Cuadrangulaciones Irreducibles de Superficies

XL Congreso Nacional de la SMM

Monterrey, Nuevo León

14-19 de Octubre de 2007

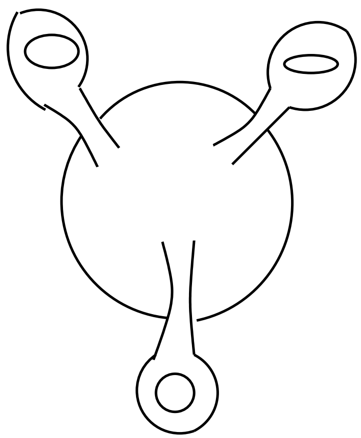
Gloria Aguilar Cruz
ITA-CINVESTAV
ac.gloria@gmail.com

Francisco J. Zaragoza Martínez
UAM-Azcapotzalco
franz@correo.azc.uam.mx

Contenido

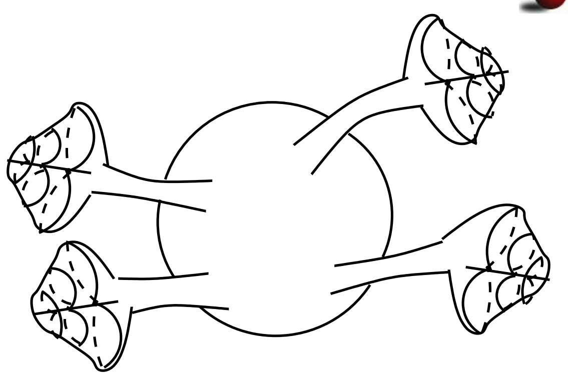
- Superficies y Cuadrangulaciones
- Cuadrangulaciones Irreducibles
- Cuadrangulaciones Irreducibles Máximas
- Viejas y Nuevas Cotas
- Conclusiones

Superficies y Género de Euler



- Sea M_g la esfera con g asas. Su género de Euler es

$$\boxed{\gamma(M_g) = 2g}$$



- Sea N_g la esfera con g bonetes cruzados. Su género de Euler es

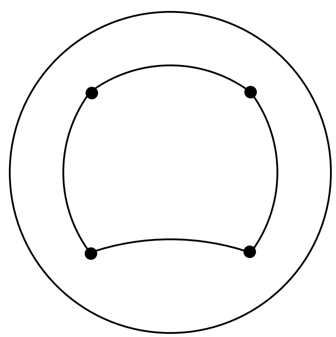
$$\boxed{\gamma(N_g) = g}$$

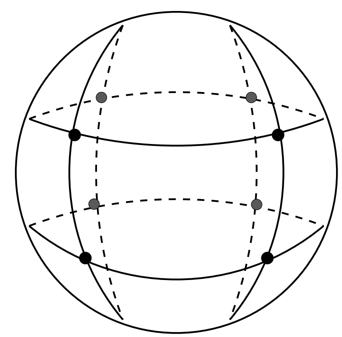
Grafos y Género de Euler

- Sea G un grafo simple.
- El *género orientable* $\bar{\gamma}(G)$ de G es el mínimo g tal que G es encajable en M_g.
- El *género no orientable* $\tilde{\gamma}(G)$ de G es el mínimo g tal que G es encajable en N_g.
- El *género de Euler* $\gamma(G)$ de G es $\min\{2\bar{\gamma}(G), \tilde{\gamma}(G)\}$.
- Note que $\gamma(G) = \min\{\gamma(S) : G \text{ es encajable en } S\}$

Cuadrangulaciones

Una *cuadrangulación* de una superficie cerrada S es un grafo simple G encajado en S de tal forma que todas sus caras tengan cuatro vértices (diferentes).

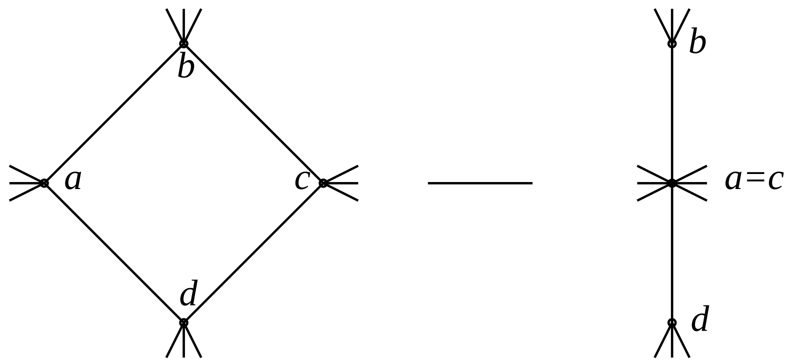




Dos cuadrangulaciones de la esfera son el cuadrado y el cubo.

Cuadrangulaciones Irreducibles

Una cara de una cuadrangulación es *contractible* si la siguiente operación produce otra cuadrangulación.



Una cuadrangulación es *irreducible* si no tiene caras contractibles.

Máximas

Sea $q(S)$ el máximo número de vértices de una cuadrangulación irreducible de una superficie cerrada S. Este número es finito, de hecho

$$\boxed{q(S) \leq 186\gamma(S) - 64}$$

(Nakamoto y Ota, 1995)

Resultado Principal

Teorema. Para cada superficie cerrada S se tiene la siguiente cota

$$q(S) \leq 159.5\gamma(S) - 46$$

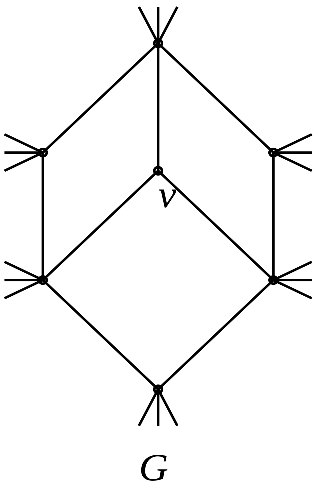
Disminuimos la cota anterior en un 14%.

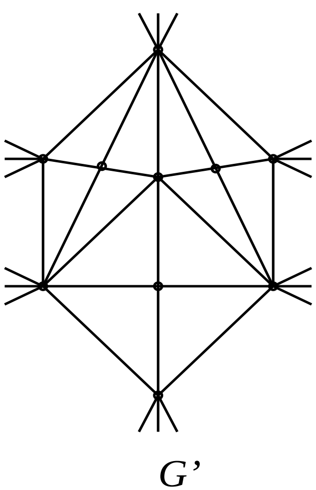
Algunos Lemas

- Sean G_1 y G_2 dos grafos y $G = G_1 \cup G_2$. Si $|V(G_1) \cap V(G_2)| \leq 2$ entonces $\gamma(G) \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$ (Miller, 1987).

- Sea G una cuadrangulación irreducible de $S \neq M_0$. El grado mínimo de G es 3 (Nakamoto y Ota, 1995).

Otro Lema





- Sea G' el grafo encajado en S obtenido al añadir un vértice de grado 4 a cada una de las caras de G. Para $v \in V(G)$, sea H_v el subgrafo de G' inducido por v, sus vecinos, y los vértices de las caras que contienen a v. Entonces $\gamma(H_v) \geq 1$ (Nakamoto y Ota, 1995 para $\deg_G(v) \leq 4$).

Lema del Conjunto Independiente

Para $i \geq 3$ sea V_i el conjunto de vértices de grado i en G. Decimos que $I \subseteq V(G)$ es *independiente* si cualesquiera par de vértices en I están en distintas caras de G.

Lema. Sea $k \geq 3$. Existe un conjunto independiente $X \subseteq V_3 \cup V_4 \cup \cdots V_k$ tal que

$$|X| \geq \sum_{i=3}^{k} \frac{|V_i|}{2i+1}$$

Nakamoto y Ota probaron esto para $k = 4$.

Demostración (1)

- Sea $k \geq 3$, sea X como en el Lema del Conjunto Independiente y sea $Y \subseteq V(G) \backslash X$ el subconjunto de vértices de G que estan en la misma cara que un vértice de X.
- Construya una subgrafo bipartito B de X y Y. Este grafo esta encajado en S.

Demostración (2)

- Encuentre un subconjunto maximal $X' := \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subseteq X$ de tal forma que podamos aplicar el Lema de Miller a la sucesión de grafos $H_{v_1},\ H_{v_1} \cup H_{v_2},\ \ldots,\ H_{v_1} \cup H_{v_2} \cup \cdots \cup H_{v_r}$ y obtenemos la cota
$$\boxed{\gamma(S) \geq |X'|}.$$
- Construya otro subgrafo bipartito B' de X' y Y', el cual también esta encajado en S.

Demostración (3)

- Utilice la maximalidad de X' para demostrar que B' tiene al menos $3(|X| - |X'|) + |Y'|$ aristas.
- Utilice la fórmula de Euler sobre B' y propiedades de X para demostrar que $4 - 2\gamma(S) \leq (2k+3)|X'| - |X|$.
- Utilice la fórmula de Euler $|V_G| - |E_G| + |F_G| = 2 - \gamma(S)$ y teoría de grafos básica sobre G para demostrar que

$$\sum_{i=3}^{k}(k-i+1)|V_i| \geq (k-3)|V(G)| - 4\gamma(S) + 8$$

Demostración (4)

- Sea $n_k = \max_{3\le i\le k}(2i+1)(k-i+1)$. Note que $n_3 = 7,\ n_4 = 14$, y $n_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ para $k \ge 5$.
- Utilice la cota inferior para $|X|$ del Lema de Conjunto Independiente para obtener

$$4-2\gamma(S) \le -\frac{(k-3)|V(G)|+4\gamma(S)-8}{n_k}+(2k+3)|X'|$$

o de forma equivalente

$$\boxed{\gamma(S) \ge \frac{(k-3)|V(G)|+8+n_k(4-(2k+3)|X'|)}{2n_k+4}}$$

Demostración (5)

- Tenemos dos cotas para $\gamma(S)$ que dependen de $|X'|$. Al eliminar esta dependencia obtenemos

$$\frac{4+(5+2k)n_k}{k-3}\gamma(S)-\frac{4n_k+8}{k-3}\geq |V(G)|$$

- Para $k=4$, $|V(G)|\leq 186\gamma(S)-64$ que es la cota obtenida por Nakamoto y Ota.
- Para $k=5$, $|V(G)|\leq 159.5\gamma(S)-46$
- Para $k\geq 6$, la cota para $|V(G)|$ no es mejor.

Conclusiones (1)

- Mejoramos la cota para el tamaño máximo de *cuadrangulaciones irreducibles*. La antigua cota era $q(S) \leq 186\gamma(S) - 64$ y nuestra nueva cota es

$$\boxed{q(S) \leq 159.5\gamma(S) - 46}$$

  Disminuimos la cota para $q(S)$ en un 14%.

- Tenemos una definición alternativa de cuadrangulación. La misma cota es verdadera y estamos estudiando la correspondencia entre las cuadrangulaciones irreducibles de superficies de bajos géneros.

Conclusiones (2)

- También mejoramos la cota para el tamaño máximo de *triangulaciones irreducibles*. La antigua cota era $|V(G)| \leq 171\gamma(S) - 72$ y nuestra nueva cota es

$$\boxed{|V(G)| \leq 106.5\gamma(S) - 33}$$

Disminuimos la cota en un 37%.

¡GRACIAS!

Cuadrangulaciones Irreducibles de Superficies

Gloria Aguilar Cruz

ITA - CINVESTAV

ac.gloria@gmail.com

Francisco J. Zaragoza Martínez

UAM - Azcapotzalco

franz@correo.azc.uam.mx