Caracterización de poliedros enteros del problema del cartero con viento

XXXVIII Congreso Nacional de la SMM

24 a 28 de Octubre de 2005, México, D.F.

Criel Merino López — Francisco Javier Zaragoza Martínez

IMATE-UNAM — UAM Azcapotzalco

merino@matem.unam.mx --- franz@correo.azc.uam.mx

Contenido

- El problema del cartero con viento
- Formulación entera y relajación lineal
- Restricciones de cortes impares
- Gráficas con viento perfectas
- Gráficas con viento ideales
- Grafts
- Grafts con viento perfectos
- Conclusiones

El problema del cartero con viento

- Sea $G = (V, E)$ una gráfica no dirigida y conexa, sea $\vec{G} = (V, \vec{E})$ su gráfica dirigida asociada y sea $c \in \mathbb{Z}_+^{\vec{E}}$.
- El *problema del cartero con viento* es el de encontrar un tour de G de costo mínimo que atraviese todas sus aristas, donde el costo de una arista depende de la dirección en la que se atraviese.
- Teorema (Guan, 1984): Este problema es NP-duro aún si nos restringimos a gráficas planas.

Formulación entera

- Sea $P(G)$ la cerradura convexa de las soluciones factibles del siguiente programa entero:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{PCV}(G,c) & = & \min c^\top x \\
\text{subject to} & & \\
x(\vec{\delta}_G(\bar{v})) - x(\vec{\delta}_G(v)) & = & 0 \text{ para toda } v \in V \\
x_{e^+} + x_{e^-} & \geq & 1 \text{ para toda } e \in E \\
x_{e^+}, x_{e^-} & \geq & 0 \text{ para toda } e \in E \\
x_{e^+}, x_{e^-} & & \text{entera para toda } e \in E.
\end{array}
$$

Relajación lineal

- Sea $Q(G)$ la región definida por:

$$
\begin{aligned}
x(\vec{\delta}_G(\bar{v})) - x(\vec{\delta}_G(v)) &= 0 \text{ para toda } v \in V \\
x_{e^+} + x_{e^-} &\geq 1 \text{ para toda } e \in E \\
x_{e^+}, x_{e^-} &\geq 0 \text{ para toda } e \in E.
\end{aligned}
$$

- Teorema (Win, 1987): Si G es conexa entonces $P(G) = Q(G)$ si y sólo si G es euleriana.

Restricciones de cortes impares

- Sea $S \subseteq V$ tal que $|\delta_G(S)|$ es impar. Entonces al menos un elemento de $\delta_G(S)$ debe usarse más de una vez.
- Por lo tanto lo siguiente es válido para $P(G)$:

$$x(\vec{\delta}_G(S)) + x(\vec{\delta}_G(\bar{S})) \geq |\delta_G(S)| + 1.$$

- Las restricciones de cortes impares fueron introducidas por Edmonds y Johnson (1973).

Gráficas con viento perfectas

- Sea $O(G)$ el subconjunto de $Q(G)$ que satisface todas las restricciones de cortes impares.
- Decimos que G es una *gráfica con viento perfecta* si el poliedro $O(G)$ es entero. Equivalentemente, G es una gráfica con viento perfecta si $O(G) = P(G)$.
- Teorema (Grötschel y Win, 1992): Existe un algoritmo polinomial para resolver el problema del cartero con viento para la clase de gráficas con viento perfectas.

Más acerca de GVP

- Los bosques y las gráficas eulerianas son gráficas con viento perfectas (Win, 1987).
- K_4 no lo es, $K_{3,3}$ sí lo es.
- Esta propiedad no es cerrada bajo borrado de aristas.
- Pero es cerrada bajo la subdivisión y contracción de aristas, la identificación de vértices y el borrado de *dos* aristas paralelas.
- Win conjecturó que las gráficas serie-paralelo también tienen esta propiedad.

Gráficas con viento ideales

- Sea $l \in \mathbb{Z}_+^E$ y sea $b \in \mathbb{Z}^V$ con $b(V) = 0$.
- $S \subseteq V$ es *impar* si $b(S) + l(\delta_G(S))$ es impar.
- Sea $O(G, l, b)$ el poliedro dado por:

$$\begin{aligned} x(\vec{\delta}_G(\bar{v})) - x(\vec{\delta}_G(v)) &= b_v \text{ para toda } v \in V \\ x_{e^+} + x_{e^-} &\geq l_e \text{ para toda } e \in E \\ x(\vec{\delta}_G(S)) + x(\vec{\delta}_G(\bar{S})) &\geq l(\delta_G(S)) + 1 \text{ para toda } S \\ x_{e^+}, x_{e^-} &\geq 0 \text{ para toda } e \in E. \end{aligned}$$

- G es una *gráfica con viento ideal* si $O(G, l, b)$ es entero para todas las elecciones posibles de l y b.

Caracterización de GVI

- Teorema: Esta propiedad es cerrada bajo toma de menores gráficos.
- Teorema: Los siguientes enunciados son equivalentes:
  1. G es serie-paralelo.
  2. G es con viento ideal.
  3. $O(G, l, 0)$ es entero para toda $l \in \{0, 1\}^E$.
- Corolario: Las gráficas serie-paralelo son con viento perfectas.

Generalización común

- Tenemos dos resultados de integralidad.
- Uno habla de paridad en los vértices.
- El otro habla de menores excluídos.
- ¿Habrá alguna forma de combinar estos resultados?

Grafts

- Un *graft* es una pareja (G, T) donde $G = (V, E)$ es una gráfica, $T \subseteq V$ y $|T|$ es par.
- Si $v \in T$ es *impar*, si no es *par*.
- Si $e \in E$ las operaciones de menores son:
- Borrado: $(G, T) \setminus e = (G \setminus e, T)$.
- Contracción: $(G, T)/e = (G/e, T_e)$ donde T_e depende de la paridad de los extremos de e.
- Borrado de un vértice par aislado.

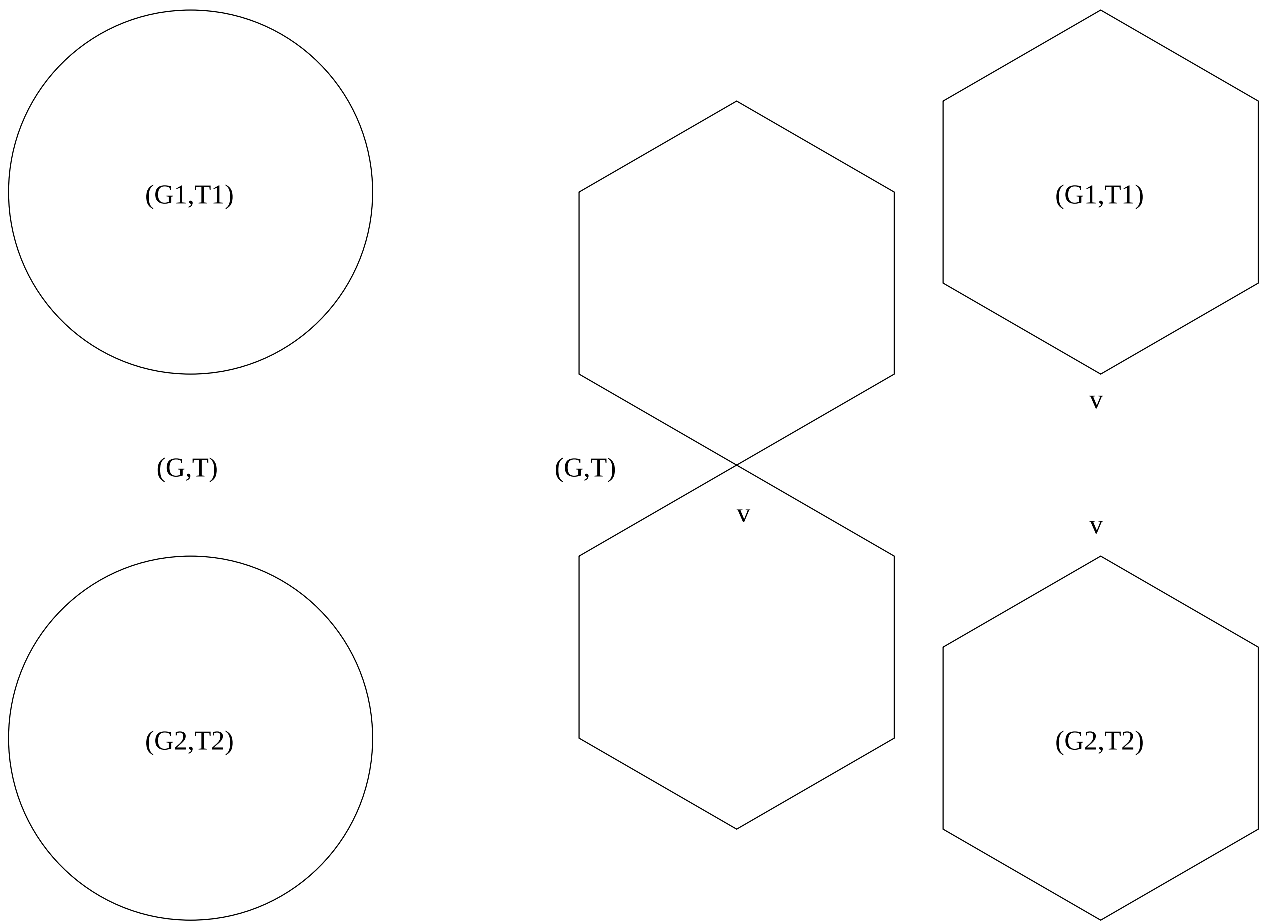
Grafts con viento perfectos

- Sea $l \in \mathbb{Z}_+^E$ y sea $b \in \mathbb{Z}^V$ con $b(V) = 0$.
- Decimos que (l, b) es *válido* para (G, T) si $v \in T$ si y sólo si $b_v + l(\delta_G(v))$ es impar.
- (G, T) es una *graft con viento perfecto* si $O(G, l, b)$ es entero para todas las elecciones válidas de l y b.

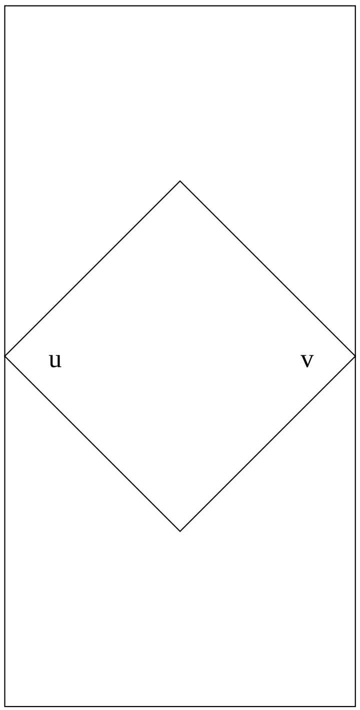
Menores excluídos

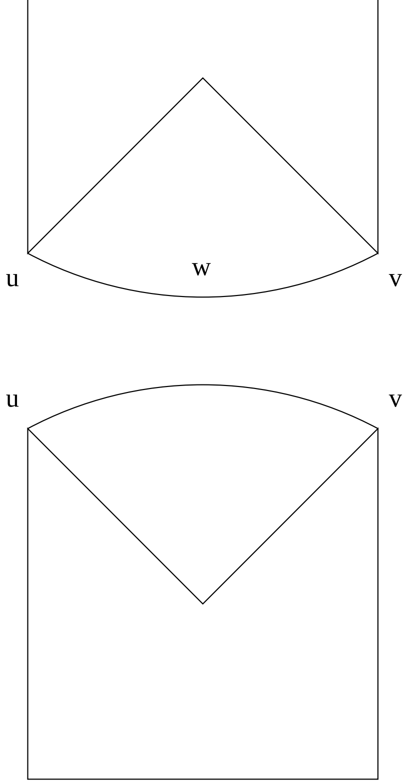
- Teorema: Esta propiedad es cerrada bajo toma de menores de grafts.
- Hay dos menores excluídos (menores *malos*): $K_4^4 = (K_4, V(K_4))$ y $K_4^2 = (K_4, \{u, v\})$.
- Si $G = (V, E)$ sea $T(G)$ el conjunto de vértices de G con grado impar.
- Si G es euleriana, $(G, T(G))$ no contiene esos menores.
- Si G es serie-paralelo, $(G, T(G))$ no contiene esos menores.

1-divisiones de grafts



2-divisiones de grafts





Propiedades de las divisiones

- Podemos suponer que cada componente conexa de (G, T) tiene un número par de vértices impares.
- Las partes de una división son menores. Por lo tanto nuestra propiedad es cerrada bajo toma de divisiones.
- Un graft dividible tiene un menor *malo* si y sólo si alguna de sus partes tiene un menor *malo*.

Etapas de la prueba

- Si (G, T) no tiene divisiones ni menores malos entonces G es serie-paralelo o T es vacío.
- Si (G, T) tiene una 1-división entonces (G, T) es con viento perfecto si y sólo si sus partes lo son.
- Si (G, T) no tiene 1-divisiones ni menores malos pero tiene una 2-división entonces sus dos partes son del mismo tipo (T_i es vacío o G_i es serie-paralelo).

Caracterización

- Teorema: Los siguientes enunciados son equivalentes:
  1. (G, T) es con viento perfecto.
  2. (G, T) no tiene a K_4^4 ni a K_4^2 como menor.
  3. Alguna componente conexa de (G, T) tiene un número impar de vértices impares o (G, T) se puede *dividir* en grafts serie-paralelo o eulerianos.

Conclusiones y trabajo a futuro

- Hemos extendido la clase de gráficas con viento perfectas conocidas.
- Estamos buscando un algoritmo *combinatorio* para el problema del cartero con viento en gráficas con viento perfectas.
- Estamos interesados en estudiar la *media-integralidad* de los poliedros que hemos estudiado.