Triangulaciones Irreducibles

XXXIX Congreso Nacional de la SMM
1 a 6 de Octubre de 2006
Villahermosa, México

Gloria Aguilar y Francisco Zaragoza

CINVESTAV (Matematicas) y UAM Azcapotzalco (Sistemas)

`gaguilar@math.cinvestav.mx y franz@correo.azc.uam.mx`

Contenido

- Superficies y género de Euler
- Encajes de gráficas y triangulaciones
- Triangulaciones irreducibles
- Cotas conocidas
- Nuevas cotas
- Conclusiones y trabajo a futuro

Superficies y género de Euler

- Sea M_g la esfera con g asas ($g \geq 0$). Esfera, toro, etc.
- Sea N_g la esfera con g cruces ($g \geq 1$). Plano proyectivo, botella de Klein, etc.
- Sus *géneros de Euler* son $\gamma(M_g) = 2g$ y $\gamma(N_g) = g$, respectivamente.

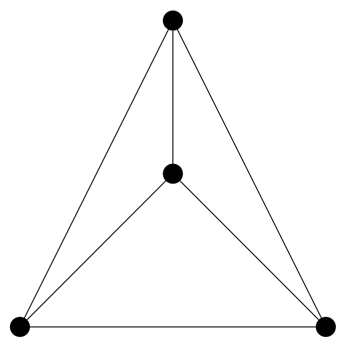
Gráficas y género de Euler

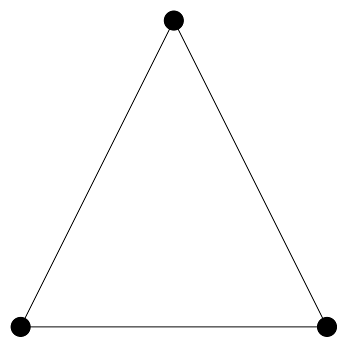
- Sea G una gráfica simple.
- El *género orientable* $\bar{\gamma}(G)$ de G es la mínima g tal que G se puede encajar en M_g.
- El *género no orientable* $\tilde{\gamma}(G)$ de G es la mínima g tal que G se puede encajar en N_g.
- El *género de Euler* $\gamma(G)$ de G es $\min\{2\bar{\gamma}(G), \tilde{\gamma}(G)\}$.
- Observe que

$$\gamma(G) = \min\{\gamma(S) : G \text{ se puede encajar en } S\}.$$

Triangulaciones

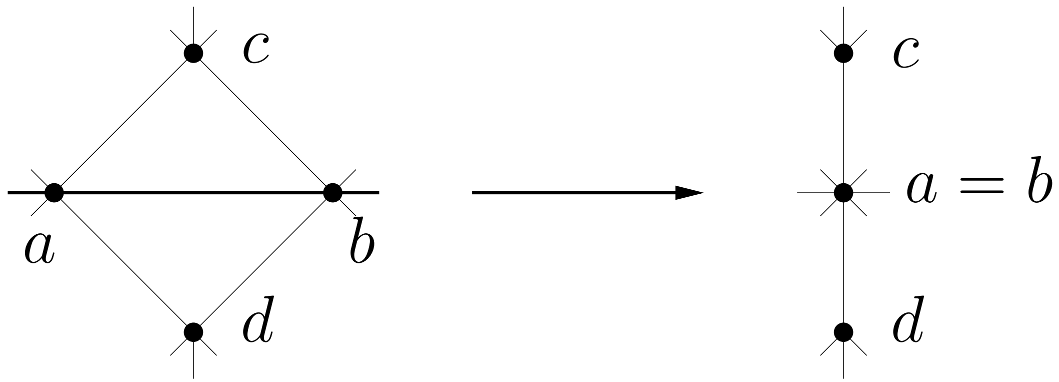
- Una *triangulación* de una superficie cerrada S es una gráfica simple G encajada en S de modo que todas las caras tengan tres vértices y cualesquiera dos caras distintas comparten a lo más dos vértices.
- K_4 es una triangulación de la esfera pero K_3 no lo es.





Triangulaciones irreducibles

- Una arista ab de una triangulación se puede *contraer* si al aplicar esta operación se obtiene otra triangulación:



- Una triangulación es *irreducible* si ninguna de sus aristas se puede contraer.

Triangulaciones irreducibles conocidas

- Caso orientable:
  - 1 de M_0 con 4 vértices (Steinitz, 1934).
  - 21 de M_1 con ≤ 10 vértices (Lavrenchenko, 1987).
  - $396,784$ de M_2 con ≤ 17 vértices (Sulanke, 2006).
- Caso no orientable:
  - 2 de N_1 con ≤ 7 vértices (Barnette, 1982).
  - 29 de N_2 con ≤ 11 vértices (Sulanke, 2006).
  - $9,708$ de N_3 con ≤ 16 vértices (Sulanke, 2006).
  - $6,297,982$ de N_4 con ≤ 22 vértices (Sulanke, 2006).

Triangulaciones irreducibles maximales

- Nos interesa calcular el tamaño máximo $f(S)$ de una triangulación irreducible de una superficie S.
- $f(S)$ es finito (Barnette y Edelson, 1989).
- $f(S) \in O(\gamma(S)^4)$ (Gao, Richmond, Thomassen, 1991).
- $f(S) \in O(\gamma(S)^2)$ (Gao, Richter, Seymour, 1995).
- $f(S) \leq 171\gamma(S) - 72$ (Nakamoto y Ota, 1995).
- $f(S) \leq 120\gamma(S)$, S orientable (Cheng, Dey, Poon, 2002).

Teorema principal

Para toda superficie cerrada S se tiene que

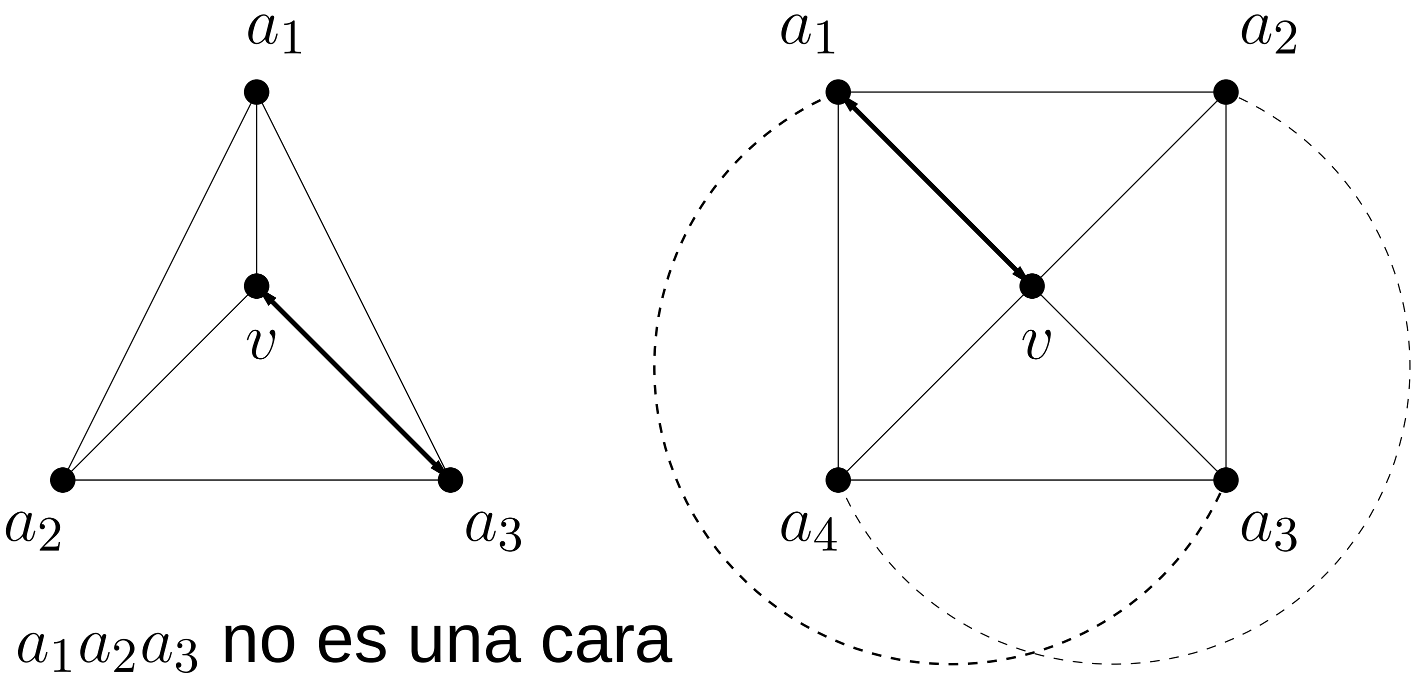
$$f(S) \leq 106.5\gamma(S) - 33.$$

(Aguilar y Zaragoza, 2006)

Algunos lemas útiles

- **Lema 1** (Miller, 1987): Sean G_1, G_2 dos gráficas simples y sea $G := G_1 \cup G_2$. Si G_1 y G_2 tienen a lo más dos vértices en común entonces $\gamma(G) \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$.
- Sean $S \neq M_0$ y G una triangulación irreducible de S. Sean $v \in V(G)$ y H_v la subgráfica *inducida* por v y sus vecinos. Nakamoto y Ota (1995) probaron:
- **Lema 2**: G tiene grado mínimo 4.
- **Lema 3**: H_v no es *plana*, es decir $\gamma(H_v) \geq 1$.

Idea de la prueba de los lemas 2 y 3



$a_1a_2a_3$ no es una cara

Lema del conjunto independiente

Lema 4 (Aguilar y Zaragoza, 2006): Para $i \geq 4$ sea V_i el conjunto de vértices de grado i. Sea $k \geq 4$. Entonces existe un *conjunto independiente* $X \subseteq V_4 \cup \cdots V_k$ tal que

$$|X| \geq \sum_{i=4}^{k} \frac{|V_i|}{i+1}.$$

(Nakamoto y Ota lo probaron para $k = 6$.)

Prueba del Teorema (1)

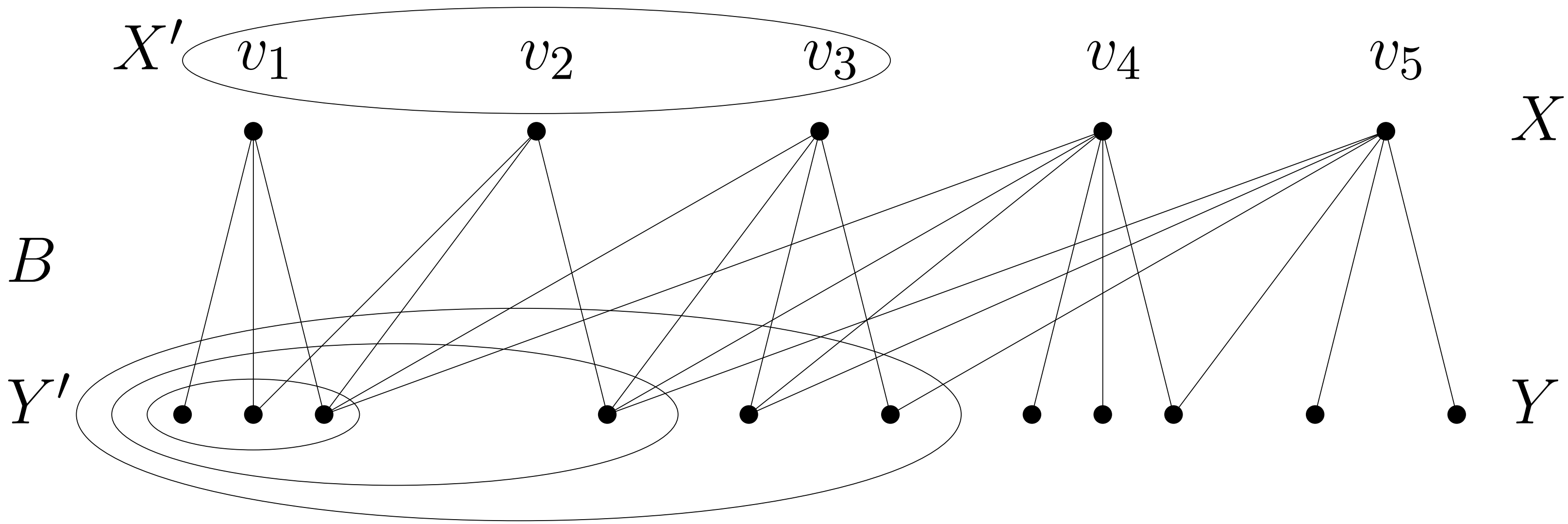
- Denotamos por $N_H(v)$ a los vecinos de v en H.
- Sea $k \geq 4$, sea X como en el Lema 4 y defina

$$Y := \{y \in V(G) - X : y \in N_G(x) \text{ para algún } x \in X\}.$$

- Sea B la subgráfica bipartita de G inducida por X, Y.
- Sea $X' := \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subseteq X$ maximal tal que

$$\left| \left\{ \bigcup_{1 \leq i < j} N_B(v_i) \right\} \cap N_B(v_j) \right| \leq 2, \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots, r.$$

Prueba del Teorema (2)



Como $H_{v_1} \cup \cdots \cup H_{v_{|X'|}}$ es subgráfica de G se puede encajar en S. Usando el Lema de Miller se sigue que:

$$\gamma(S) \geq \gamma(H_{v_1} \cup \cdots \cup H_{v_{|X'|}}) \geq \sum_{i=1}^{|X'|} \gamma(H_{v_i}) \geq |X'|.$$

Prueba del Teorema (3)

- Sea M la subgráfica de B inducida por (X, Y'):

$$|V(M)| - |E(M)| + |F(M)| \geq 2 - \gamma(S).$$

- Como M es bipartita sus caras tienen al menos 4 aristas por lo que $4|F(M)| \leq 2|E(M)|$ y

$$2|V(M)| - |E(M)| \geq 4 - 2\gamma(S).$$

- X' maximal $\Rightarrow$ todo $v \in X - X'$ tiene ≥ 3 vecinos en Y'.
- M tiene $\geq |Y'|$ aristas en (X', Y'), por lo que

$$|E(M)| \geq 3(|X| - |X'|) + |Y'|.$$

Prueba del Teorema (4)

- Junto con $|V(M)| = |X| + |Y'|$ y $|Y'| \leq k|X'|$ tenemos

$$4 - 2\gamma(S) \leq -|X| + |Y'| + 3|X'| \leq -|X| + (k+3)|X'|.$$

- Euler en $G \Rightarrow n - m + f = 2 - \gamma(S)$.
- G triangulación $\Rightarrow 3f = 2m \Rightarrow 3n - m = 6 - 3\gamma(S)$.
- $\sum_{i\geq 4} |V_i| = n$, $\sum_{i \geq 4} i|V_i| = 2m$ y álgebra implican

$$\sum_{i=4}^{k} (k+1-i)|V_i| \geq (k-5)n - 6\gamma(S) + 12.$$

Prueba del Teorema (5)

- Sea n_k el máximo valor de $(i+1)(k-i+1)$ con $4 \le i \le k$. Aplicando el lema 4 obtenemos:

$$\begin{aligned} 4 - 2\gamma(S) &\le -\sum_{i=4}^{k} |V_i|/(i+1) + (k+3)|X'| \\ &= -\frac{1}{n_k}\sum_{i=4}^{k} \frac{n_k}{i+1}|V_i| + (k+3)|X'| \\ &\le -[(k-5)n + 12 - 6\gamma(S)]/n_k + (k+3)|X'| \end{aligned}$$

- De donde finalmente

$$\gamma(S) \ge \frac{(k-5)n + 12 + 4n_k - (k+3)n_k|X'|}{6 + 2n_k}.$$

Prueba del Teorema (6)

- Dos cotas inferiores para $\gamma(S)$ que dependen de $|X'|$.
- Eliminando la dependencia de $|X'|$ obtenemos

$$\gamma(S) \geq \frac{(k-5)n + 4n_k + 12}{(k+5)n_k + 6}.$$

- (Nakamoto y Ota con $k = 6$.)
- Esta cota se maximiza para $k = 9$. Como $n_9 = 30$ obtenemos de forma equivalente el resultado

$$n \leq 106.5\gamma(S) - 33.$$

Cotas inferiores para $f(S)$

- Nakamoto y Ota construyeron triangulaciones irreducibles para demostrar que:
  - $f(M_g) \geq 8g + 2$ para toda $g \geq 1$.
  - $f(N_g) \geq 5g + 2$ para toda $g \geq 1$.
- Sulanke (2006) mejoró estos resultados a:
  - $f(M_g) \geq \lfloor 8.5g \rfloor$ para toda $g \geq 1$.
  - $f(N_g) \geq \lfloor 5.5g \rfloor$ para toda $g \geq 1$.

Conclusiones y trabajo a futuro

- Todas las cotas conocidas para $f(S)$ han sido mejoradas (por nosotros o por Sulanke).
- Hemos obtenido mejores cotas para *cuadrangulaciones irreducibles* (de $n \leq 186g - 64$ a $n \leq 159.5g - 46$).
- Tenemos dos definiciones alternas de *cuadrangulación* y estamos estudiando las cuadrangulaciones irreducibles en superficies de bajo género.