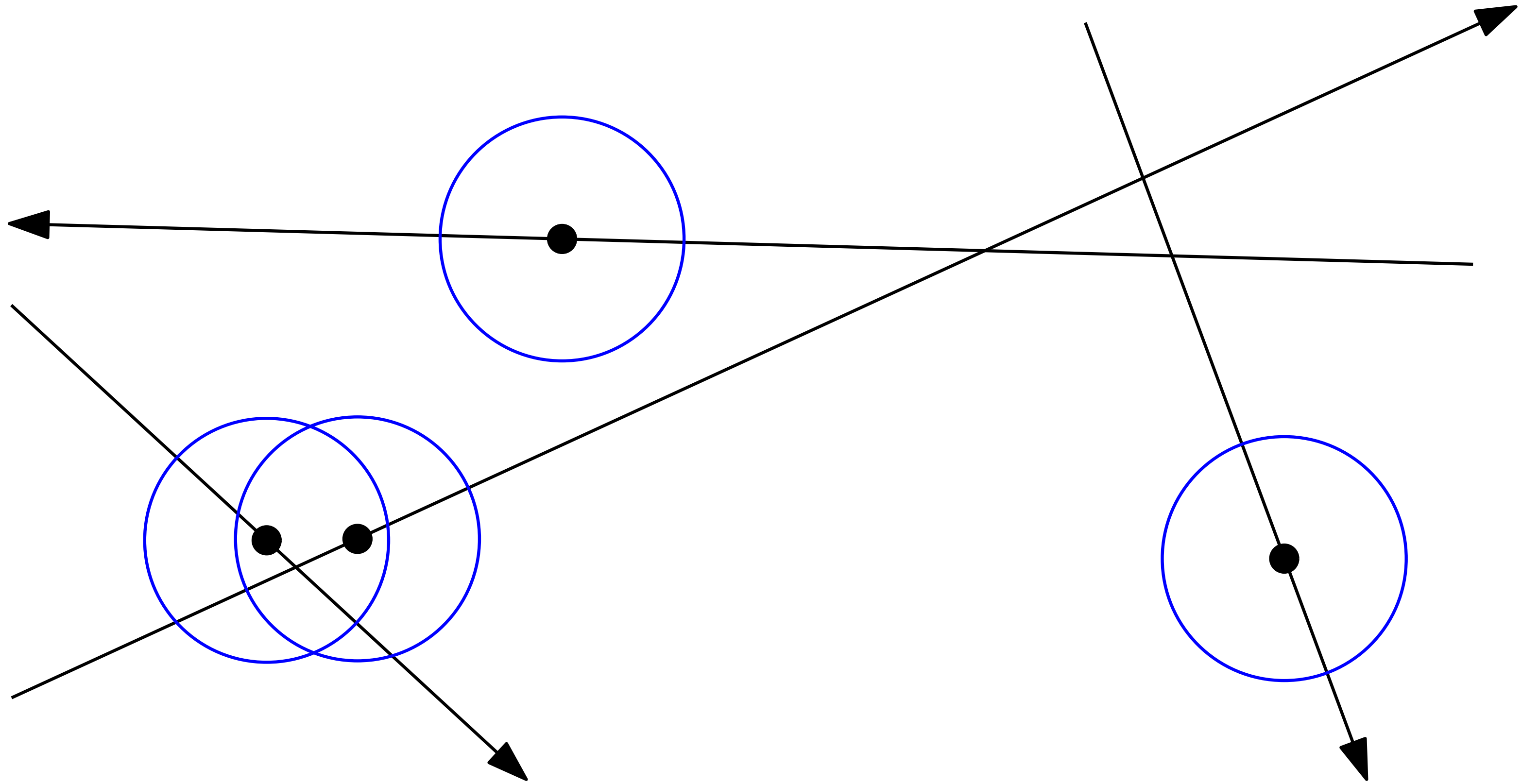
Restricciones

Nos restringimos a trayectorias rectilíneas que se saben de antemano y velocidad constante.



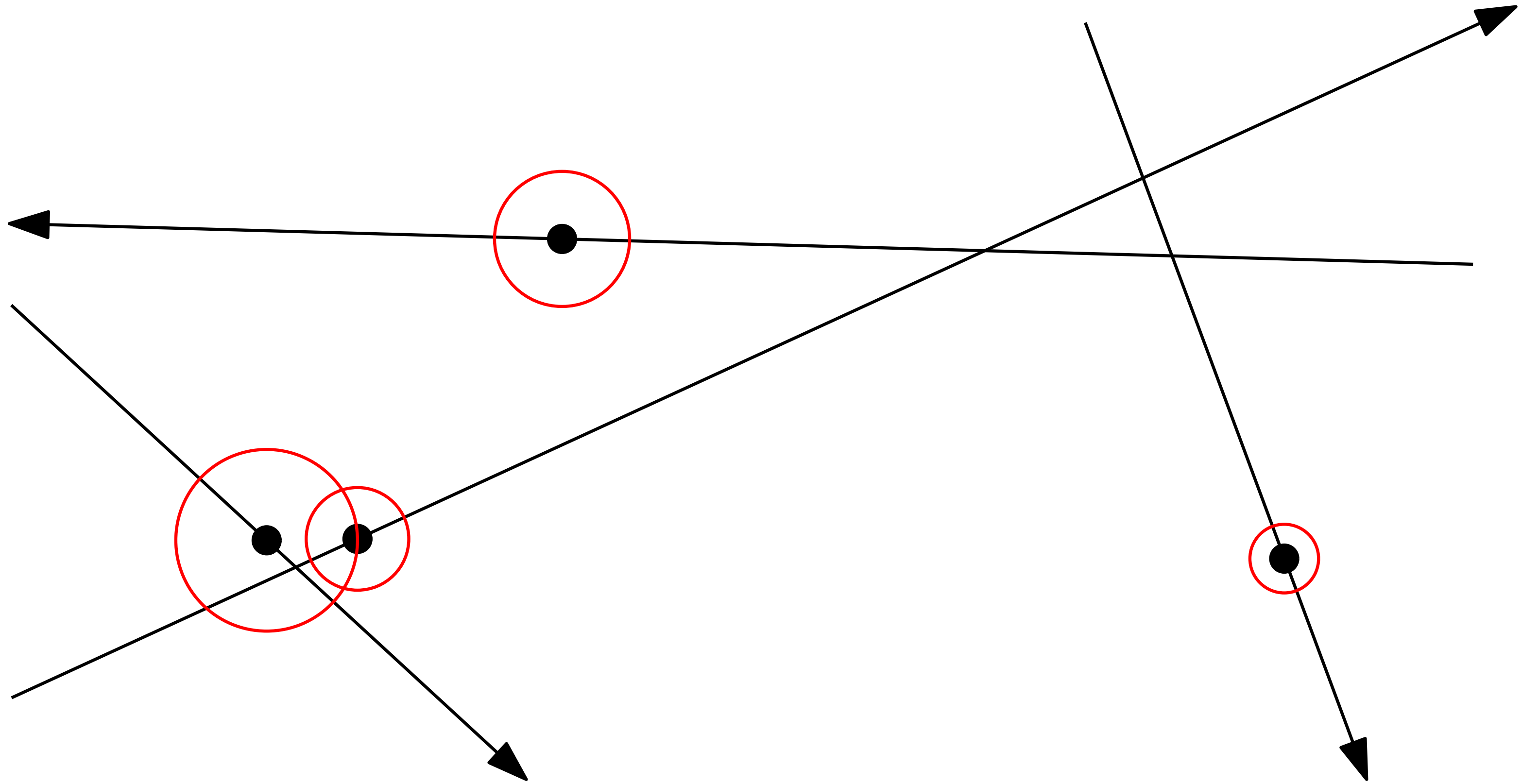
Minimizar Energía

Dado $\alpha \geq 1$ y $s \in S$ fija, encontrar una asignación de rangos R, tal que s pueda difundir un mensaje M, producido el tiempo t_0, y se minimice $\sum_{s_i \in S} R(s_i)^\alpha$.



Minimizar Energía

Dado $\alpha \geq 1$ y $s \in S$ fija, encontrar una asignación de rangos R, tal que s pueda difundir un mensaje M, producido el tiempo t_0, y se minimice $\sum_{s_i \in S} R(s_i)^\alpha$.



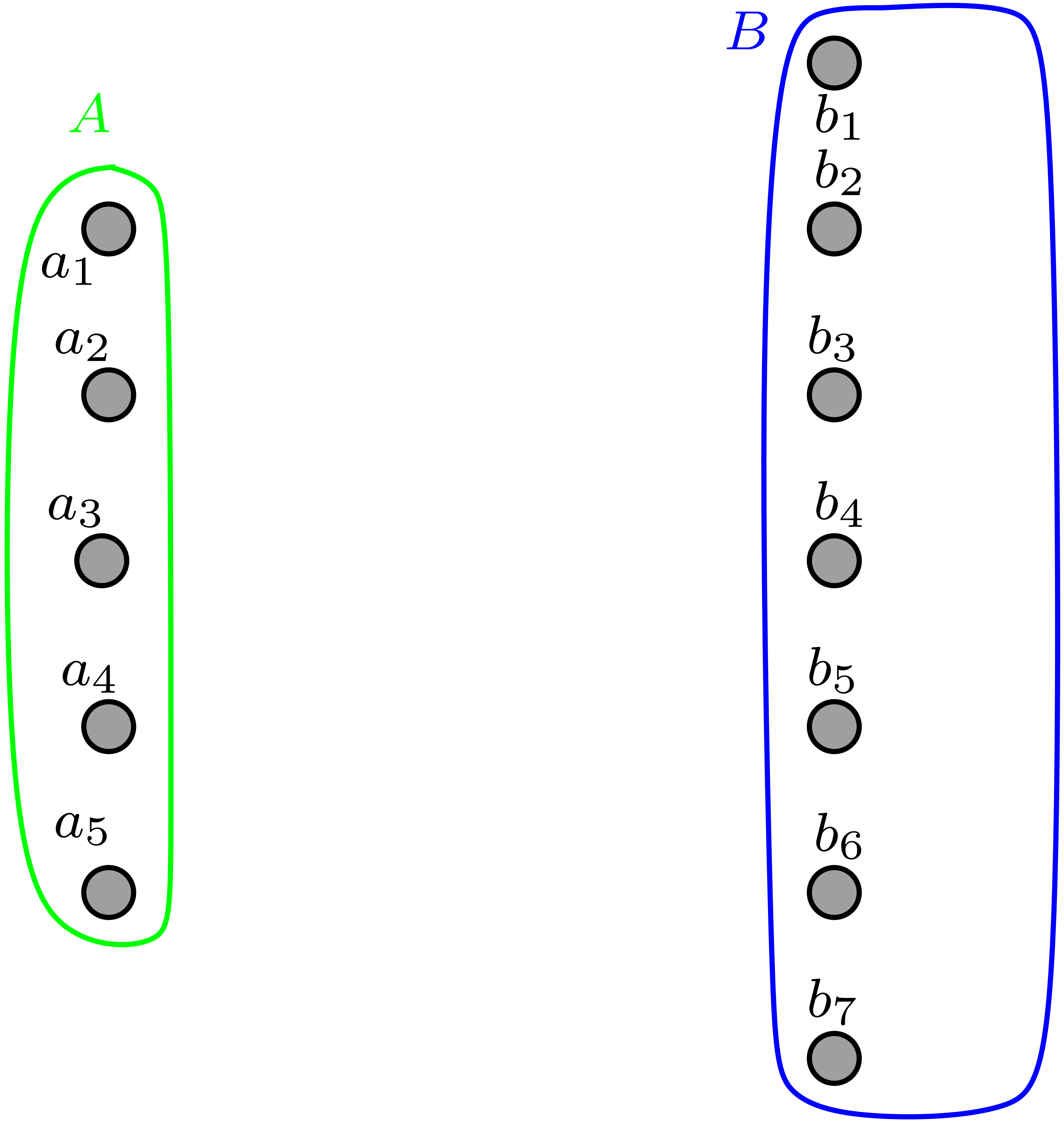
Minimizar Energía

Dado $\alpha \geq 1$ y $s \in S$ fija, encontrar una asignación de rangos R, tal que s pueda difundir un mensaje M, producido el tiempo t_0, y se minimice $\sum_{s_i \in S} R(s_i)^\alpha$.

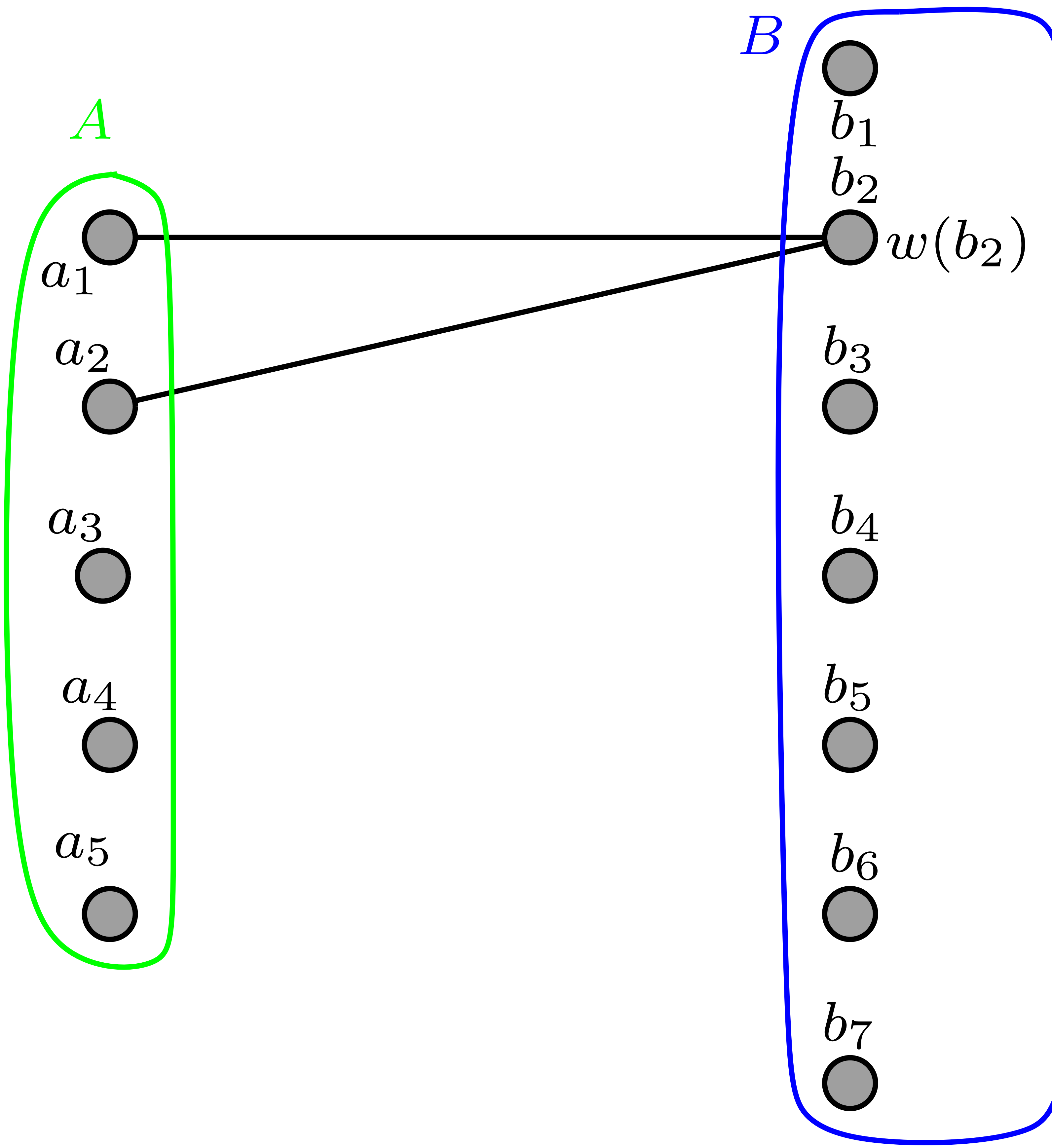
NP-difícil y no aproximable a un factor $(1 - o(1)) \ln n$, a menos que NP $\subset \mathrm{DTIME}(n^{O(\log \log n)})$.

(se da si P $=$ NP)

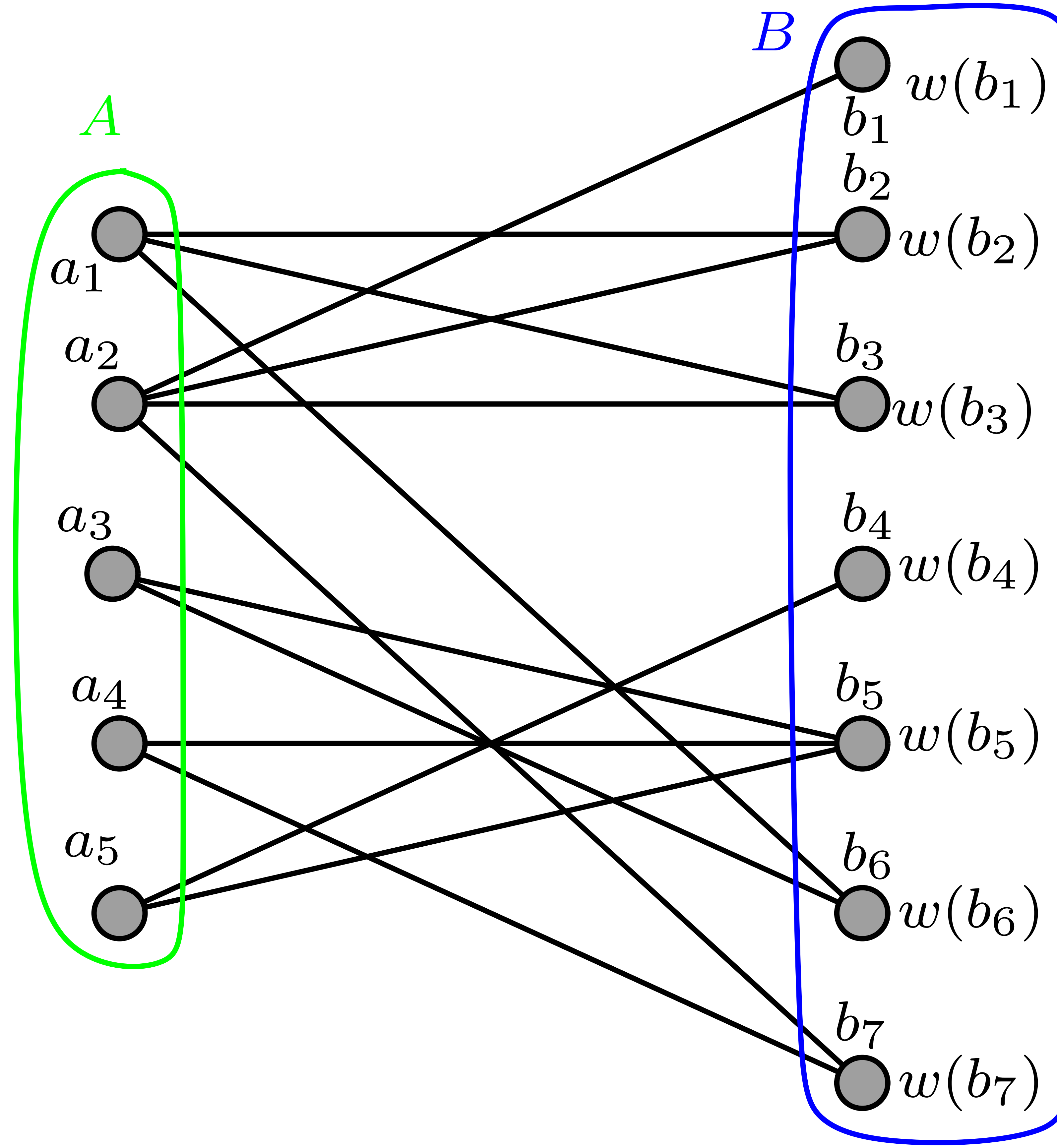
Conjunto cubierta con pesos



Conjunto cubierta con pesos

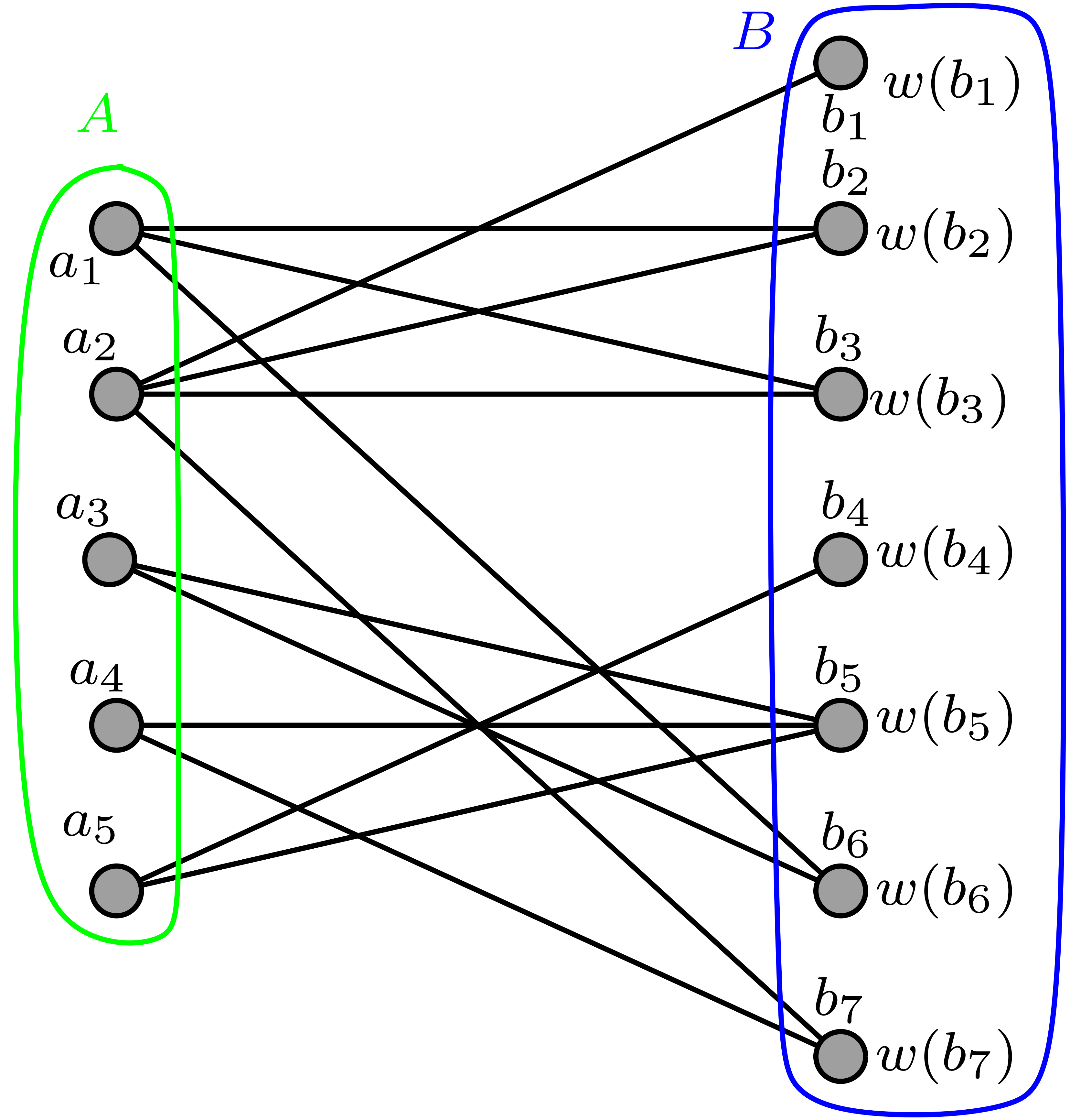


Conjunto cubierta con pesos



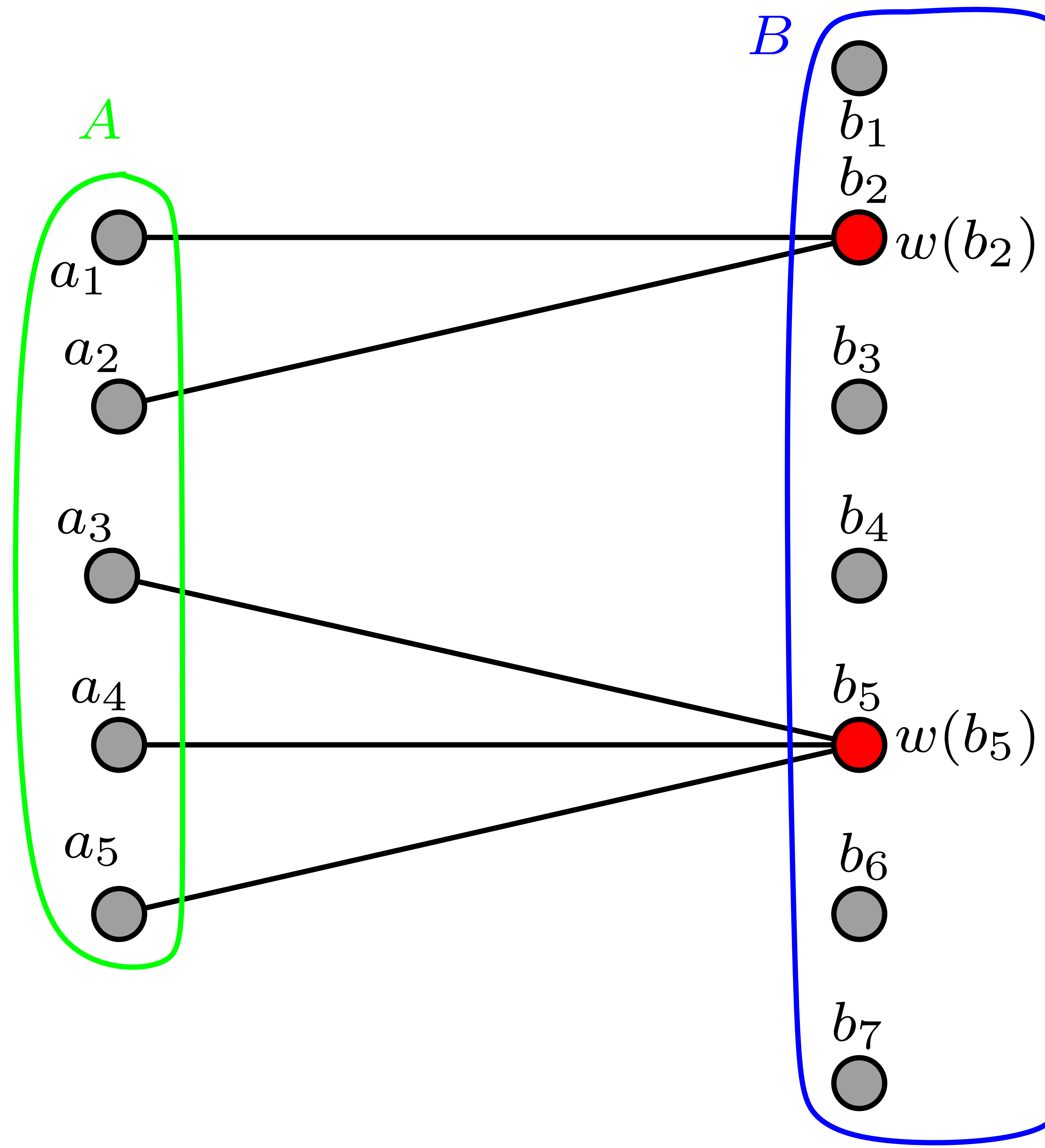
Conjunto cubierta con pesos

$\min \sum_{b \in B} w(b)$



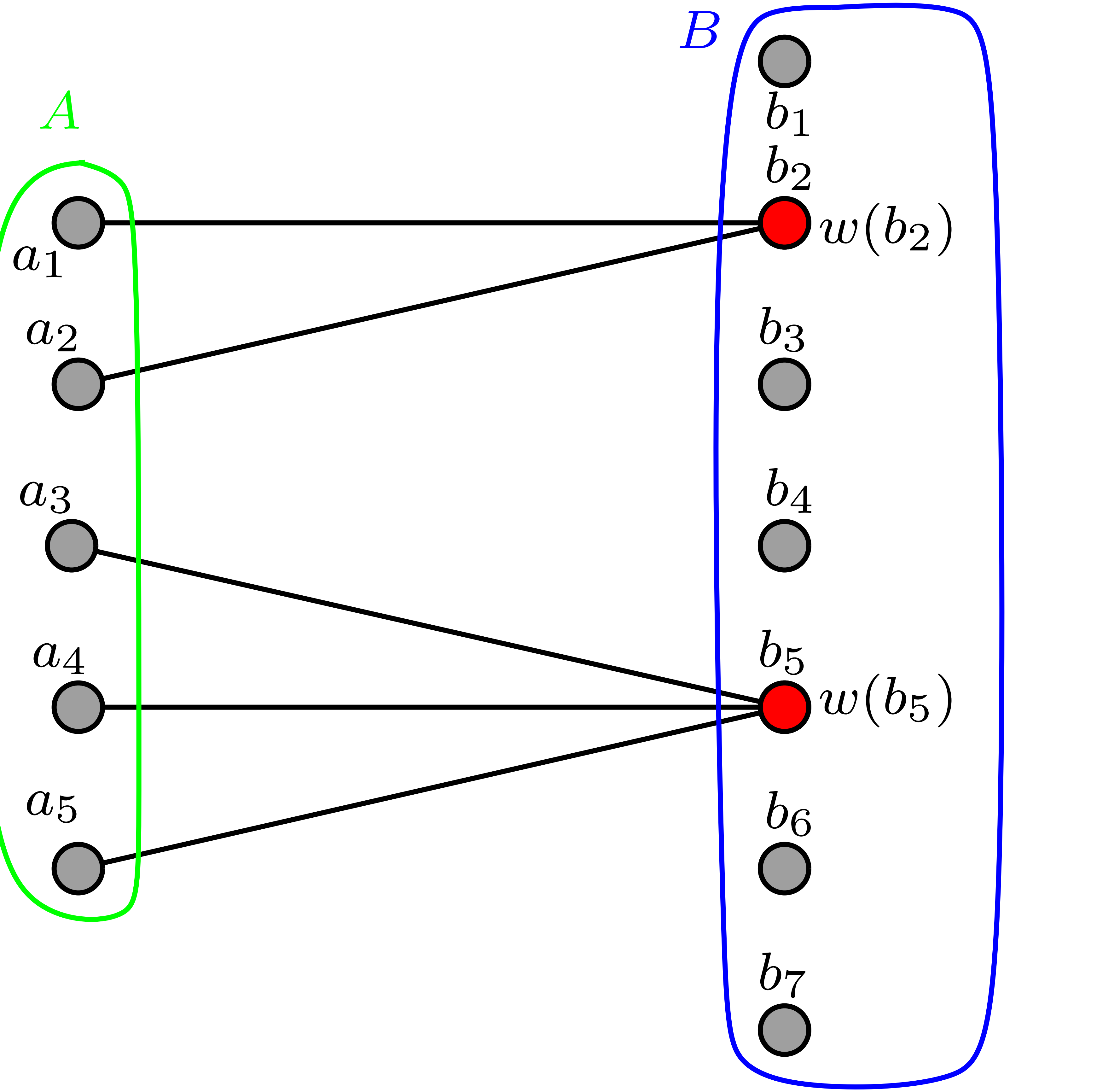
Conjunto cubierta con pesos

$\min \sum_{b \in B} w(b)$



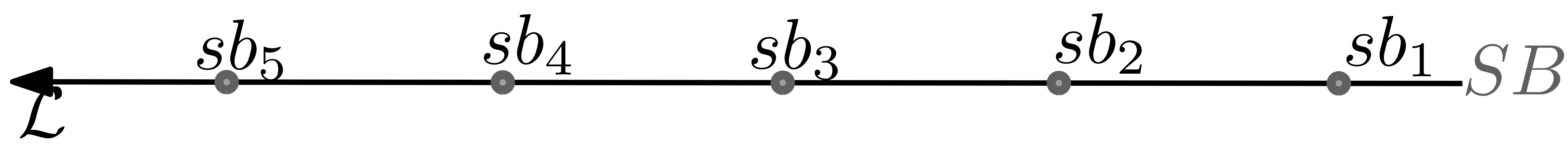
Conjunto cubierta con pesos

$\min \sum_{b \in B} w(b)$

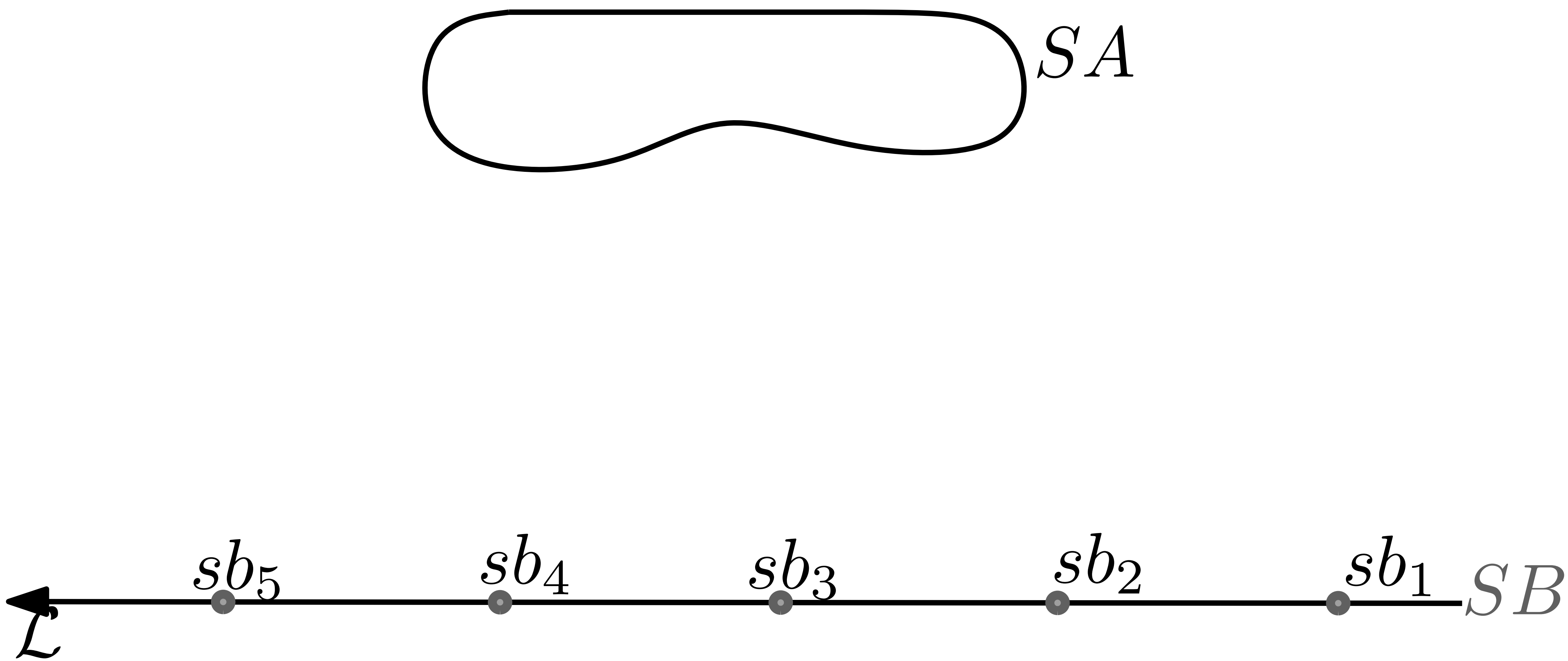


NP-duro

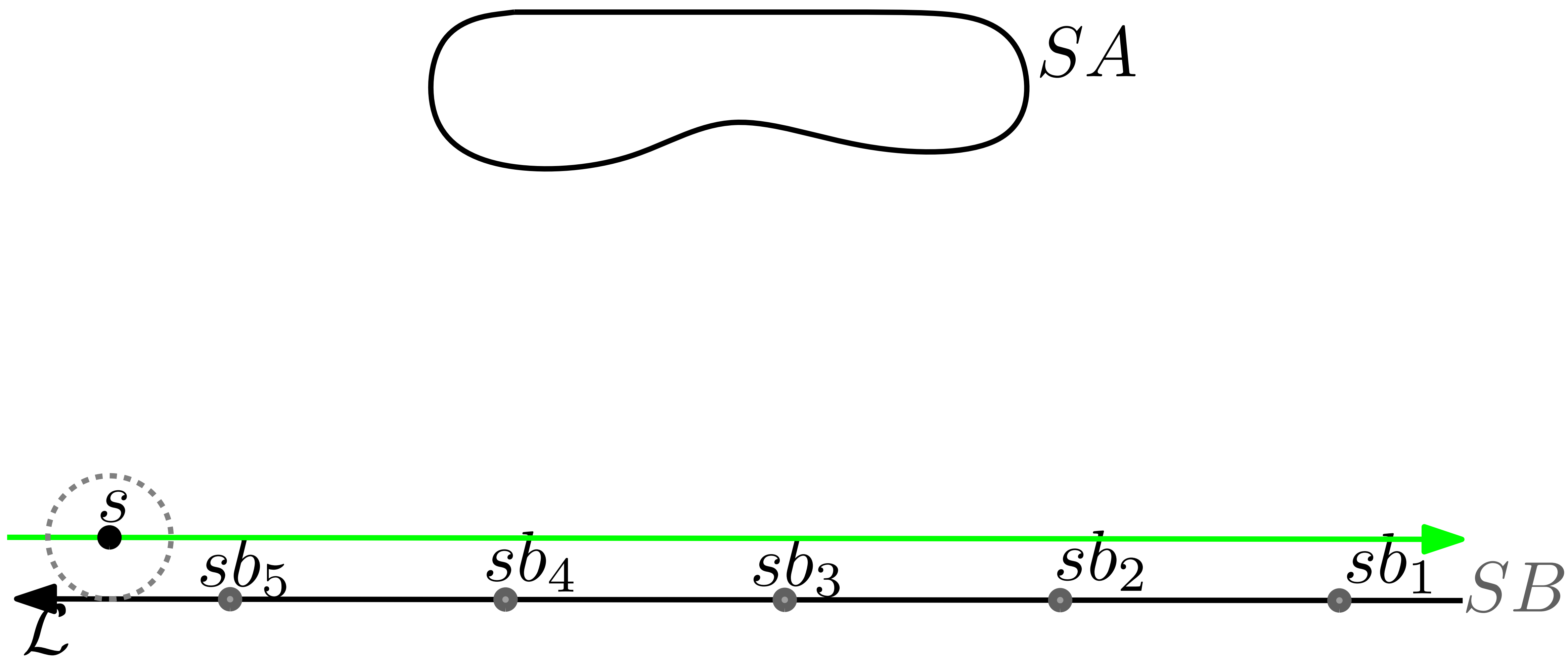
Reducción



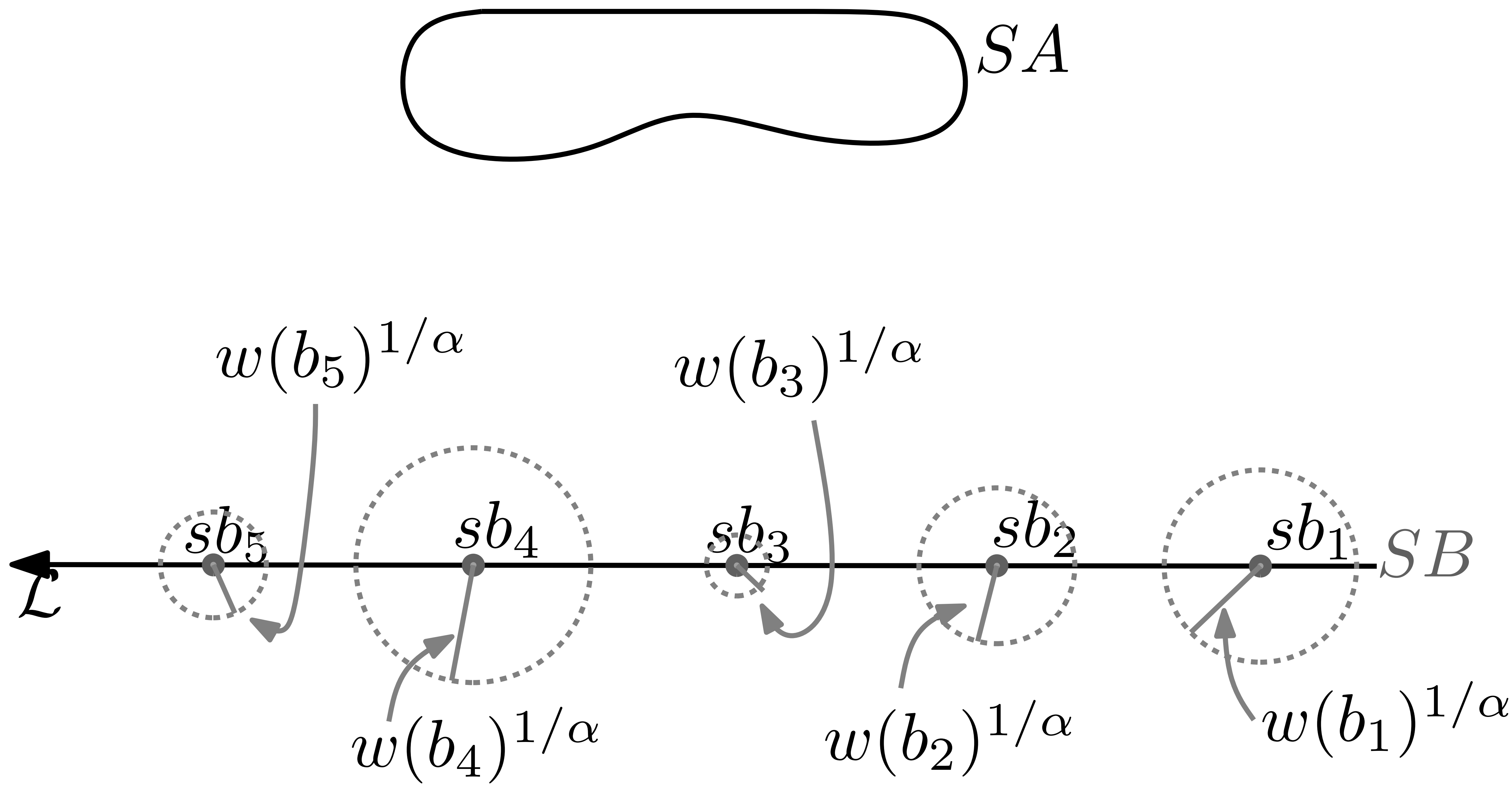
Reducción



Reducción

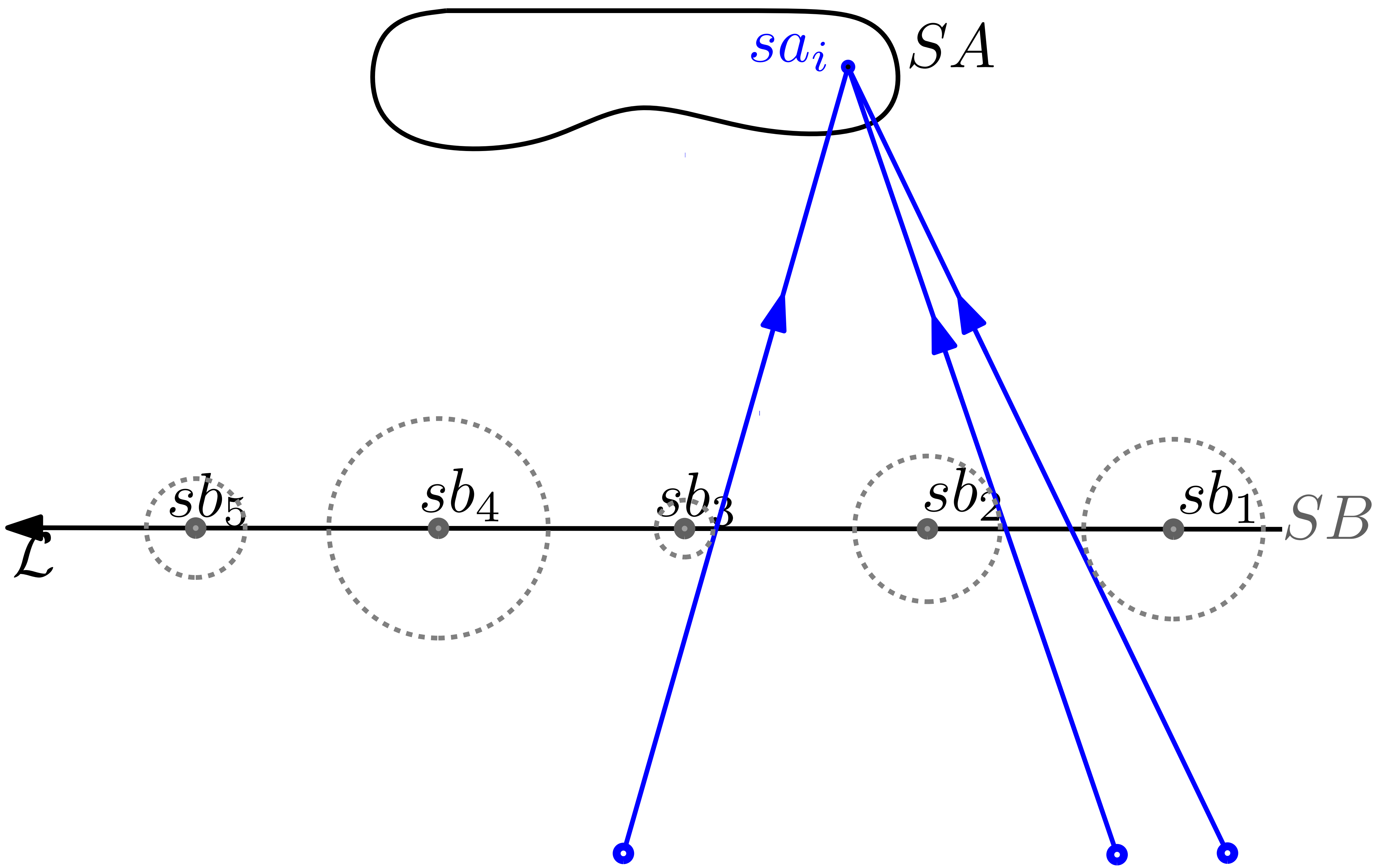


Reducción

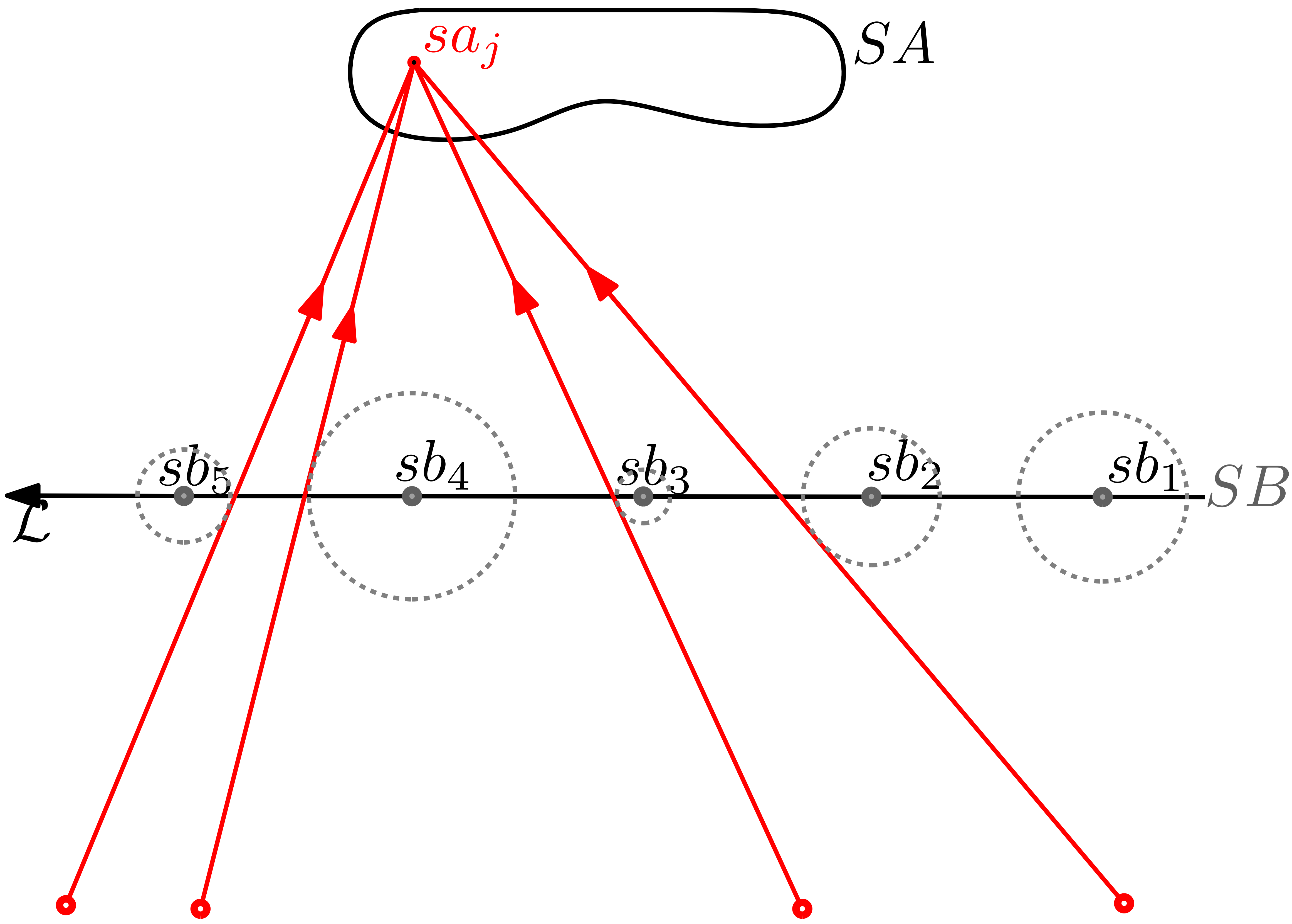


SA
$w(b_5)^{1/\alpha}$
$w(b_3)^{1/\alpha}$
sb_5
sb_4
sb_3
sb_2
sb_1
SB
$\mathcal{L}$
$w(b_4)^{1/\alpha}$
$w(b_2)^{1/\alpha}$
$w(b_1)^{1/\alpha}$

Reducción



Reducción



MIN-SUM es NP-duro

$\sum_{s_i \in S} R(s)^{\alpha} \quad \rightarrow \quad \sum_{sb_i \in SB} R(s)^{\alpha} \quad \rightarrow$
$\sum_{b_i \in B} (w(b_i)^{1/\alpha})^{\alpha} = \sum_{b_i \in B} w(b_i)$

MIN-SUM es NP-duro

$\sum_{s_i \in S} R(s)^\alpha \quad \rightarrow \quad \sum_{sb_i \in SB} R(s)^\alpha \quad \rightarrow$
$\sum_{b_i \in B} (w(b_i)^{1/\alpha})^\alpha = \sum_{b_i \in B} w(b_i)$

Cualquier instancia de SET-COVER puede ser resuelta si y sólo si se resolve su instancia correspondiente de MIN-SUM.

MIN-SUM es NP-duro

$\sum_{s_i \in S} R(s)^\alpha \quad \rightarrow \quad \sum_{sb_i \in SB} R(s)^\alpha \quad \rightarrow \sum_{b_i \in B} (w(b_i)^{1/\alpha})^\alpha = \sum_{b_i \in B} w(b_i)$

Cualquier instancia de SET-COVER puede ser resuelta si y sólo si se resolve su instancia correspondiente de MIN-SUM.

Resolver MIN-SUM es al menos tan complejo como SET-COVER.

MIN-SUM es NP-duro

$\sum_{s_i \in S} R(s)^\alpha \quad \rightarrow \quad \sum_{sb_i \in SB} R(s)^\alpha \quad \rightarrow$
$\sum_{b_i \in B} (w(b_i)^{1/\alpha})^\alpha = \sum_{b_i \in B} w(b_i)$

Cualquier instancia de SET-COVER puede ser resuelta si y sólo si se resolve su instancia correspondiente de MIN-SUM.

Resolver MIN-SUM es al menos tan complejo como SET-COVER.

$\therefore$ MIN-SUM es un problema NP-duro