Algoritmos para el problema del ciclo cuadrado

XXII Coloquio de Teoría de Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones, Guanajuato, 26 de febrero de 2007

R. López Bracho, P. Ortuño Sánchez, J. Ramírez Rodríguez, F. J. Zaragoza Martínez

Departamento de Sistemas, UAM Azcapotzalco

`franz@correo.azc.uam.mx`

Contenido

- El problema del ciclo cuadrado
- Resultados teóricos
- Algoritmos
- Resultados computacionales
- Conclusiones

El problema del ciclo cuadrado

- Considere una rejilla de $m \times n$ cuyos puntos se colorearán ya sea de negro o de blanco.
- Un *ciclo cuadrado* es un camino cerrado en la forma de un cuadrado con lados paralelos a los de la rejilla.
- El *problema del ciclo cuadrado* es el de encontrar la mínima cantidad $f(m, n)$ de puntos negros de modo que cada ciclo cuadrado contenga al menos un punto negro.
- Este problema fue propuesto por Morris (1988) para rejillas cuadradas.

Ejemplos de rejillas

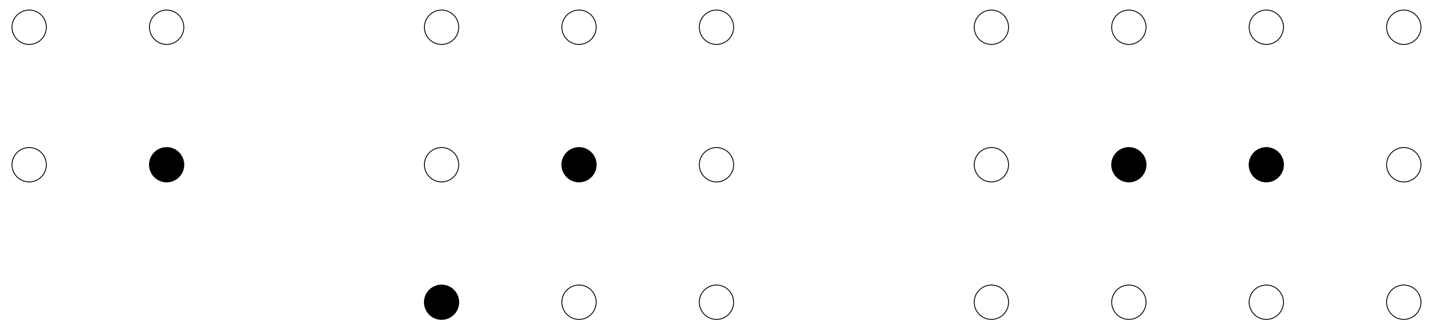

Figure 1: $f(2,2)=1$, $f(3,3)=2$, $f(3,4)=2$.

Lema de partición

(Williams 2000) Suponga que una rejilla de tamaño $m \times n$ se ha dividido en k rejillas de tamaños $m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k$. Entonces

$$f(m, n) \geq \sum_{i=1}^{k} f(m_i, n_i).$$

Ejemplo de partición

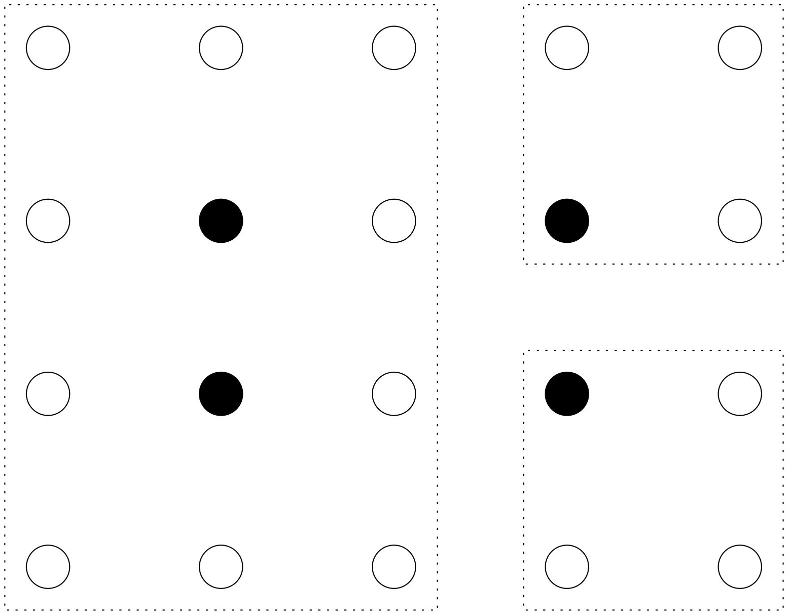

Figure 2: $4 \geq f(4,5) \geq f(4,3) + f(2,2) + f(2,2)$.

¿Qué se sabía?

- Erickson (1989) demostró que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n,n)}{n^2} = \frac{2}{7}.$$
- Williams (2000) calculó los valores de $f(m,n)$ para toda $m,n \leq 6$.
- Dean y Zuniga (2004) calcularon $f(1,n) = 0$, $f(2,n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $f(3,n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ y $f(4,n) = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ para toda $n \geq 1$.

Resultados teóricos

- Nosotros demostramos que $f(5, n) = \lfloor \frac{4n-2}{3} \rfloor$ para $n \geq 1$ y que $f(6, n) = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ para $n \geq 2$.
- Nuestras pruebas son inductivas y usan una caracterización de las soluciones óptimas.

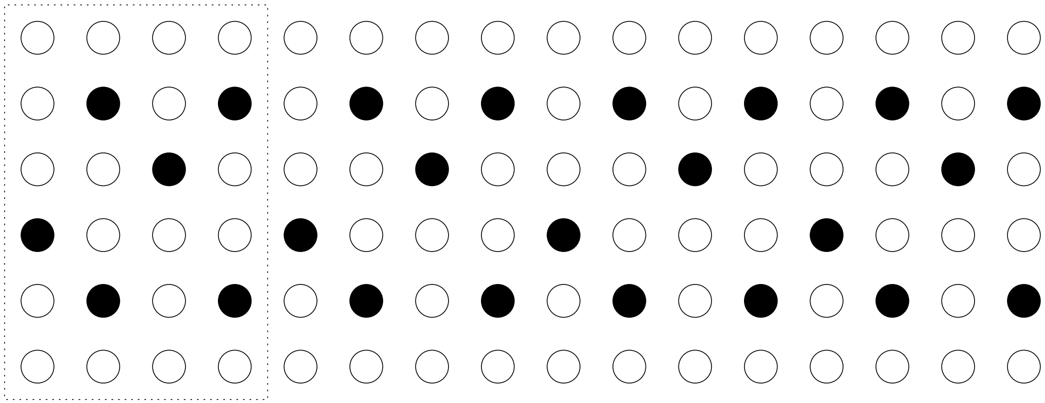

Figure 3: Rejilla de $6 \times n$.

Resultados computacionales

- Usando un programa entero y CPLEX, Williams (2000) calculó $f(n,n)$ para toda $n \leq 14$ en unas 14 horas. El cálculo de $f(15,15)$ abortó después de otras 48 horas.
- Nosotros desarrollamos un algoritmo de búsqueda con retroceso (con algunas mejoras basadas en programación dinámica) cuya implementación en gcc calculó $f(m,n)$ para toda $m,n \leq 20$ en 62 horas.
- En particular, nuestro programa calculó $f(m,n)$ para toda $m,n \leq 15$ en 43 *segundos*.

La idea principal (I)

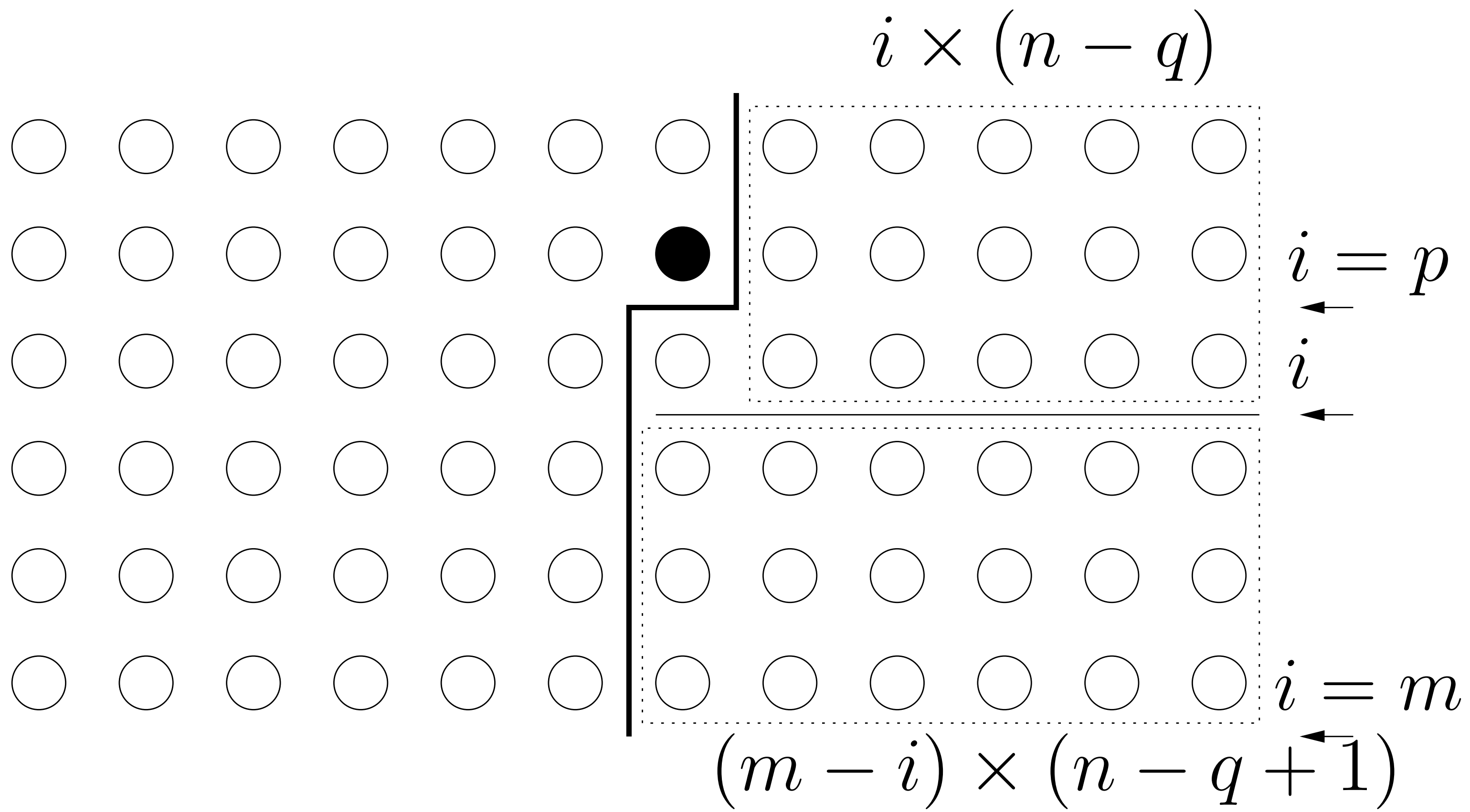

Figure 4: Partición horizontal.

La idea principal (II)

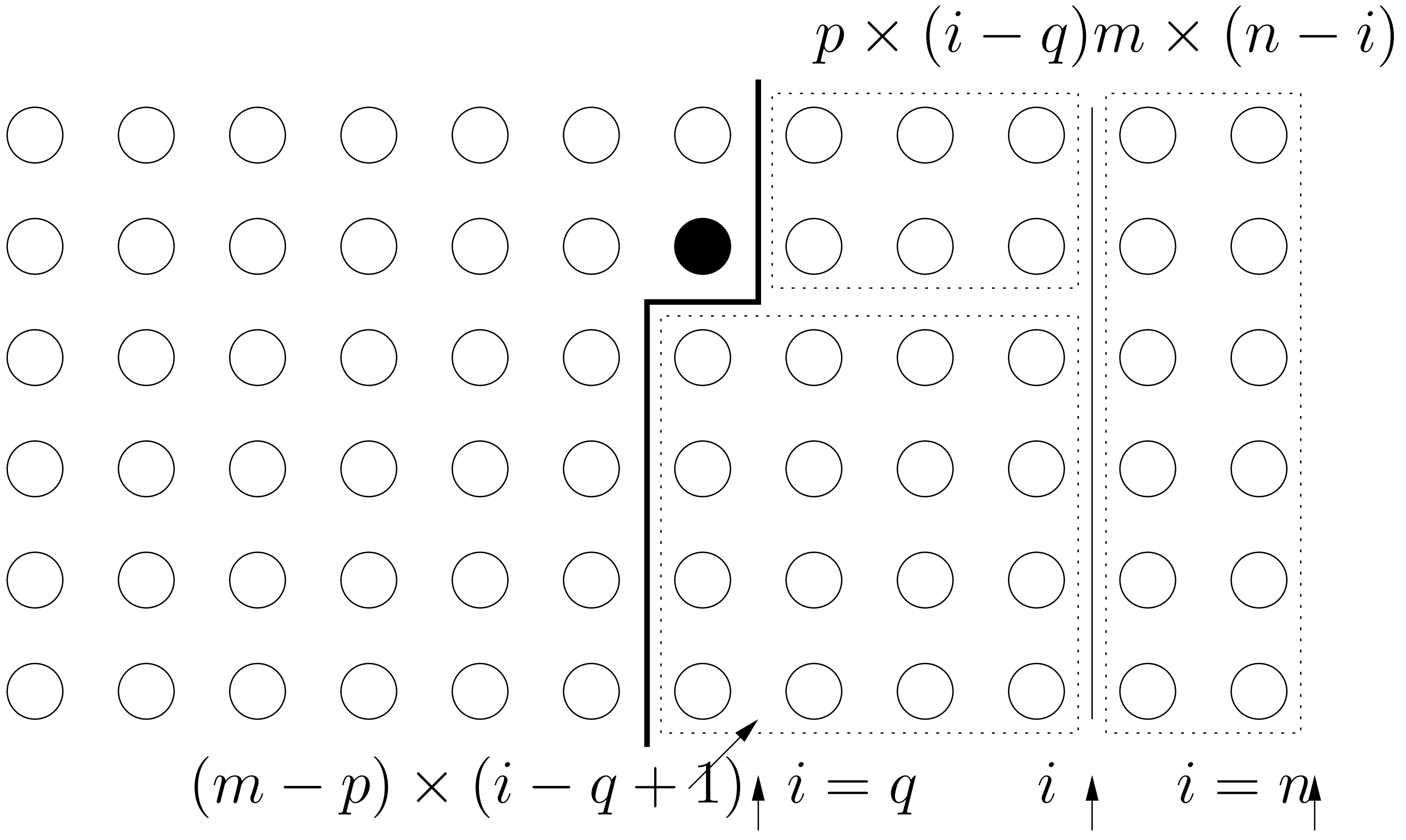

Figure 5: Partición vertical.

Resultados (I)

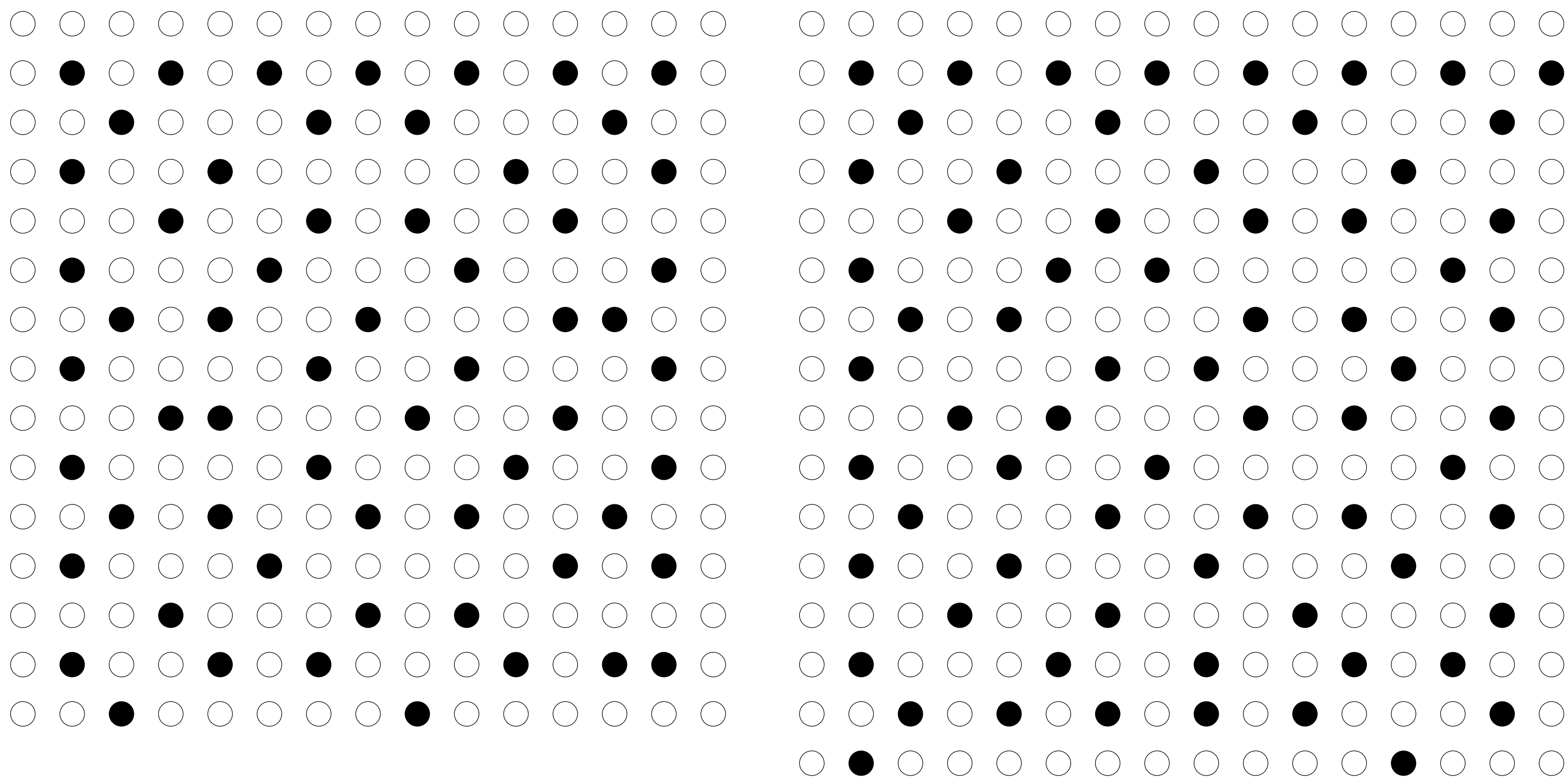

Figure 6: Rejillas con $f(15) = 60$ y $f(16) = 69$.

Resultados (II)

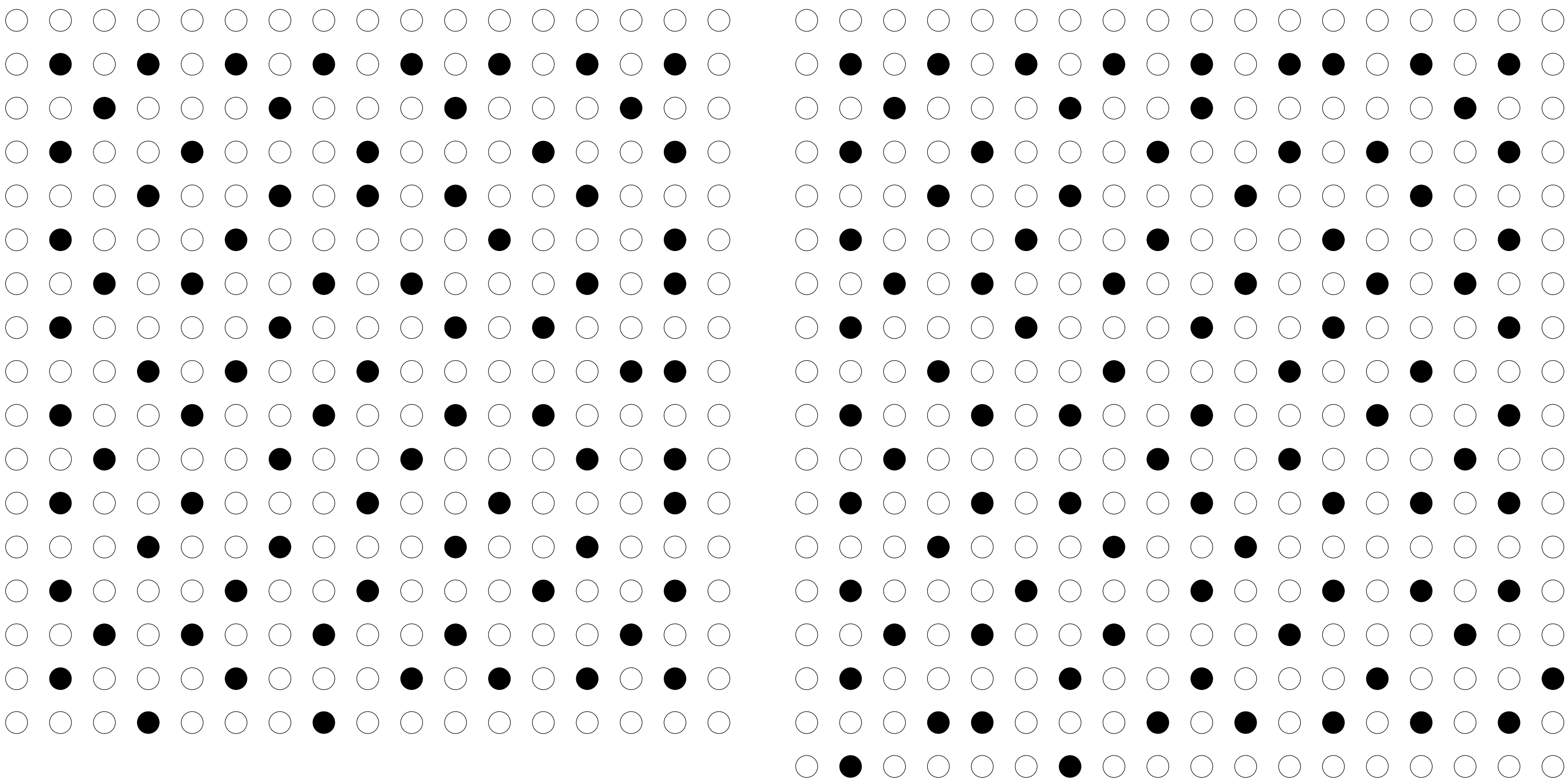

Figure 7: Rejillas con $f(17) = 78$ y $f(18) = 88$.

Resultados (III)

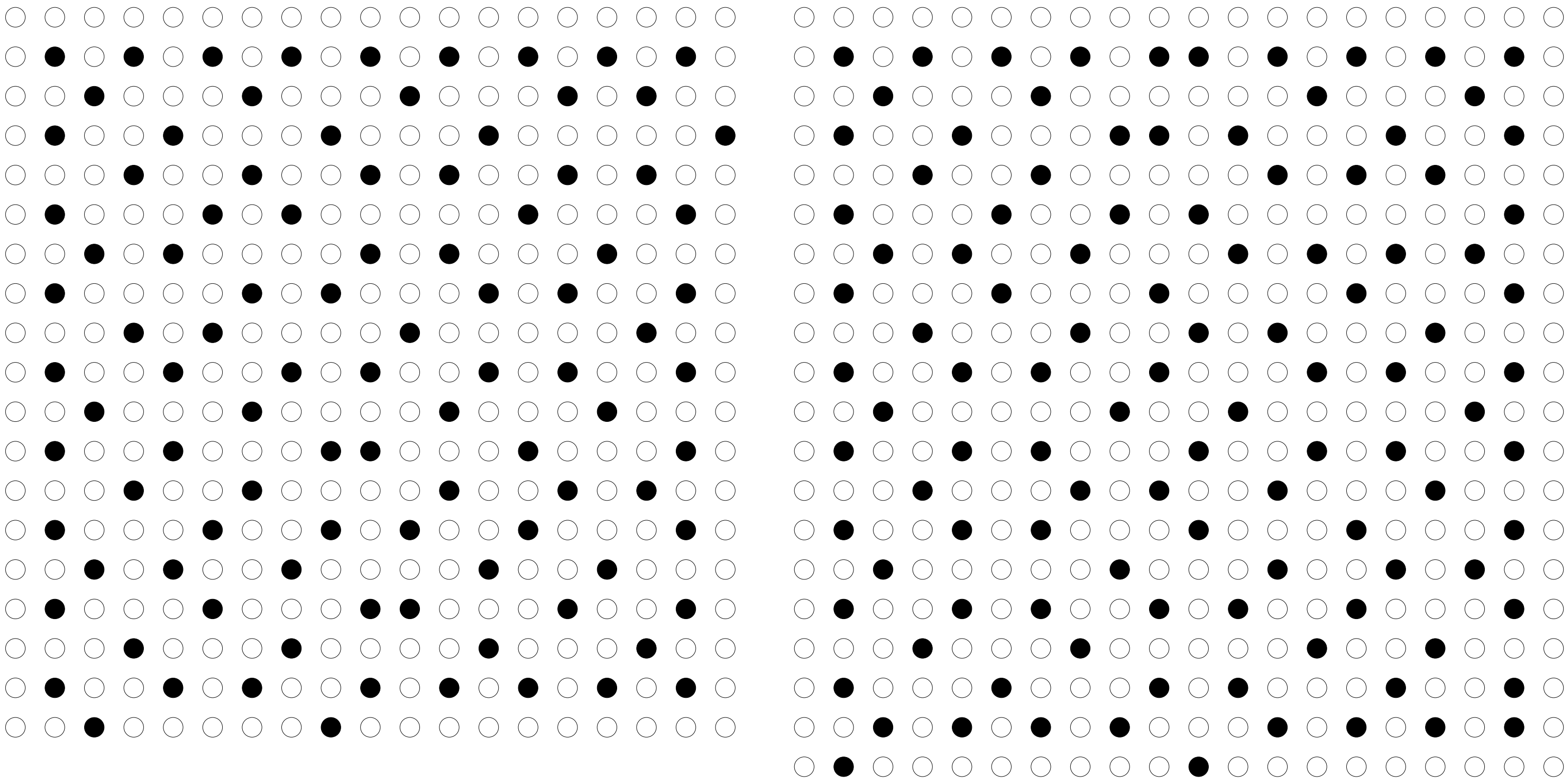

Figure 8: Rejillas con $f(19) = 98$ y $f(20) = 109$.

Idea para un algoritmo paralelo

- Para calcular $f(m,n)$ nuestro algoritmo de búsqueda con retroceso utiliza los valores de $f(p,q)$ con $p \leq m$, $q \leq n$ y $p + q < m + n$.
- Nuestro algoritmo calcula $f(m,n)$ de forma secuencial por columnas.
- El cálculo de $f(m,n)$ se puede paralelizar si se realiza por diagonales.
- Tenemos a un estudiante construyendo un cluster y escribiendo una versión paralela de nuestro algoritmo.

Conclusiones y trabajo a futuro

- Conjeturamos que para $n \geq 1$ (salvo algunos casos excepcionales):
  - $f(7,n) = \lfloor \frac{13n-2}{7} \rfloor$, $f(8,n) = \lfloor \frac{15n-4}{7} \rfloor$,
  - $f(9,n) = \lfloor \frac{12n-2}{5} \rfloor$ y $f(10,n) = \lfloor \frac{27n-5}{10} \rfloor$.
- Tenemos algunos resultados sobre el mismo problema en una rejilla cilíndrica y nos interesa también la rejilla toroidal.
- También nos interesan los problemas del *camino rectangular* y del *camino cerrado*.