

# Taller de análisis y diseño de algoritmos

## Algoritmos para problemas combinatorios

Francisco Javier Zaragoza Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco  
Departamento de Sistemas



Trimestre 2021 Invierno

# Contenido

Basado en *Principles and Techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong and Koh Khee-Meng. World Scientific Publishing. 1992.*

## Permutaciones y combinaciones

Coeficientes binomiales

Otros principios importantes

## Los principios básicos de conteo

En un problema de **conteo**, se desea saber la cardinalidad de algún conjunto finito  $A$  cuyos elementos están dados por alguna regla. Más allá de enumerar todos los elementos de  $A$ , hay algunos principios básicos que nos ayudarán a determinar  $|A|$ .

### Principio de la suma

Si los elementos de  $A$  se pueden distribuir en dos conjuntos **disjuntos**  $A_1$  y  $A_2$ , entonces  $|A| = |A_1| + |A_2|$ . De la misma manera, si los elementos de  $A$  se pueden distribuir en  $k \geq 2$  conjuntos disjuntos  $A_1, \dots, A_k$ , entonces  $|A| = \sum_{i=1}^k |A_i|$ .

### Principio del producto

Si los elementos de  $A$  son todas las parejas  $(a_1, a_2)$  con  $a_1 \in A_1$  y  $a_2 \in A_2$ , entonces  $|A| = |A_1| \times |A_2|$ . De la misma manera, si los elementos de  $A$  son todas las secuencias  $(a_1, \dots, a_k)$  de  $k \geq 2$  elementos con  $a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k$ , entonces  $|A| = \prod_{i=1}^k |A_i|$ .

# Principio del producto

## Secuencias $k$ -arias

Una **secuencia**  $a_1, \dots, a_n$  de  $n$  números es  **$k$ -aria** si  $a_i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$  para cada  $1 \leq i \leq n$ . Con frecuencia, las secuencias se escriben  $(a_1, \dots, a_n)$  y a  $n$  se le llama la **longitud** de la secuencia.

Si  $k = 2$  se dice que la secuencia es **binaria**, si  $k = 3$  se dice **ternaria** y si  $k = 4$  se dice **cuaternaria**. Por ejemplo, el conjunto de todas las secuencias binarias de longitud 3 es  $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ .

### Teorema

*Existen  $k^n$  secuencias  $k$ -arias de longitud  $n$ .*

## Principio del producto

### Cantidad de divisores

#### Ejemplo (Divisores positivos de 600)

Notemos que 600 tiene una única factorización en primos  $2^3 3^1 5^2$ . Cualquier divisor de 600 deberá ser de la forma  $2^a 3^b 5^c$  con  $0 \leq a \leq 3$ ,  $0 \leq b \leq 1$  y  $0 \leq c \leq 2$ .

#### Teorema

Si la factorización única en primos de  $n$  es  $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ , donde los  $p_i$  son primos distintos y los  $k_i$  son enteros positivos, entonces  $n$  tiene  $\prod_{i=1}^r (k_i + 1)$  divisores positivos.

# Principio del producto

## Permutaciones

Sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto de  $n$  elementos distintos. Para  $0 \leq r \leq n$ , una  $r$ -permutación de  $A$  es una forma de acomodar cualesquiera  $r$  elementos de  $A$  en una línea. Si  $r = n$ , una  $r$ -permutación se llama simplemente una permutación.

### Ejemplo (3-permutaciones de $\{a, b, c, d\}$ )

Son 24 en total:  $abc, acb, bac, bca, cab, cba, abd, adb, bad, bda, dab, dba, acd, adc, cad, cda, dac, dca, bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb$ .

### Teorema

Existen  $P_r^n = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$   $r$ -permutaciones de un conjunto con  $n$  elementos. Existen  $P_n^n = n!$  permutaciones de un conjunto con  $n$  elementos.

# Principio del producto

## Permutaciones circulares

Sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto de  $n$  elementos distintos. Una  $r$ -permutación circular de  $A$  es una forma de acomodar cualesquiera  $r$  elementos de  $A$  en un círculo. Si  $r = n$ , una  $r$ -permutación circular se llama simplemente una **permutación circular**.

### Ejemplo (3-permutaciones circulares de $\{a, b, c, d\}$ )

Son 8 en total:  $abc, acb, abd, adb, acd, adc, bcd, bdc$ .

### Teorema

Existen  $Q_r^n = \frac{P_r^n}{r} = \frac{n!}{r \cdot (n-r)!}$   $r$ -permutaciones circulares de un conjunto con  $n$  elementos.

Existen  $Q_n^n = \frac{P_n^n}{n} = (n-1)!$  permutaciones circulares de un conjunto con  $n$  elementos.

# Principio del producto

## Combinaciones

Sea  $A$  un conjunto de  $n$  elementos distintos. Una **combinación** de  $A$  es simplemente un subconjunto de  $A$ . Una  **$r$ -combinación** de  $A$  es un subconjunto de  $A$  con  $r$  elementos.

### Ejemplo (3-combinaciones de $\{a, b, c, d\}$ )

Son 4:  $\{a, b, c\}$ ,  $\{a, b, d\}$ ,  $\{a, c, d\}$  y  $\{b, c, d\}$ .

Como una  $r$ -permutación de  $A$  se puede obtener al reacomodar de cualquier forma los  $r$  elementos de una  $r$ -combinación de  $A$ , se tiene el siguiente resultado.

### Teorema

Existen  $C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$   $r$ -combinaciones de un conjunto con  $n$  elementos.

Con frecuencia se escribe  $C_r^n$  también como  $\binom{n}{r}$ .



## Principio del producto

### Emparejamientos

Sea  $A$  un conjunto de  $2n$  elementos distintos. Un **emparejamiento** de  $A$  es una partición de los elementos de  $A$  en  $n$  parejas de elementos.

#### Ejemplo (Emparejamientos de $\{a, b, c, d\}$ )

Son 3:  $a$  con  $b$  y  $c$  con  $d$ ,  $a$  con  $c$  y  $b$  con  $d$ ,  $a$  con  $d$  y  $b$  con  $c$ .

Si  $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$ , sus emparejamientos se pueden construir repitiendo  $n$  veces: toma el elemento no emparejado más pequeño y emparejalo con cualquiera de los sobrantes.

#### Teorema

Hay  $(2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdots 3 \cdot 1 = \frac{(2n)!}{n!2^n}$  emparejamientos de un conjunto con  $2n$  elementos.

## Otros dos principios básicos de conteo

En un problema de **conteo**, se desea saber la cardinalidad de algún conjunto finito  $A$  cuyos elementos están dados por alguna regla. A veces podemos saber esto exhibiendo otro conjunto  $B$  que tiene la misma cardinalidad. Otras ocasiones es suficiente saber que  $A$  no tiene más elementos que  $B$ .

### Principio de la biyección

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos finitos. Si existe una **biyección** de  $A$  a  $B$ , entonces  $|A| = |B|$ .

### Principio de la inyección

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos finitos. Si existe una **inyección** de  $A$  a  $B$ , entonces  $|A| \leq |B|$ .

## Otros dos principios básicos de conteo

### Principio de la biyección

#### Ejemplo (Caminos en una rejilla)

En una rejilla de ancho  $a$  y altura  $b$ , la cantidad de caminos que hay de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha (siguiendo la rejilla hacia la derecha o hacia arriba) es igual a la cantidad de secuencias de  $a + b$  ceros y unos con  $a$  ceros y  $b$  unos.

#### Ejemplo (Conjunto potencia)

La cantidad de subconjuntos de un conjunto  $A$  con  $n$  elementos es igual a la cantidad de secuencias de  $n$  ceros y unos.

#### Ejemplo (Secuencias sin consecutivos)

La cantidad de  $r$ -combinaciones de  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  sin elementos consecutivos es igual a la cantidad de  $r$ -combinaciones de  $B = \{1, 2, \dots, n - r + 1\}$ .

# Bijecciones con los naturales

## Principio de la biyección

Si  $A$  es un conjunto de cardinalidad  $n$ , entonces evidentemente existen biyecciones de  $A$  con los naturales  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ . Si además  $A$  tiene algún orden razonable, entonces esa biyección se puede calcular. En otras palabras, dado  $a \in A$  se debe poder encontrar algorítmicamente un único  $f(a) \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$  y viceversa.

Vamos a suponer que  $A$  se construye con el principio de la suma, es decir, que se puede partir en casos disjuntos por una decisión. Además, vamos a suponer que  $A$  se ordena lexicográficamente por esa decisión. Si hay  $d$  decisiones posibles, entonces  $A$  se puede partir en  $d$  conjuntos disjuntos  $A_0, \dots, A_{d-1}$  de modo que  $|A| = |A_0| + \dots + |A_{d-1}|$ .

Si  $a \in A_i$ , entonces antes de  $a$  hay al menos  $|A_0| + \dots + |A_{i-1}|$  y basta averiguar (recursivamente) en qué orden está  $a \in A_j$ . Este proceso se simplifica mucho cuando  $|A_0| = \dots = |A_{d-1}|$ , pues en este caso  $a \in A_i$  si y sólo si  $\left\lfloor \frac{f(a)}{|A_0|} \right\rfloor = i$ .

# Bijecciones con los naturales

## Cadenas binarias en orden lexicográfico

Sea  $A_k$  el conjunto de todas las cadenas de  $k$  bits. Observa que  $|A_k| = 2^k$ , por lo que se debe poder dar alguna biyección de  $A_k$  con  $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ . Supongamos que  $A_k$  está en orden lexicográfico (para  $k = 3$  se tiene  $A_3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ ). Observa que cada elemento de  $A_k$  se obtiene de elegir un 0 o un 1 al principio, etc.

- 1** ¿Qué orden  $f(101)$  le toca a 101? Como comienza con 1, va después de los  $2^2$  que empiezan con 0. Como sigue con 0, va con el grupo de los que siguen con 0. Como termina con 1, va después del  $2^0$  que termina con 0. Sumando los resultados  $2^2 + 0 + 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5$ , obtenemos que  $f(101) = 5$ .
- 2** ¿Qué elemento  $a \in A_3$  cumple  $f(a) = 3$ ? Como  $f(a) < 2^2$ , entonces  $a$  debe comenzar con 0. Como  $f(a) - 0 \geq 2^1$ , entonces  $a$  debe seguir con un 1. Como  $f(a) - (0 + 2^1) \geq 2^0$ , entonces  $a$  debe terminar con un 1. Es decir,  $a = 011$ .

Nota que cada decisión es el resultado de una división entre una potencia de 2.

# Bijecciones con los naturales

## Permutaciones en orden lexicográfico

Sea  $A_k$  el conjunto de las permutaciones de  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ . Observa que  $|A_k| = k!$ , por lo que se debe poder dar alguna biyección de  $A_k$  con  $\{0, 1, \dots, k! - 1\}$ . Supón que  $A_k$  está en orden lexicográfico (para  $k = 4$  se tiene  $A_4 = \{0123, 0132, 0213, \dots, 3210\}$ ).

Observa que cada elemento de  $A_k$  se obtiene de elegir 0, 1, 2 o 3 al principio, etc.

- 1** ¿Qué orden  $f(2301)$  le toca a 2301? Comienza con 2: va después de los  $2 \times 3!$  que comienzan con 0 o 1. Sigue con 3: va después de los  $2 \times 2!$  que siguen con 0 o 1. Sigue con 0: va con el grupo de los que siguen con 0. Termina con 1: va con el grupo de los que terminan con 1. Sumando  $f(2301) = 2 \times 3! + 2 \times 2! + 0 + 0 = 16$ .
- 2** ¿Qué elemento  $a \in A_4$  cumple  $f(a) = 20$ ? Como  $f(a) \geq 3 \times 3!$ , entonces  $a$  debe comenzar con 3. Como  $f(a) - (3 \times 3!) \geq 1 \times 2!$ , entonces  $a$  debe seguir con 1. Como  $f(a) - (3 \times 3! + 1 \times 2!) < 1!$ , entonces  $a$  debe seguir con 0. Como  $f(a) - (3 \times 3! + 1 \times 2! + 0) < 0!$ , entonces  $a$  debe terminar con 2. Así,  $a = 3102$ .

Nota que cada decisión es el resultado de una división entre un factorial.

## Principio del producto

### Permutaciones con repeticiones

Sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto de  $n$  elementos distintos. Para  $0 \leq r \leq n$ , una  $r$ -permutación con repeticiones de  $A$  es una forma de acomodar cualesquiera  $r$  elementos de  $A$ , no necesariamente distintos, en una línea.

#### Ejemplo (2-permutaciones de $\{a, b, c\}$ )

Son 9 en total:  $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$ .

#### Teorema

*Existen  $n^r$   $r$ -permutaciones con repeticiones de un conjunto con  $n$  elementos.*

## Principio del producto

### Permutaciones con repeticiones limitadas

Sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto de  $n$  elementos distintos. Suponga que se tienen  $r_1$  objetos de tipo  $a_1$ ,  $r_2$  objetos de tipo  $a_2$ , ...,  $r_n$  objetos de tipo  $a_n$ . ¿Cuántas permutaciones distintas existen de estos objetos?

#### Ejemplo (Permutaciones de $a, a, b, c$ )

Son 12 en total:  $aabc, aacb, abac, abca, acab, acba, baac, baca, bcaa, caab, caba, cbaa$ .

#### Teorema

Existen  $\frac{(r_1+r_2+\dots+r_n)!}{r_1!r_2!\dots r_n!}$  permutaciones distintas.

Un caso especial que ya encontramos antes es cuando  $n = 2$ . ¿Cuál?

## Tamaño de las cuentas

Nota que  $12!$  es el factorial más grande que cabe en un `int`, mientras que  $20!$  es el factorial más grande que cabe en un `long long`. En otras palabras, no es buena idea depender de que se pueden calcular para trabajar con ellos.

En muchos problemas de conteo, el enunciado dirá algo como *calcule la respuesta módulo algún entero  $M$* . Aquí vale la pena recordar que si la respuesta se calcula con sumas y productos, entonces es suficiente calcular las respuestas intermedias módulo  $M$  (en lugar de  $a=b+c$  calcula  $a=(b+c) \% M$  y en lugar de  $a=b*c$  calcula  $a=(b*c) \% M$ ). Si  $M = 2^{32}$  o  $M = 2^{64}$ , ocurrirá automáticamente si usas los tipos `unsigned int` o `unsigned long long`.

En algunos otros problemas  $M$  será un número primo. Esto generalmente indica que la cuenta implica alguna división como  $a=b/c$ . En este caso lo que se debe hacer es calcular el inverso  $d$  de  $c$  módulo  $M$  y entonces  $a=(b*d) \% M$ .

# Contenido

Basado en *Principles and Techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong and Koh Khee-Meng. World Scientific Publishing. 1992.*

Permutaciones y combinaciones

**Coefficientes binomiales**

Otros principios importantes

# Coefficientes binomiales

## Identidades básicas

Hemos definido  $C_r^n = \binom{n}{r}$  como la cantidad de subconjuntos de  $r$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos. Definiremos adicionalmente que  $C_r^n = 0$  si  $r > n$  o si  $r < 0$ .

### Teorema

- 1  $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ .
- 2  $\binom{n}{r} = \frac{n}{r} \binom{n-1}{r-1}$  si  $r \geq 1$ .
- 3  $\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r} \binom{n}{r-1}$  si  $r \geq 1$ .
- 4  $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ .
- 5  $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$ .

## Coefficientes binomiales

La razón por la cual los números  $C_r^n$  se llaman **coeficientes binomiales** es porque aparecen en la expansión de la expresión binomial  $(x + y)^n$ .

### Teorema (del binomio de Newton)

Para cualquier entero  $n \geq 0$  se cumple que

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r.$$

Una prueba de esto es que el coeficiente de  $x^{n-r} y^r$  se obtiene de contar de cuántas formas se puede elegir  $n - r$  veces  $x$  y  $r$  veces  $y$  al multiplicar los  $n$  factores de  $(x + y)^n$ .

# Coefficientes binomiales

## Aplicaciones

Con  $x = y = 1$  se obtiene  $2^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}$ .

Con  $x = 1, y = -1$  se obtiene  $0 = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r}$ . Es decir  $\sum_r \text{par} \binom{n}{r} = \sum_r \text{impar} \binom{n}{r}$ .

Con  $x = 1$  se obtiene  $(1 + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} y^r$ . Derivando con respecto a  $y$  se obtiene  $n(1 + y)^{n-1} = \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} y^{r-1}$ . Con  $y = 1$  se obtiene  $n2^{n-1} = \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r}$ .

De manera similar  $n(n + 1)2^{n-2} = \sum_{r=1}^n r^2 \binom{n}{r}$  y  $n^2(n + 3)2^{n-3} = \sum_{r=1}^n r^3 \binom{n}{r}$ .

# Coefficientes binomiales

## Aplicaciones

Expandiendo las expresiones  $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$  y obteniendo el coeficiente de  $x^r$  en ambos lados, se obtiene:

### Teorema (Identidad de Vandermonde)

$$\binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}.$$

Un caso especial es cuando  $m = n = r$  en el que se obtiene

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

# Coefficientes binomiales

## Sumas diagonales

No es difícil convencerse de que las siguientes dos identidades se cumplen. Para la primera basta notar que  $\binom{r}{r} = \binom{r+1}{r+1}$  y para la segunda basta notar que  $\binom{r}{0} = \binom{r+1}{0}$ .

### Teorema

$$\mathbf{1} \quad \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} \text{ si } n \geq r.$$

$$\mathbf{2} \quad \binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \cdots + \binom{r+n}{n} = \binom{r+n+1}{n}.$$

Cuando estos coeficientes binomiales se dibujan sobre el triángulo de Pascal, uno puede tal vez imaginarse porqué a veces se les llaman las identidades del [palo de hockey](#).

# Coefficientes binomiales

## Los números de Catalan

El matemático belga Eugene Charles Catalan se hizo la siguiente pregunta: ¿De cuántas formas distintas se pueden poner  $n$  parejas de paréntesis en el producto  $x_1x_2 \cdots x_{n+1}$ ? No se permite poner paréntesis vacíos  $()$  ni tampoco paréntesis innecesarios  $((z))$ .

### Ejemplo

Para  $n = 0$  sólo hay una forma  $x_1$ . Para  $n = 1$  sólo hay una forma  $(x_1x_2)$ . Para  $n = 2$  hay dos formas distintas  $((x_1x_2)x_3)$  y  $(x_1(x_2x_3))$ . Para  $n = 3$  hay cinco formas distintas  $((((x_1x_2)x_3)x_4)$ ,  $((x_1(x_2x_3))x_4)$ ,  $((x_1x_2)(x_3x_4))$ ,  $(x_1((x_2x_3)x_4))$  y  $(x_1(x_2(x_3x_4)))$ .

Las respuestas 1, 1, 2, 5, 14, 42, ... son los llamados **números de Catalan**  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

# Contenido

Basado en *Principles and Techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong and Koh Khee-Meng. World Scientific Publishing. 1992.*

Permutaciones y combinaciones

Coefficientes binomiales

Otros principios importantes

# El principio de las casillas

## Y una variante

Si uno tiene  $n$  cajas y desea guardar  $n + 1$  objetos en esas cajas, entonces forzosamente alguna de las cajas deberá contener más de un objeto. De una forma más general.

### Teorema (Principio de las casillas)

*Sean  $k$  y  $n$  dos enteros positivos. Si se distribuyen  $nk + 1$  objetos en  $n$  casillas, entonces alguna casilla contendrá al menos  $k + 1$  objetos.*

También se le llama [principio de la pichonera](#) o [principio de Dirichlet](#).

### Teorema (Variante)

*Sean  $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 1$  con  $m = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ . Si se distribuyen  $m + 1$  objetos en  $n$  casillas numeradas del 1 al  $n$ , entonces alguna casilla  $i$  contendrá al menos  $k_i + 1$  objetos.*

## El principio de inclusión y exclusión

El principio de la suma básicamente dice que si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos finitos **disjuntos** ( $A \cap B = \emptyset$ ), entonces  $|A \cup B| = |A| + |B|$ . Si  $A$  y  $B$  no son disjuntos, entonces  $|A| + |B|$  cuenta dos veces los elementos de  $A \cap B$ , por lo tanto  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .

### Teorema (Principio de inclusión y exclusión)

Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos finitos. Entonces  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$  es igual a

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|,$$

donde todos los índices de las sumatorias están en intervalo de 1 a  $n$ .

## Encuentros y desencuentros

¿De cuántas formas  $D_n$  se pueden colocar  $n$  cartas numeradas del 1 al  $n$  en  $n$  posiciones numeradas del 1 al  $n$  de modo que ninguna carta  $i$  se encuentre en la posición  $i$ ? A esto se le llama una **permutación sin puntos fijos** o un **desencuentro** (*derangement* en inglés).

### Ejemplo

Para  $n = 1$  no hay forma. Para  $n = 2$  hay una forma  $(2, 1)$ . Para  $n = 3$  hay dos formas  $(2, 3, 1)$  y  $(3, 1, 2)$ . Para  $n = 4$  hay nueve formas.

### Teorema (Cantidad de desencuentros)

$$D_n = n! \left( \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \text{ Además } D_n \approx \frac{n!}{e} \approx 0.367n!$$

Se puede probar que  $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$  y que  $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ . También es posible usar esto para calcular cuántas permutaciones hay con  $k$  puntos fijos.

## Relaciones de recurrencia

### Ejemplos

Muchos problemas de conteo se pueden plantear de una forma más sencilla con una combinación de divide y vencerás y el principio de la suma.

#### Ejemplo (Cubrir rectángulos de $1 \times n$ )

¿De cuántas formas  $A_n$  se puede cubrir un rectángulo de  $1 \times n$  con rectángulos de  $1 \times 1$  y  $1 \times 2$ ? Nota que  $A_0 = A_1 = 1$ . Por otro lado, si  $n \geq 2$ , entonces se puede comenzar con un rectángulo de  $1 \times 1$  o con un rectángulo de  $1 \times 2$ . Por lo tanto  $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ .

#### Ejemplo (Números de Catalan)

Si pensamos que el último producto que se lleva a cabo es  $(x_1 \cdots x_i) \times (x_{i+1} \cdots x_{n+1})$ , entonces obtenemos que  $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0$ .

Las identidades que se obtienen así se llaman **relaciones de recurrencia**. Es fácil (pero lento) calcular estos valores usando recursión o programación dinámica directamente.

## Relaciones de recurrencia homogéneas

### Solución

Una relación de recurrencia **lineal** de la forma  $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \dots + c_r a_{n-r} = 0$  se llama **homogénea** y le corresponde el **polinomio característico**  $c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \dots + c_r$ . Lo siguiente tal vez te sonará familiar de tu curso de ecuaciones diferenciales.

### Teorema

Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  son las  $r$  raíces **distintas** del polinomio característico, entonces la solución es  $a_n = A_1 \alpha_1^n + \dots + A_r \alpha_r^n$ , con  $A_1, \dots, A_r$  constantes que dependen de los valores iniciales.

### Ejemplo

Si  $a_0 = a_1 = 1$  y  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , entonces el polinomio característico es  $x^2 - x - 1$ , sus raíces son  $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Los valores de  $A_1$  y  $A_2$  se obtienen de resolver el sistema lineal  $A_1 + A_2 = a_0$  y  $A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = a_1$ .

# Relaciones de recurrencia homogéneas

## Sistemas de relaciones

En ocasiones nos aparece no una, sino varias relaciones de recurrencia que nos llevan a la solución de un problema. Con frecuencia podremos despejar y sustituir.

### Ejemplo (Ranas brincando en un octágono)

Considere un octágono  $ABCDEFGH$ . Una rana comienza en  $A$ . Desde cualquier vértice (excepto  $E$ ) puede saltar a cualquiera de los dos vértices adyacentes. Cuando llega a  $E$  se detiene. ¿De cuántas formas distintas  $a_n$  puede llegar la rana de  $A$  a  $E$  en  $n$  saltos?

Obviamente  $a_n = 0$  si  $n$  es impar. Sea  $b_k = a_{2k}$  y sea  $c_k$  la cantidad de formas distintas en las que la rana puede llegar de  $C$  a  $E$  en  $2k$  saltos. Nota que  $b_k = 2(b_{k-1} + c_{k-1})$  y que  $c_k = 2c_{k-1} + b_{k-1}$  (piensa en los primeros dos saltos de la rana). Despejando  $c_{k-1} = \frac{1}{2}b_k - b_{k-1}$  y sustituyendo  $[\frac{1}{2}b_{k+1} - b_k] = 2[\frac{1}{2}b_k - b_{k-1}] + b_{k-1}$ , es decir,  $b_{k+1} - 4b_k + 2b_{k-1} = 0$ . El polinomio característico es  $x^2 - 4x + 2$  con raíces  $\alpha_1 = 2 + \sqrt{2}$  y  $\alpha_2 = 2 - \sqrt{2}$ , de lo que fácilmente se obtiene  $a_{2n} = b_n$ .

# Relaciones de recurrencia

## Números de Fibonacci

La relación  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  para  $n \geq 2$  define a los **números de Fibonacci**. Estos aparecen frecuentemente como solución de problemas.

### Teorema (Propiedades de los números de Fibonacci)

- 1  $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1.$
- 2  $\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n}.$
- 3  $\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$
- 4  $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}.$
- 5  $F_{m+n-1} = F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1}.$
- 6  $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n.$
- 7  $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2.$
- 8  $F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_n(F_n + 2F_{n-1}).$

## Relaciones de recurrencia

### Números de Catalan

Los números de Catalan  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  también aparecen con frecuencia.

**Palabras de Dyck** Hay  $C_n$  cadenas binarias con  $n$  ceros y  $n$  unos tales que ningún prefijo tiene más unos que ceros.

**Paréntesis** Hay  $C_n$  formas de aparear  $n$  parejas de paréntesis que abren y cierran.

**Árboles binarios** Hay  $C_n$  árboles binarios enraizados con  $n + 1$  hojas.

**Árboles planos** Hay  $C_n$  árboles planos con  $n + 1$  vértices.

**Caminos** Hay  $C_n$  caminos de  $(0, 0)$  a  $(n, n)$  que siguen la rejilla entera hacia arriba o la derecha y no cruzan la recta  $x = y$ .

**Triangulaciones** Hay  $C_n$  triangulaciones de un polígono convexo con  $n + 2$  vértices.