Algoritmos para coloración robusta de caminos

ICEEE, 7 a 9 de Septiembre de 2005

Rafael López Bracho, Javier Ramírez Rodríguez y Francisco J. Zaragoza Martínez

Departamento de Sistemas, UAM Azcapotzalco

`rlb,jararo,franz@correo.azc.uam.mx`

Contenido

- El problema de coloración robusta
- Una formulación equivalente
- Coloración robusta de caminos
- Tres algoritmos
- Conclusiones

Problema de coloración

- Sea $G = (V, E)$ una gráfica no dirigida, $k \geq 1$ un entero y $f : V \to \{0, \ldots, k-1\}$.
- Decimos que f es una k-coloración de G si $f(u) \neq f(v)$ cada vez que $uv \in E$.
- El número cromático $\chi(G)$ de G es la mínima k para la cual G tiene una k-coloración.
- Decidir si $\chi(G) \leq k$ es NP-completo si $k \geq 3$.

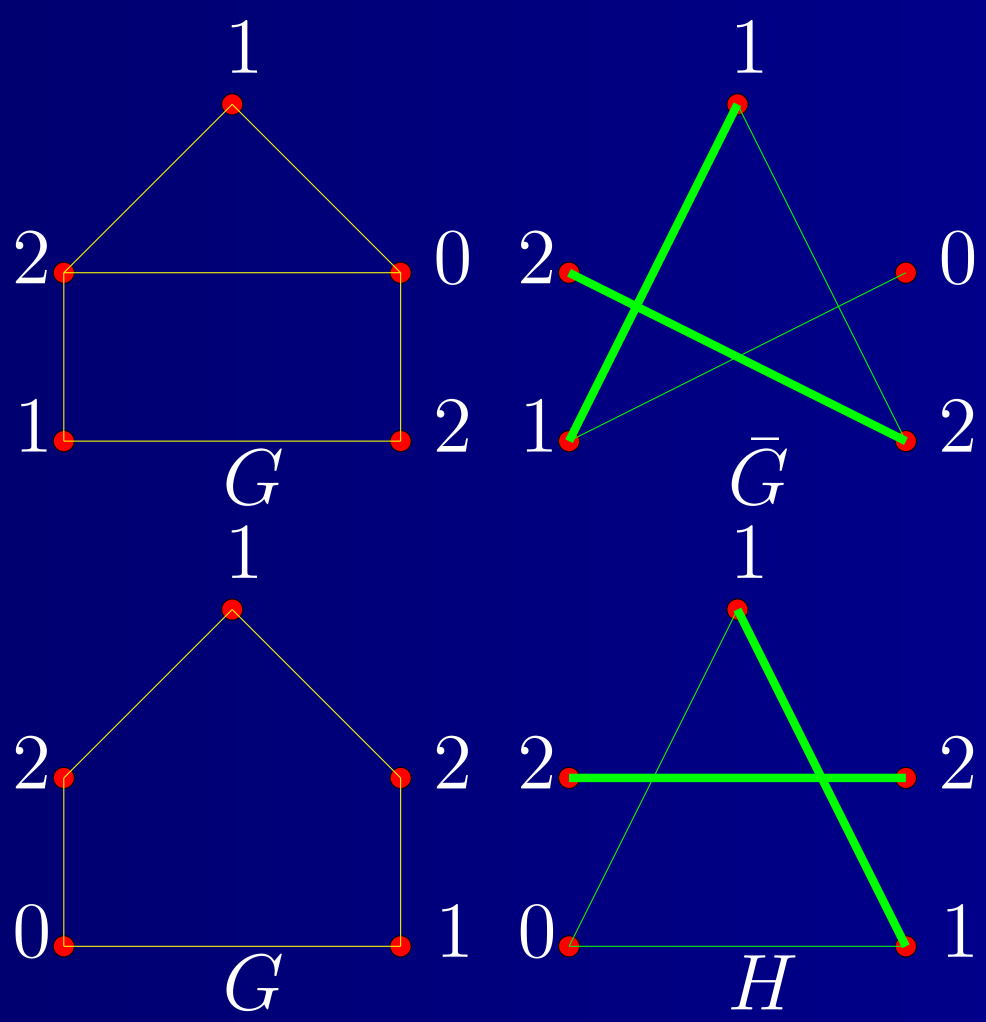
Problema de coloración robusta

- Dados $G = (V, E)$, un entero positivo $k \geq \chi(G)$ y costos enteros $c \geq 0$ en las aristas de $\bar{G}$, encuentre una k-coloración de G que minimice la suma de los costos de las aristas en $\bar{G}$ cuyos vértices tienen el mismo color.
- Este problema es NP-duro.

Una formulación equivalente

- Dadas dos gráficas no dirigidas $G = (V, B)$ y $H = (V, R)$ en el mismo conjunto de vértices, un entero positivo $k \geq \chi(G)$ y costos enteros $c \geq 0$ en las aristas de $\bar{G}$, encuentre una k-coloración de G que minimice la suma de los costos de las aristas en H cuyos vértices tienen el mismo color.

Ejemplos con $k = 3$



Coloración robusta de caminos

- Sean G y H dos caminos con n vértices.
- El teorema de Brook implica que $G \cup H$ tiene una 4-coloración.
- Por lo tanto supondremos que $k = 3$.
- La complejidad de este caso es desconocida.

Un algoritmo exhaustivo

- Una primera posibilidad es intentar todas las 3-coloraciones de G en tiempo $O(3^n)$.
- Podemos reducir el tiempo a $O(2^n)$ observando que, si coloreamos los vértices de izquierda a derecha, la elección del color de un vértice de G limita la elección del color de su vecino derecho.

Un algoritmo aleatorio

- Una segunda posibilidad es la de intentar 3-coloraciones aleatorias de G.
- ¿Qué tan mala es una 3-coloración aleatoria?
- Teorema: Si el color de cada vértice de G se escoge de forma independiente y uniforme, entonces la esperanza del costo de la solución producida no es mayor a la mitad del costo de todas las aristas de H.

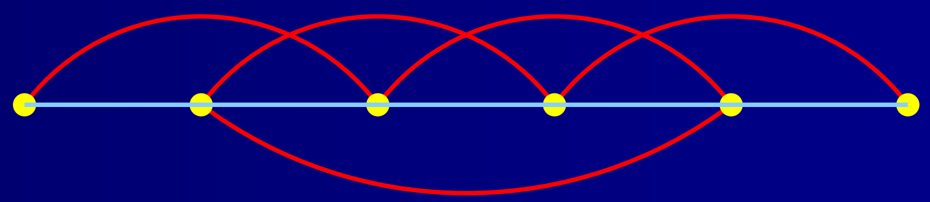
Un algoritmo glotón I

- Una tercera posibilidad es la de colorear G de forma glotona. Esto necesita más cuidado.
- Sean $G = v_0 v_1 \ldots v_n$ y $H = w_0 w_1 \ldots w_n$. Sea $j < i$ y suponga que $v_j = w_h$ y $v_i = w_k$.
- Decimos que v_j es un vecino izquierdo de v_i si $j = i - 1$ o si $h = k - 1$.
- Decimos que v_j es un vecino derecho de v_i si $j = i - 1$ o si $h = k + 1$.

Un algoritmo glotón II

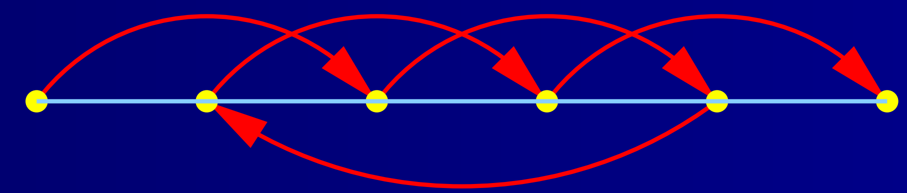
- El algoritmo izquierdo (el derecho es similar).
  1. Sea $a_0 = 0$.
  2. Desde $i = 1$ hasta n hacer:
     (a) Sea $A_i = \{0, 1, 2\}$.
     (b) Para cada vecino izquierdo (derecho) v_j de v_i hacer $A_i = A_i \setminus \{a_j\}$.
     (c) Sea a_i el elemento más pequeño de A_i.
- Teorema: La mejor de las soluciones producidas por los algoritmos izquierdo y derecho tiene costo no mayor a la mitad del costo de todas las aristas de H.

Un algoritmo glotón III



012	012	012	012	012	012
0	12	12	012	012	012
0	1	2	02	02	012
0	1	2	0	0	012
0	1	2	0	$\boxed{?}$	12

Un algoritmo glotón IV



012	012	012	012	012	012
0	12	12	012	012	012
0	1	2	02	012	012
0	1	2	0	01	012
0	1	2	0	1	12
0	1	2	0	1	2

Conclusiones

- Presentamos el análisis de tres algoritmos.
- Creemos que existen mejores algoritmos.
- Hemos establecido algunas conjeturas de teoría de gráficas relativas a este problema.
- Hemos estudiado el problema relacionado de maximización.