# Caminos Eulerianos y la Fórmula de Euler

## *Jornadas de Investigación en Análisis Matemático dedicadas al Tricentenario de Leonhard Euler 12 a 16 de noviembre de 2007*


Guadalupe Rodríguez — Departamento de Ciencias Básicas

Francisco Zaragoza — Departamento de Sistemas

Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco

`rsmg@correo.azc.uam.mx y franz@correo.azc.uam.mx`

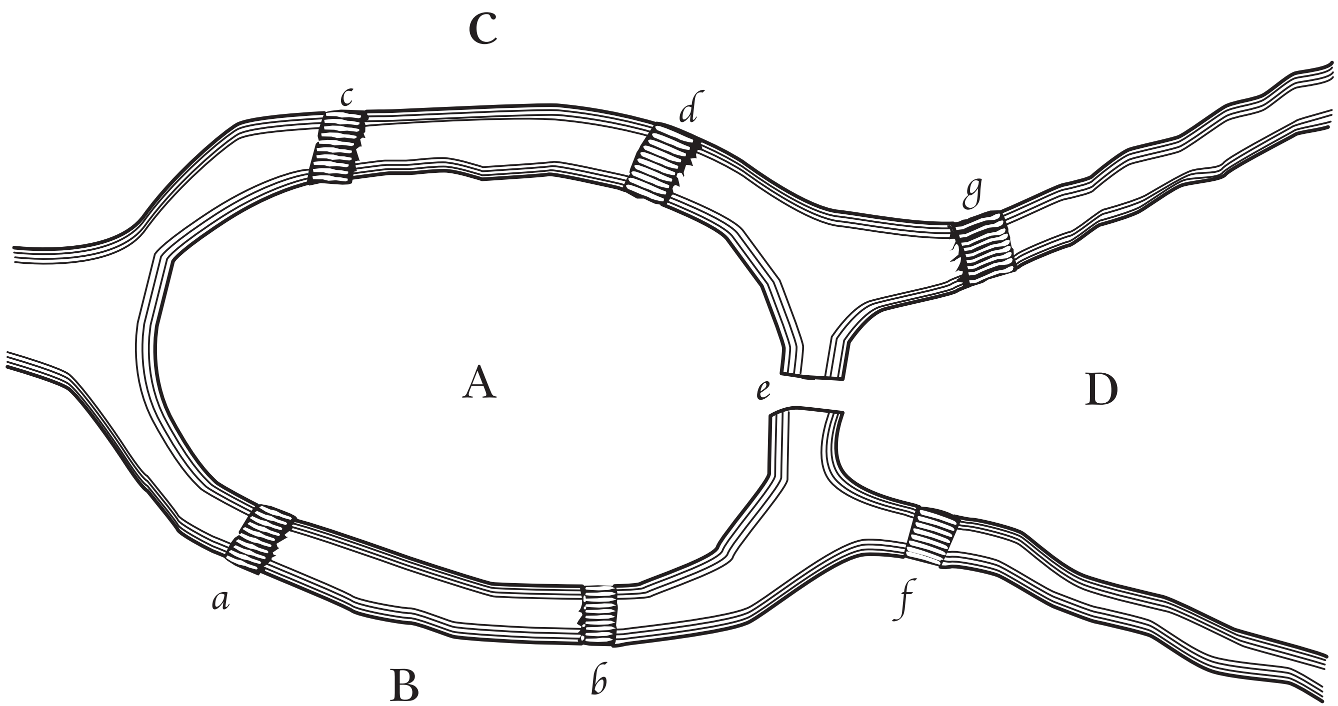
# Contenido

1. Caminos eulerianos.
   (a) Gráficas eulerianas.
   (b) Problema del cartero.
   (c) Doble cubierta por ciclos.
2. Fórmula de Euler.
   (a) Planaridad.
   (b) Poliedros regulares.
   (c) Coloración de mapas.

# El problema de los puentes (1736)

- El problema es como sigue: en Koenigsberg existe una isla llamada Kneiphof y el río que la rodea se divide en dos ramas y esas ramas son atravesadas por siete puentes.
- Acerca de estos puentes se preguntó si acaso alguien podría organizar una ruta de modo que cruzara cada puente exactamente una vez. Me dijeron que algunas personas aseguraban que esto es imposible, mientras que otras dudaban, pero que nadie aseguraría que de hecho era posible.

# Los puentes de Koenigsberg

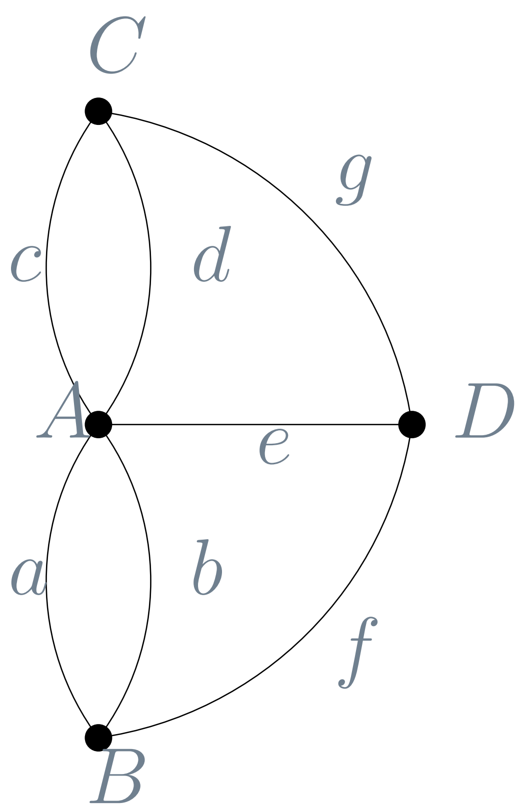


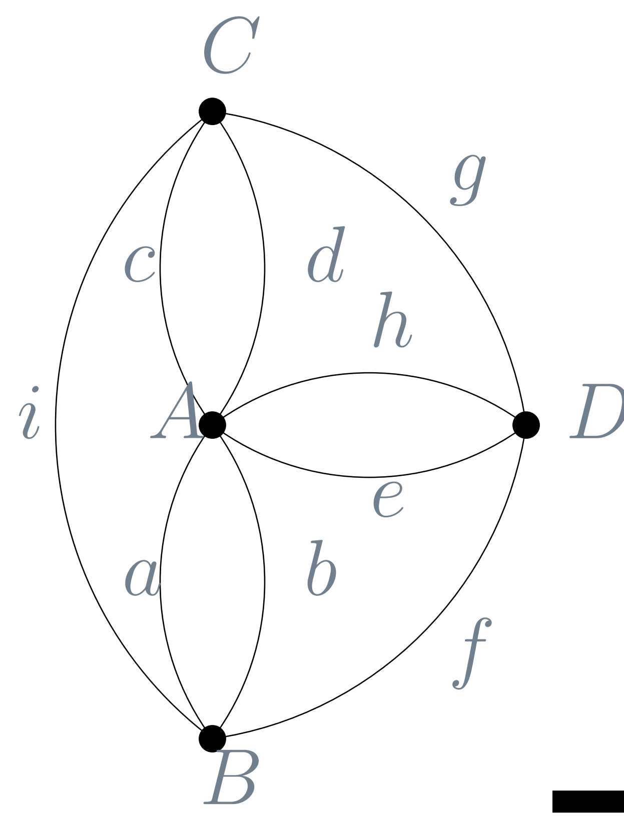
# Circuitos eulerianos

- Un circuito de una gráfica es euleriano si contiene a cada una de sus aristas exactamente una vez.
- Una gráfica es euleriana si tiene algún circuito euleriano.
- El problema general que nos interesa es el de decidir si una gráfica dada es euleriana o no.
- Supondremos que las gráficas son conexas.

# Gráficas eulerianas

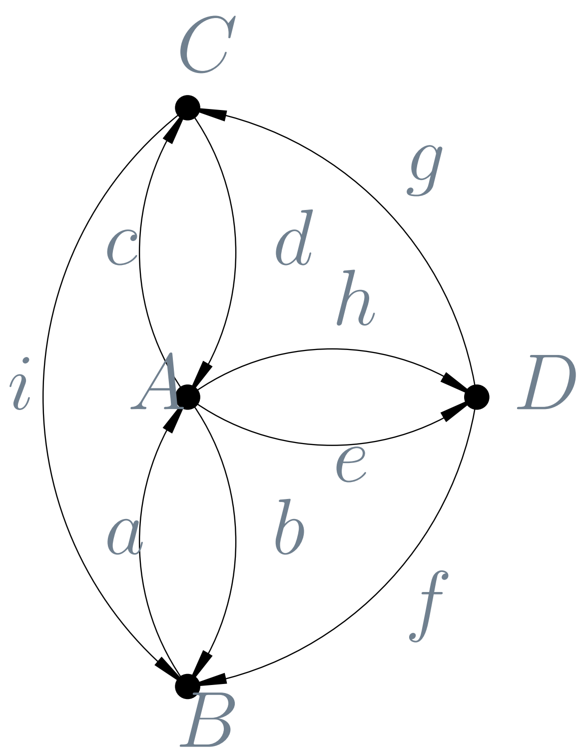
- (Euler 1736 y Hierholzer 1873) Una gráfica es euleriana si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

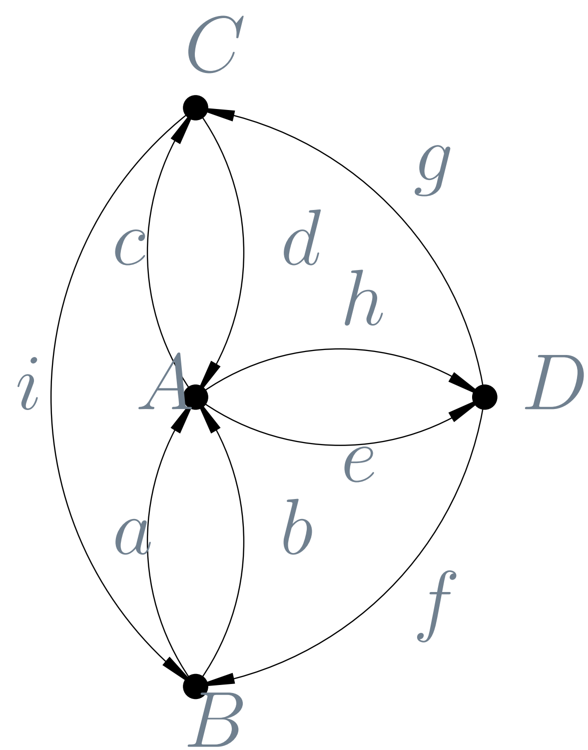


# Gráficas dirigidas eulerianas

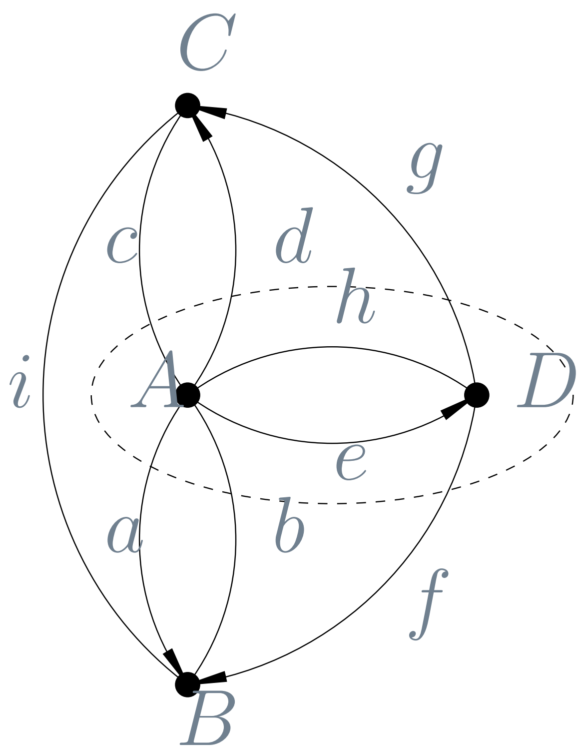
- (Kőnig 1936) Una gráfica dirigida $D$ es euleriana si y sólo si los grados interno y externo de cada vértice de $D$ son iguales.

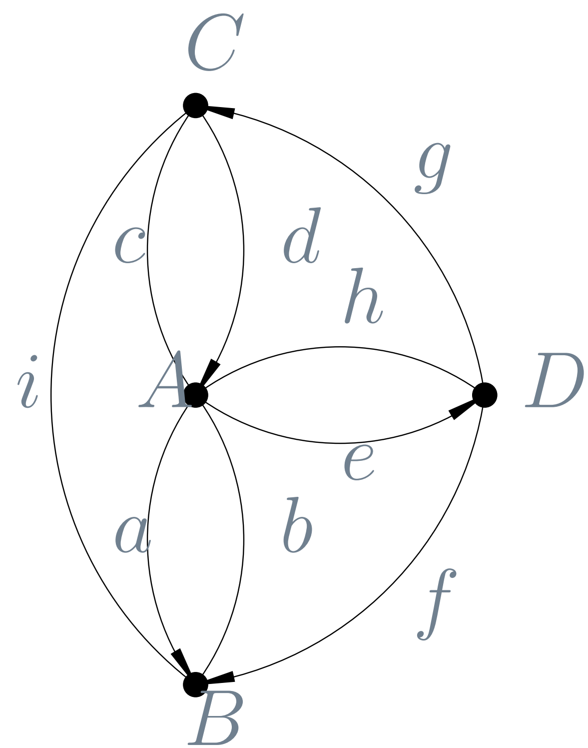


# Gráficas mixtas eulerianas

- (Ford y Fulkerson 1962) Una gráfica mixta $M$ es euleriana si y sólo si todo subconjunto $S$ de los vértices de $M$ es par y balanceado.



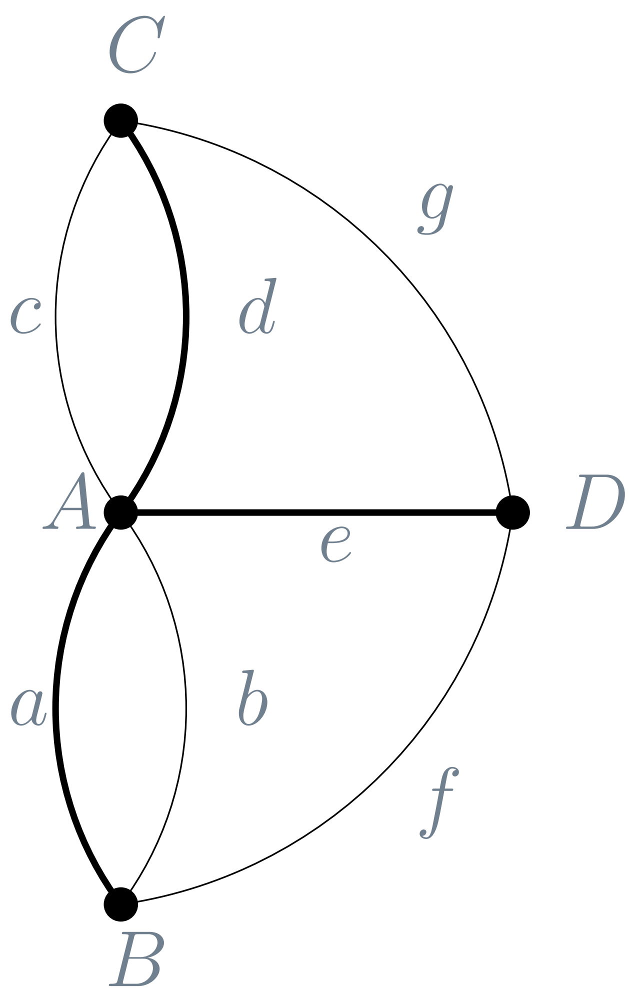



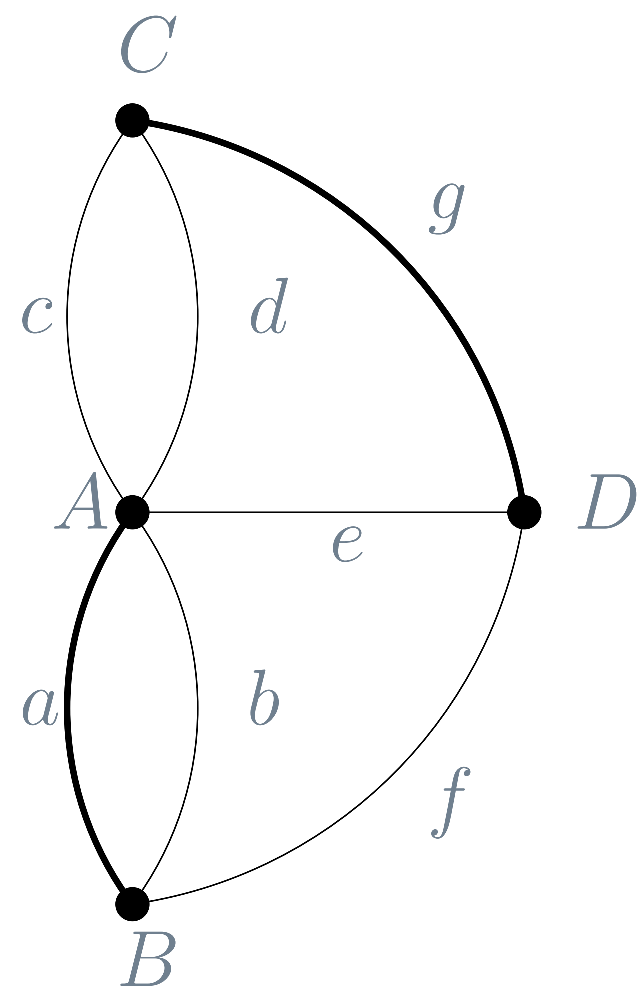

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

# El problema del cartero

- (Mei Gu Guan 1960) Cuando el autor estaba dibujando un diagrama para la ruta de un cartero, él descubrió el siguiente problema:
- Un cartero tiene que cubrir su ruta asignada antes de regresar a la oficina postal.
- El problema es encontrar la distancia más corta que debe caminar el cartero.

# Recorridos de cartero



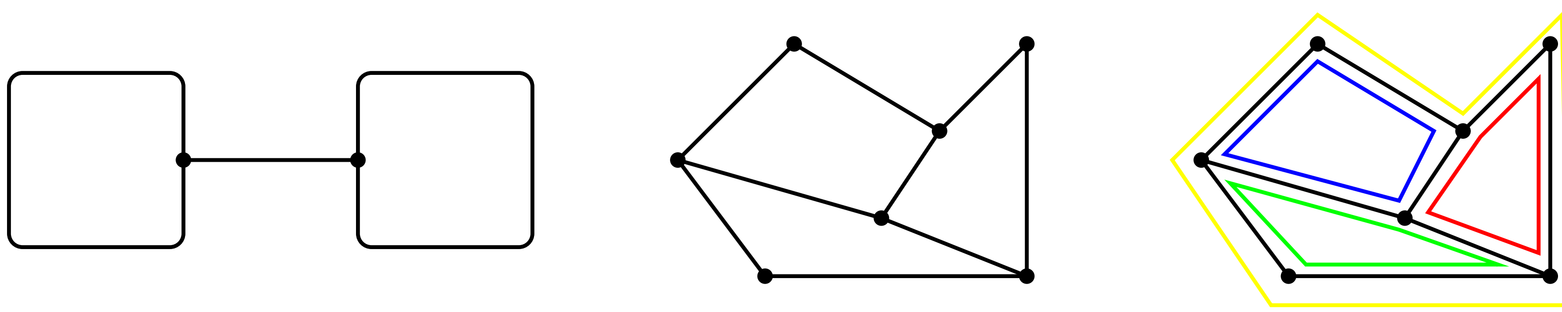



# Sobre el problema del cartero

- Se puede resolver eficientemente para gráficas y gráficas dirigidas.
- El problema es NP duro en gráficas mixtas.
- Existen muchas variantes de este problema.
- Para algunas de estas variantes es NP completo decidir si existe solución factible.

# Doble cubierta por ciclos

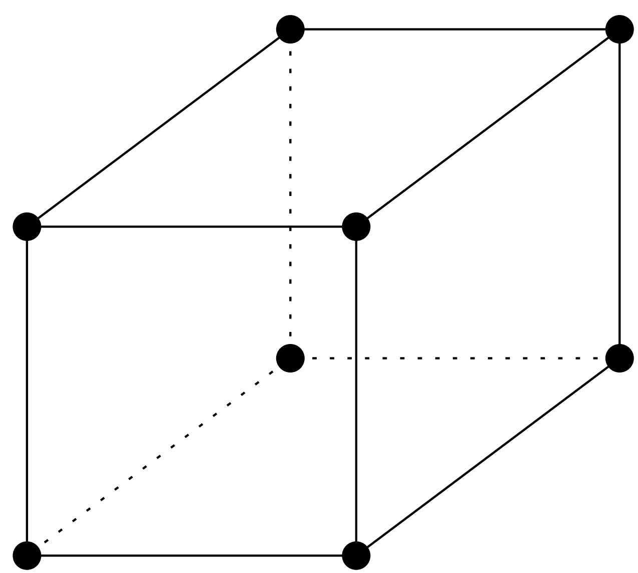
- Si se duplican todas las aristas de una gráfica se obtiene una gráfica euleriana.
- ¿Existirá una doble cubierta por ciclos?
- Szekeres y Seymour conjeturan que sí (excepto para los contraejemplos obvios).



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

# Fórmula de Euler (1750)

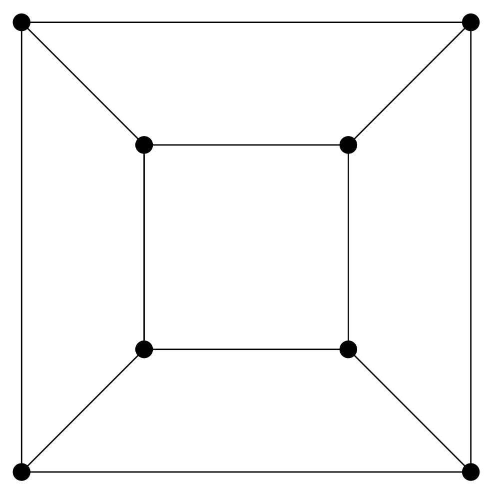
- En todo poliedro se cumple que $c + v = e + 2$.
- $c$ es el número de caras, $v$ es el número de vértices y $e$ es el número de aristas.
- En el cubo $c = 6$, $v = 8$ y $e = 12$.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

# Gráficas aplanables

- $G = (V, E)$ gráfica y $S$ superficie.
- $G$ está *encajada* si está dibujada en $S$ sin que se intersecten sus aristas.
- Una gráfica es *aplanable* si se puede encajar en el plano.



# Teorema de Euler

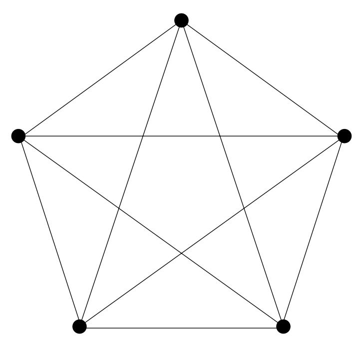
- Sea $G = (V, E)$ una gráfica aplanable y conexa.
- Sea $C$ el número de caras de algún encaje de $G$.
- Entonces se cumple que

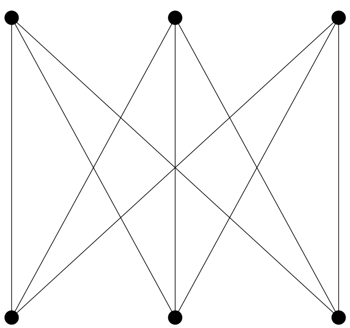
$$|V| - |E| + C = 2.$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

# Teorema de Kuratowski

- Teorema de Euler $\Rightarrow K_5, K_{3,3}$ no son gráficas aplanables.
- Teorema de Kuratowski: Una gráfica es aplanable si y sólo si no contiene una subgráfica homeomorfa a $K_5$ o $K_{3,3}$.

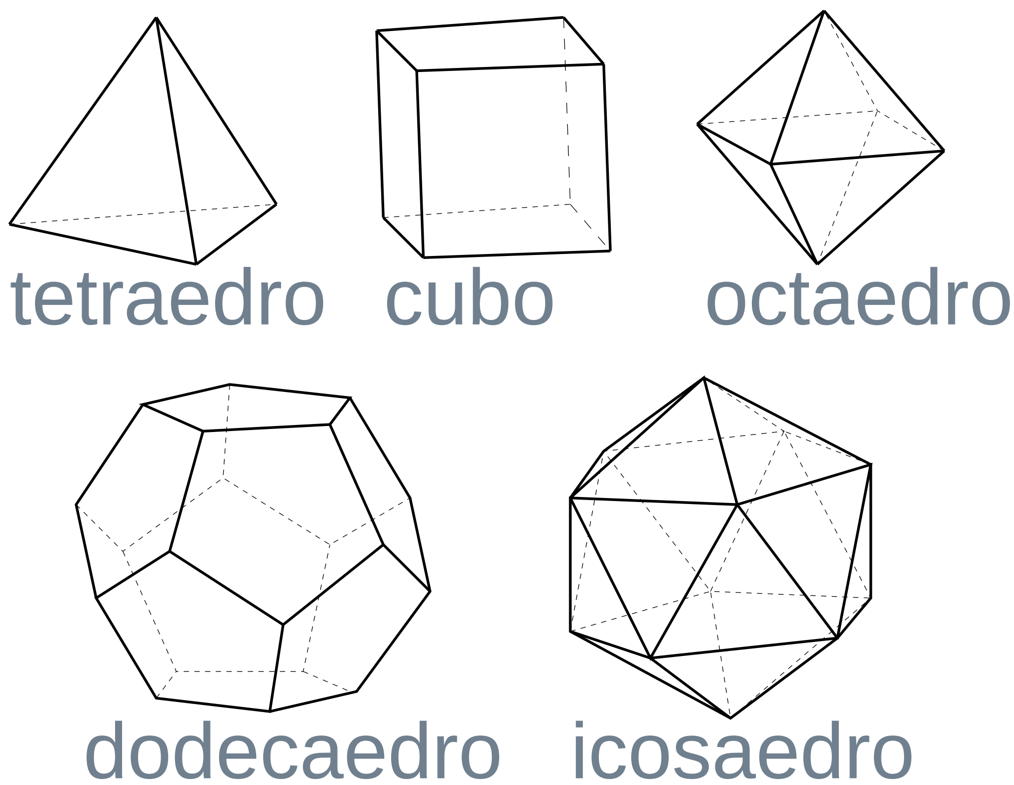




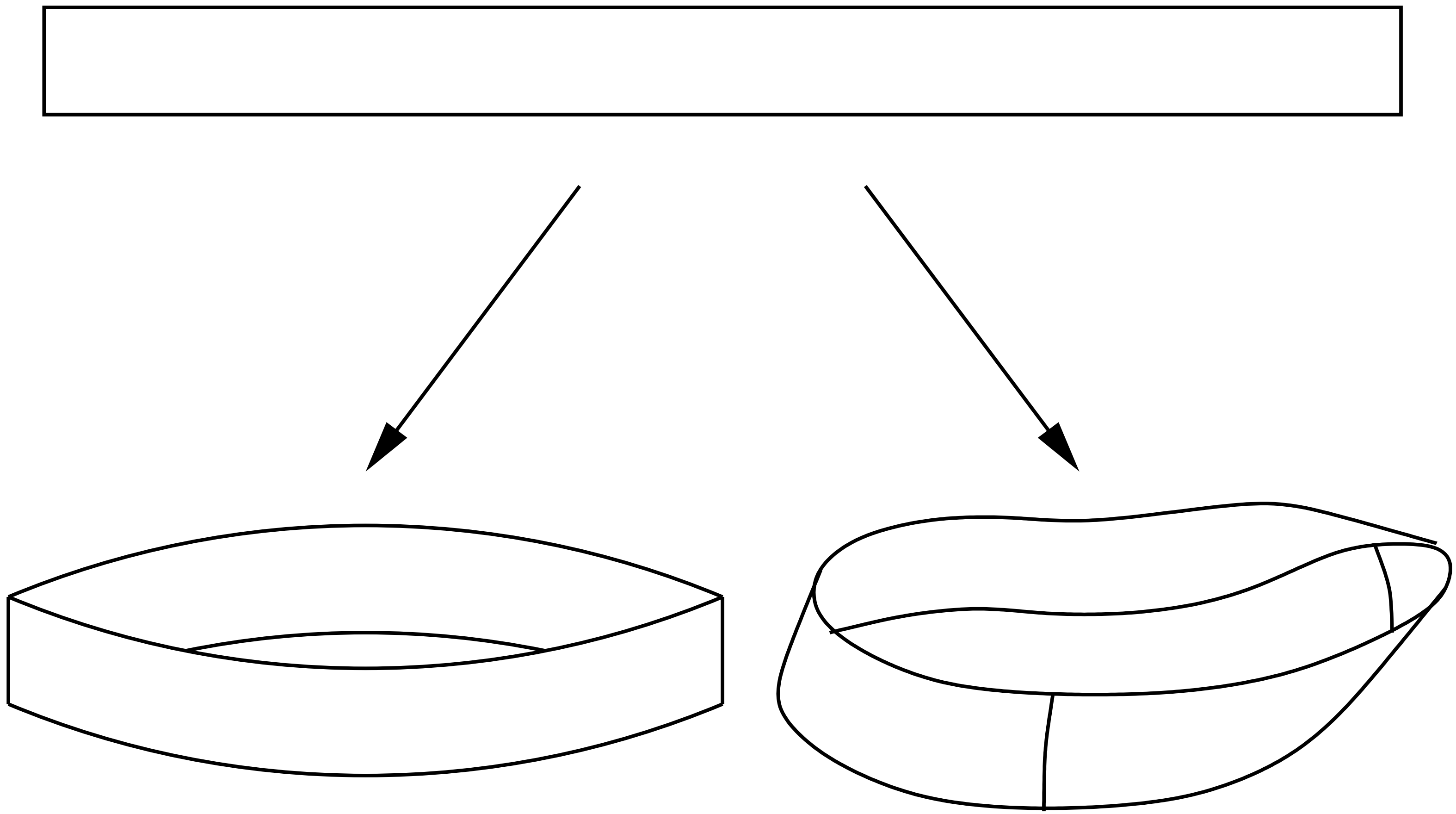
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

# Poliedros regulares

- Teorema (Pitágoras y Platón): Sólo existen cinco poliedros regulares.

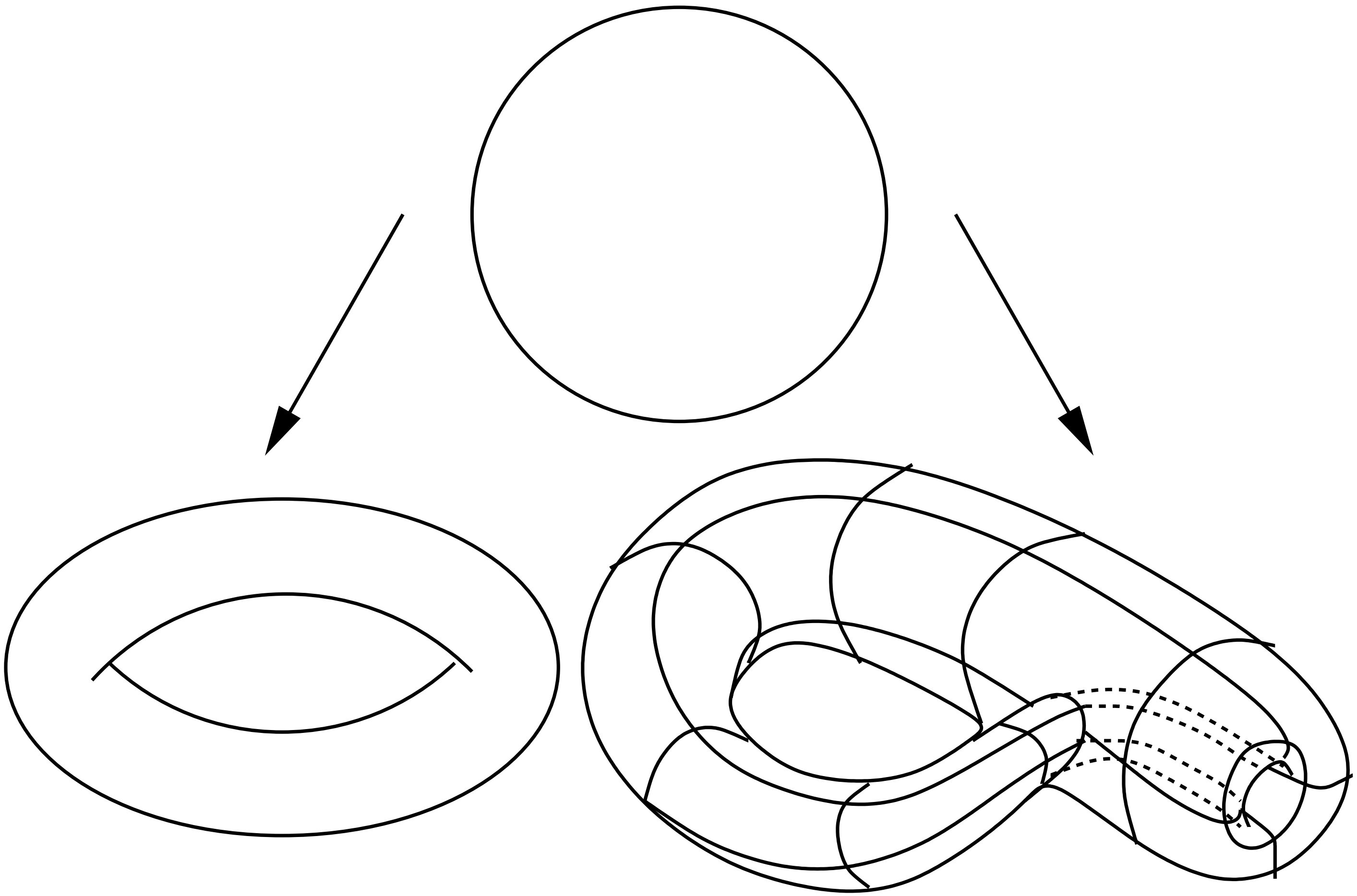


# Creación de otras superficies I



Cilindro y banda de Möbius

# Creación de otras superficies II



Esfera, toro y botella de Klein

# Teorema de Poincaré

- Consideremos un encaje simple de una gráfica en una superficie $S$ con $|V|$ vértices, $|E|$ aristas y $C$ caras.
- Si $S$ es una esfera con $g$ asas, entonces

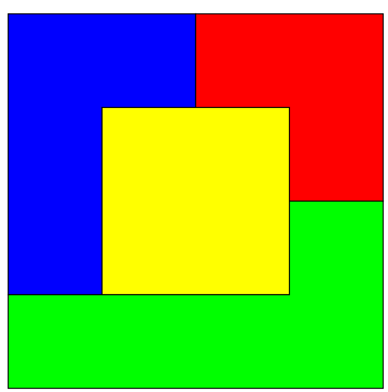
$$|V| - |E| + C = 2 - 2g.$$

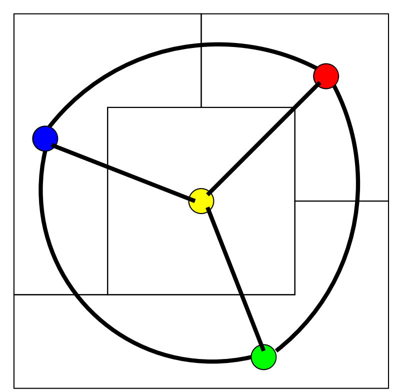
- Si $S$ es una esfera con $h$ bandas de Möbius, entonces

$$|V| - |E| + C = 2 - h.$$

# Coloración de mapas

- Dos países adyacentes deben tener colores diferentes.
- Conjetura: Se requieren a lo más $4$ colores.
- Teorema de los cuatro colores: Toda gráfica aplanable se puede colorear con a lo más $4$ colores.





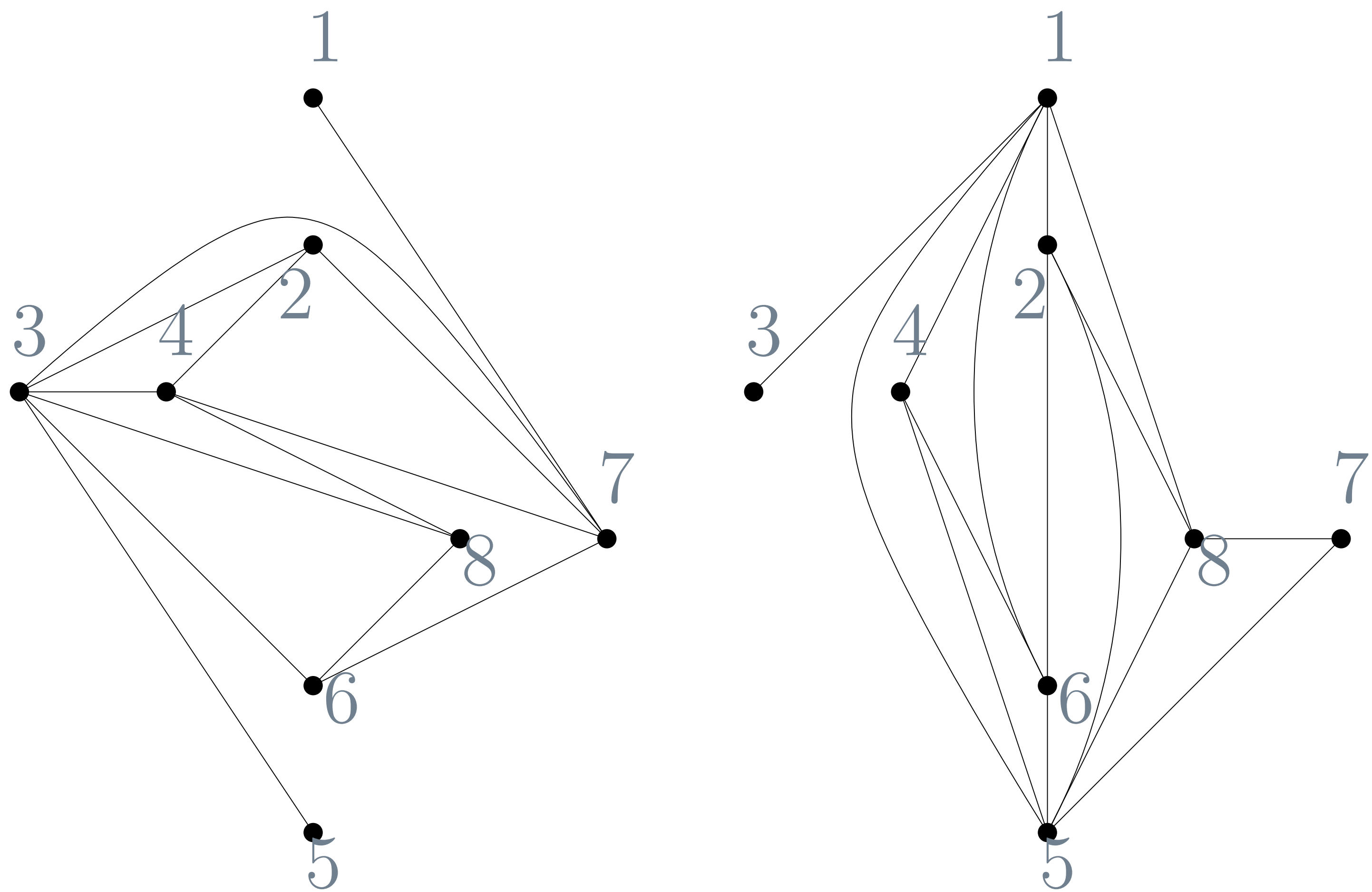
# Teorema de Heawood

- Sea $S_g$ la esfera con $g$ asas. Entonces

$$\chi(S_g) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor .$$

- Ringel y Youngs demostraron que se cumple la igualdad para casi todas las superficies cerradas.
- La única excepción es la botella de Klein.

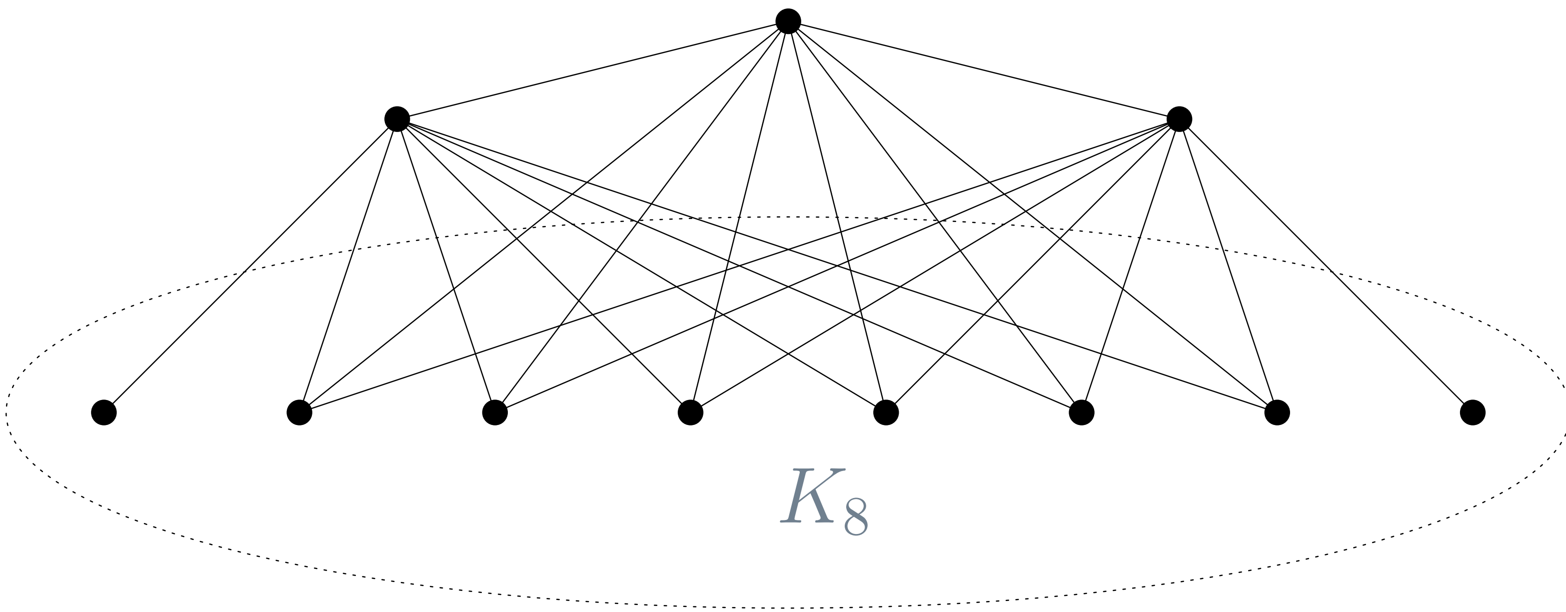
# Coloración Tierra Luna




Una partición de $K_8$ en dos gráficas planas

# Al menos nueve colores

Esta gráfica fue propuesta por Sulanke:




Y a lo mucho doce colores (usando Euler).