El teorema de los cuatro colores

Francisco Javier Zaragoza Martínez

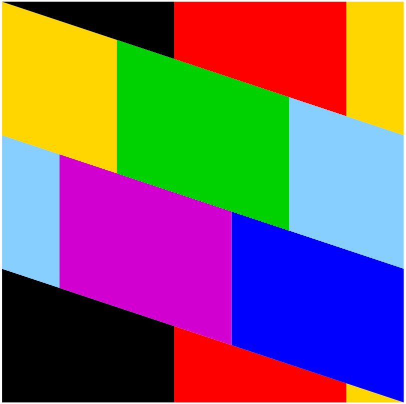
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
Departamento de Sistemas

Festival Alan Turing, 7 de febrero de 2012

Teorema de los cuatro colores

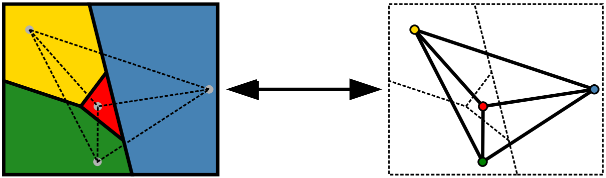
Todo mapa plano dividido en regiones conexas se puede colorear con cuatro colores.

¿Qué pasa si el mapa no es plano?



- En la banda de Möbius se requieren seis colores.
- En el toro se requieren siete colores.
- En la tierra y luna de nueve a doce colores.

Mapas planos y gráficas planas



Si en cada región escogemos un vértice y unimos las regiones vecinas obtenemos una gráfica plana.

Gráficas planas

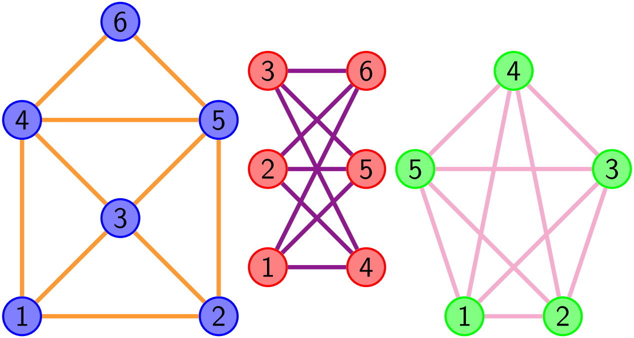
Gráfica aplanable: Una gráfica se dice encajable en el plano o aplanable si se puede dibujar en el plano con sus vértices como puntos distintos y sus aristas como curvas continuas que sólo se intersectan en sus vértices.

Gráfica plana: Una gráfica plana es el encaje de una gráfica en el plano.

Teorema de Kuratowski (1930): Una gráfica es aplanable si y sólo si no contiene una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Gráficas aplanables y no aplanables



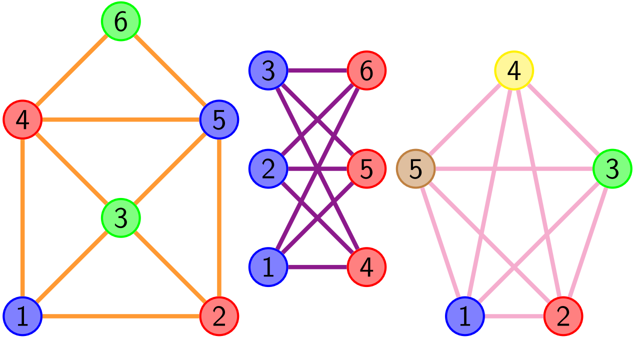
Coloración por vértices

Coloración Una coloración del conjunto de vértices V de una gráfica con n colores es una función $f : V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $f(u) \neq f(v)$ cada vez que los vértices u y v son vecinos.

Número cromático El número cromático $\chi(G)$ de una gráfica G es el mínimo valor de n para el cual G tiene una coloración de sus vértices con n colores.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Coloraciones de gráficas



En términos de gráficas aplanables

Teorema de los cuatro colores

Toda gráfica aplanable se puede colorear con cuatro colores o menos.

Francis Guthrie

Propuso el problema en 1852 a De Morgan

Alfred Kempe

Propuso una primera demostración en 1879 pero. . .

Cadenas de Kempe.

. . . encontró un error en la demostración en 1890

Percy John Heawood

Teorema de los cinco colores.

Peter Guthrie Tait

Propuso una segunda demostración en 1880 pero. . .

Coloraciones de Tait.

. . . encontró un error en la demostración en 1891

Julius Petersen

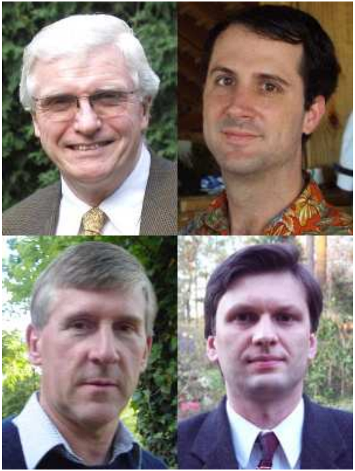
Snarks.

Kenneth Appel y Wolfgang Haken

Finalmente una demostración en 1976

Otras dos demostraciones en 1996 y 2001

Robertson, Sanders, Seymour y Thomas



Computadoras en las demostraciones

1. Heensch y Durre diseñaron una estrategia algorítmica que nunca pudieron aplicar por falta de recursos computacionales (1960-1970).
2. Appel y Haken lograron culminar las mismas ideas con un programa que revisó 1936 casos usando 487 reglas en 1200 horas.
3. Robertson, Sanders, Seymour y Thomas simplificaron estas ideas y su programa revisó 633 casos usando 32 reglas en pocas horas.
4. Gonthier verificó con ayuda de programas tanto el código (en 2000) como la especificación (en 2005).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Teoremas equivalentes

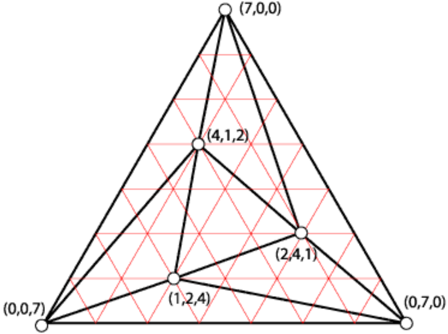
1. Toda gráfica aplanable se puede colorear con cuatro colores o menos.
2. Toda gráfica aplanable, simple, cúbica y sin aristas de corte tiene una tricoloración de sus aristas (Tait).
3. Sea i, j, k la base usual de vectores unitarios en R^3. Si se dan dos parentizaciones distintas del producto $v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_k$ entonces existe una asignación de i, j, k a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que las dos parentizaciones son iguales y distintas a cero (Kauffman).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Encajes rectilíneos

Teorema de Schnyder (1990)

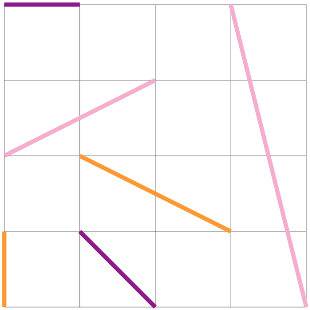
Toda gráfica aplanable con n vértices admite un encaje donde todas las aristas son segmentos con vértices de coordenadas enteras en un cuadrado de lado n.



Segmentos primitivos

Segmento primitivo

Sean $p = (a, b)$ y $q = (c, d)$ dos puntos de coordenadas enteras. Entonces el segmento pq es primitivo si no contiene ningún otro punto de coordenadas enteras. Equivalentemente, si $\text{mcd}(a - c, b - d) = 1$.

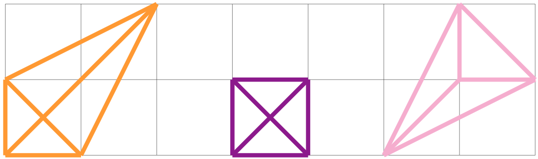


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Dibujos y encajes primitivos

Dibujo primitivo Un dibujo de una gráfica se dice primitivo si todas sus aristas son segmentos primitivos.

Encaje primitivo Un encaje de una gráfica aplanable se dice primitivo si todas sus aristas son segmentos primitivos.



Dibujos primitivos

Teorema (Flores, 2009)

Una gráfica G admite un dibujo primitivo si y sólo si $\chi(G) \leq 4$.

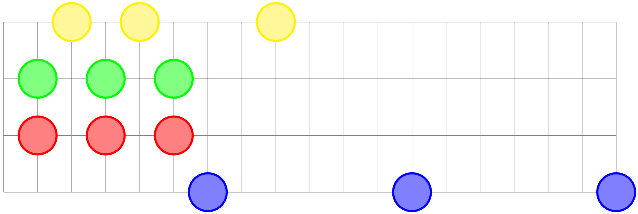
Bosquejo de la demostración

($\Rightarrow$) Suponga que G admite un dibujo primitivo. Considere la coloración de los vértices de G dada por $f(a,b) = (a \mod 2, b \mod 2)$. Suponga que los extremos de la arista pq (con $p = (a,b)$ y $q = (c,d)$) reciben el mismo color. Entonces $a+c$ y $b+d$ son pares, por lo que el punto medio de pq $r = (\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$ tiene coordenadas enteras, lo cual es una contradicción (Kára, Pór y Wood, 2005).

Construcción de dibujos primitivos

Bosquejo de la demostración

($\Leftarrow$) La gráfica $K_{n,n,n,n}$ se puede dibujar de forma primitiva con conjuntos de vértices dados por $P_0 = \{(6i, 0) : i \in [n]\}$, $P_1 = \{(2i-1, 1) : i \in [n]\}$, $P_2 = \{(2i-1, 2) : i \in [n]\}$ y $P_3 = \{(a_i, 3) : i \in [n]\}$, donde $\{a_1, ..., a_n\}$ es el conjunto de los primeros n pares que no son divisibles entre 3.



Encajes primitivos

Recapitulando

1. Si G tiene un dibujo primitivo entonces $\chi(G) \leq 4$.
2. Todo encaje primitivo es un dibujo primitivo.

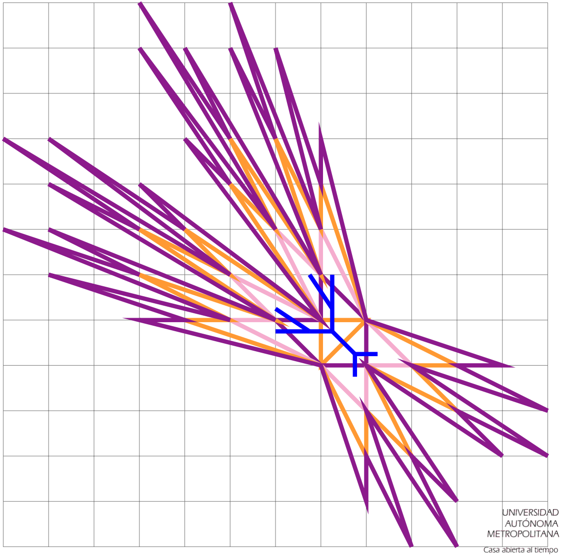
Corolario Si G tiene un encaje primitivo entonces $\chi(G) \leq 4$.

Conjetura Toda gráfica aplanable con n vértices admite un encaje primitivo [con vértices en un cuadrado de lado n].

¿Qué sabíamos?

1. Cierto para árboles y para gráficas planares exteriores (Aguilar, 2010).
2. Cierto para gráficas planas con 13 vértices o menos.

Gráficas planares exteriores



Triangulaciones pequeñas

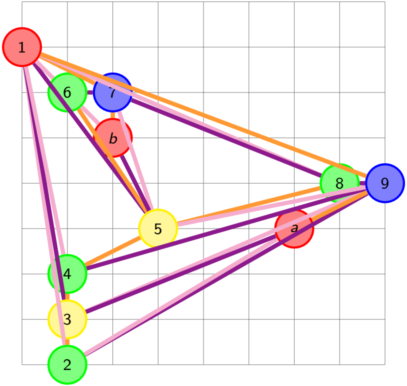
Encajes pequeños (Pérez, 2011)

Toda triangulación con $n \leq 13$ vértices tiene un encaje primitivo en un cuadrado de lado n. Se hizo con tres implementaciones de algoritmos distintos.

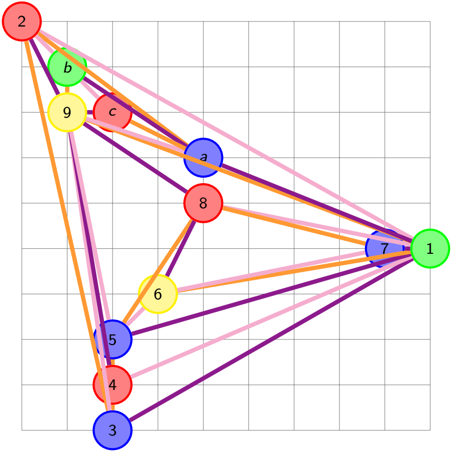
1. Tiempos de ejecución de la primera versión: 8 segundos para $n = 7$ (5 gráficas), 6 minutos para $n = 8$ (14 gráficas), 2 horas para $n = 9$ (50 gráficas), 3 días para $n = 10$ (233 gráficas).
2. Tiempos de ejecución de la versión actual: 22 segundos para $n = 10$ (233 gráficas), 17 minutos para $n = 11$ (1249 gráficas), 21 horas para $n = 12$ (7595 gráficas).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

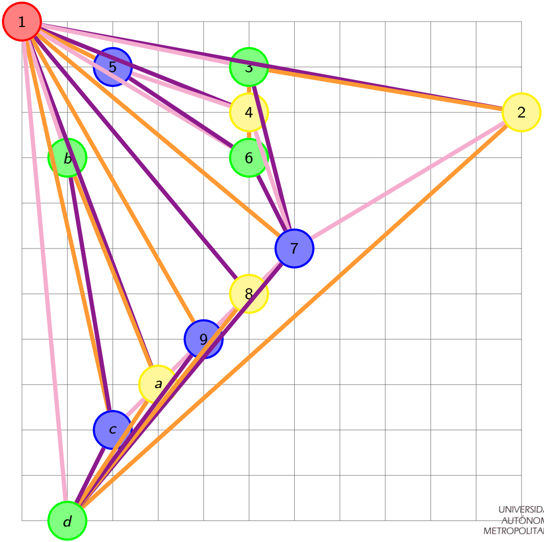
1249 triangulaciones con 11 vértices



7595 triangulaciones con 12 vértices



49566 triangulaciones con 13 vértices



El último resultado

En enero de 2012, junto con Francisco Santos y David Flores, demostramos la primera parte de la conjetura:

Teorema

Toda gráfica aplanable con n vértices tiene un encaje primitivo en un rectángulo de $O(m) \times O(m2^m)$ con $m \in O(n^2)$.

Herramientas

1. Teorema de los cuatro colores.
2. Teorema de Schnyder.
3. Teorema de los números primos: $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$.

Trabajo a futuro

Árboles Se sabe que caben en $O(n)$ y que necesitan al menos $\Omega(\sqrt{n})$. ¿Cabrán en $O(n^c)$ para alguna $\frac{1}{2} \leq c < 1$?

Planares exteriores Se sabe que caben en $O(2^n)$ y que necesitan al menos $\Omega(\sqrt{n})$. ¿Cabrán en $O(n^c)$ para alguna $\frac{1}{2} \leq c$? ¿De forma convexa en $O(n^c)$ para alguna $\frac{3}{2} \leq c$?

Aplanables ¿Cabrán en $O(n^c)$ para alguna $1 \leq c$?

Algoritmos ¿Se podrán encontrar en tiempo polinomial?

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Esto es todo

¡Gracias!