

FUERZA Y EQUILIBRIO

“Queda prohibida la reproducción total o parcial de la presente obra sin expreso consentimiento del editor”

Fuerza y Equilibrio

© 2003, Luz María García Cruz, Tomás David Navarrete González, José Ángel Rocha Martínez

D.R. © 2003 por Innovación Editorial Lagares de México, S.A. de C.V.

Av. Lomas Verdes No. 480 – 202 A

Fracc. Lomas Verdes

Naucalpan, Estado de México

C.P. 53120

Teléfono: (55) 5240-1295 al 98

email: editor@lagares.com.mx

ISBN: 968-5785-25-2

IMPRESO EN MÉXICO

Luz María García Cruz
Tomás David Navarrete González
José Ángel Rocha Martínez

Indice

Presentación	VII
Introducción al Curso de Fuerza y Equilibrio	IX
Primera Parte	1
Unidad I. Leyes de Newton	3
1. Conceptos Fundamentales	5
2. Primera Ley de Newton	7
3. Segunda Ley de Newton	8
4. Tercera Ley de Newton	9
Unidad II. Equilibrio de Cuerpo Puntual	13
1. Condiciones de Equilibrio para un Cuerpo Puntual	15
2. Planteamiento y Solución del Problema sobre el Equilibrio del Cuerpo Puntual	15
3. Tipos de Fuerzas que se Ejercen entre Sí los Cuerpos	16
4. Nomenclatura Normalizada	23
Problemario Primera Parte	25
Segunda Parte	67
Unidad III. Equilibrio de Cuerpo Rígido	69
1. Definición de Cuerpo Rígido	71
2. Condiciones de Equilibrio para un Cuerpo Rígido	76
3. Centro de Gravedad	77
4. Apoyos Simples y Articulados	77
Unidad IV. Fuerza Elástica	81
1. Cuerpos Deformables y Tipos de Deformación	83
2. Deformaciones Elásticas en Una Dirección	87
3. Deformaciones Elásticas en Dos Direcciones	89
Problemario Segunda Parte	93

Tercera Parte	139
Unidad V. Fuerza y Campo Gravitacionales	141
1. Ley de la Gravitación Universal	143
2. Principio de Superposición	145
3. Campo Gravitacional	146
Unidad VI. Fuerza y Campo Eléctricos	151
1. Ley de Coulomb	153
2. Principio de Superposición	155
3. Campo Eléctrico	156
Unidad VII. Fuerza y Campo Magnéticos	161
1. Campo Magnético	163
2. Fuerza que un Campo Magnético ejerce sobre un conductor en el que circula una corriente eléctrica	165
3. Ley de Ampere. Campo Magnético producido por un conductor rectilíneo en el que circula una corriente eléctrica	167
4. Fuerzas que se ejercen dos conductores rectilíneos y paralelos en los que circulan corrientes eléctricas	169
Problemario Tercera Parte	171
Bibliografía	219

PRESENTACION

De acuerdo con la experiencia acumulada en el trabajo docente (en un periodo mayor a veinticinco años), los autores reconocemos que la enseñanza y el aprendizaje de la Física básica en los alumnos de la División de C.B.I., la hemos realizado de manera poco eficiente. Algunos de los factores, que suponemos pueden ser causa de esa insatisfactoria situación, son:

- a) Los alumnos que ingresan a la División presentan deficiencias sobre conocimientos elementales en Matemáticas y Ciencias Naturales. Ante esta situación, en muchas ocasiones:
- b) Los profesores, aparte de reprocharlo expresa y públicamente, tomamos una actitud de indiferencia y responsabilizamos total y exclusivamente a los alumnos para que corrijan su deficiente situación. Con lo cual, uno de los efectos que con mayor frecuencia logramos es que:
- c) Los alumnos adoptan una actitud de desinterés, y en muchos casos de desprecio, por el estudio de las Ciencias Básicas.

De esta manera, nuestros alumnos de nuevo ingreso de pronto quedan atrapados en un círculo que en muy pocos casos logran romperlo de manera constructiva.

Es necesario pues, que desde el inicio hagamos un esfuerzo, tanto los profesores como los alumnos, con el ánimo de evitar esos deteriorantes procesos.

Con el presente texto de Fuerza y Equilibrio, por lo básico y fundamental de su contenido y por el tipo de ejercicios que se incluyen, se pretende lograr el interés y la confianza de los alumnos, con lo cual se simplificará el desarrollo del curso y se prevé la satisfacción de los profesores y de los alumnos, de lo contrario, seguiremos siendo testigos del abandono progresivo de los alumnos a lo largo del trimestre.

ATENTAMENTE:

Los autores:

Luz María García Cruz

Tomás David Navarrete González

José Ángel Rocha Martínez

INTRODUCCION AL CURSO DE FUERZA Y EQUILIBRIO

La unidad de enseñanza aprendizaje (U.E.A.) denominada fuerza y equilibrio, cuya clave asignada es 111136, se ubica como obligatoria en el tronco general de los planes de estudio de las nueve licenciaturas en ingeniería, que se imparten en la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco. Esta U.E.A. se imparte en el primer trimestre y es la inicial de un conjunto de U.E.A.s obligatorias de Física General, configurado por cuatro Teóricas y dos Laboratorios.

De acuerdo con la organización de la División, la evaluación del aprovechamiento de los alumnos se encuentra debidamente reglamentada. En términos de esa reglamentación se señala la posibilidad de que los alumnos acrediten la U.E.A con la aprobación de tres exámenes parciales.

Es por esto que los autores han elaborado los apuntes para la U.E.A. y lo presentan en tres partes que se corresponden con el contenido que se considera en cada uno de los tres exámenes parciales. El contenido de cada una de las tres partes incluye, de manera resumida, una exposición de los temas y conceptos correspondientes y la solución detallada de un conjunto suficiente de versiones (del orden de diez) del examen parcial, que se han aplicado en diversos trimestres.

Los autores desean que el presente material sea de utilidad, tanto para los alumnos de la U.E.A., como para los profesores que la imparten; con la garantía de que se apega fielmente al contenido y nivel que se describe en el programa oficial de la U.E.A., y con el convencimiento de que la mejor selección bibliográfica la determina cada profesor que imparte la U.E.A.

Finalmente, los autores manifestamos nuestro mas profundo agradecimiento por el honor de haber colaborado, aunque modestamente, con uno de los constructores de la Universidad Autónoma Metropolitana, como fue el Dr. Francisco Medina Nicolau (q.e.p.d.). Gracias.

Septiembre de 2003.

ATENTAMENTE:

Los autores

Luz María García Cruz

Tomás David Navarrete González

José Ángel Rocha Martínez

Primera Parte



UNIDAD I

LEYES DE NEWTON

Objetivos

Se pretende que los alumnos:

- a) Entiendan que el estudio del movimiento de los cuerpos tiene sentido, solamente, cuando se explicita la existencia de un observador.
- b) Asuman el papel de observadores.
- c) Conozcan y entiendan los fundamentos de la mecánica, en términos del enunciado de las tres leyes de Newton, en su formulación más simplificada.

Contenido

- 1. Conceptos Fundamentales.
- 2. Primera Ley de Newton.
- 3. Segunda Ley de Newton.
- 4. Tercera Ley de Newton.

1. Conceptos Fundamentales.

Observador.

Un observador es una persona interesada en el comportamiento de los cuerpos que lo rodean. Desde este punto de vista, el alumno deberá asumir el papel de observador, como una persona interesada en el movimiento de los cuerpos que lo rodean.

Cuerpo en Movimiento.

Un observador determina que un cuerpo se encuentra en movimiento, cuando observa que la posición en el espacio de dicho cuerpo, cambia al transcurrir el tiempo; de otra forma, establecerá que el cuerpo se encuentra en reposo.

Diremos que la posición de un cuerpo en el espacio, en un instante dado, queda determinada, cuando se especifica la posición de todos los puntos del espacio que ocupa dicho cuerpo en ese instante.

Sistema de Referencia. (S.R.)

Es el dispositivo que necesita un observador para especificar apropiadamente la posición de los puntos del espacio.

Un S.R. queda constituido por los siguientes elementos:

- a) Un punto fijo del espacio, escogido arbitrariamente, al cual denotaremos como “O” y le llamaremos el origen del S.R.
- b) Un conjunto de ejes con orientación fija en el espacio y cuya intersección sea el origen del S.R., con los cuales podamos describir direcciones y sentidos en el espacio.
- c) La unidad de medida de longitud para especificar la distancia entre diferentes puntos del espacio. Al referir esa unidad de medida sobre los ejes de referencia, se dice que los ejes son coordenados.
- d) Un reloj que nos permita registrar el transcurso del tiempo.

Características de los ejes del S.R.

- a) Si los ejes del S.R. son perpendiculares entre si, se les llama ejes cartesianos. Preferentemente usaremos S.R. con ejes cartesianos y coordenados.
- b) El número de ejes del S.R. necesarios y suficientes para especificar la dirección y sentido en el espacio, determina lo que se llama la dimensión del espacio. En nuestro caso consideraremos a lo más, un espacio de dos dimensiones, es decir un plano, por lo tanto, requeriremos de un S.R. con dos ejes. A los dos ejes cartesianos del S.R. en el plano los denominaremos *eje-x* y *eje-y*.

Cuerpo Puntual.

En el caso de que las características de un cuerpo, tanto geométricas como de movimiento, sean tales que su posición en cualquier instante t quede determinada por la posición de cualquiera de sus puntos, se dice que el cuerpo es un cuerpo puntual.

Trayectoria de un cuerpo puntual.

Dado un S.R. se define la trayectoria de un cuerpo puntual como el conjunto de puntos en el espacio que ocupa el cuerpo para todos los valores del tiempo t .

Movimiento Rectilíneo y Uniforme de un Cuerpo Puntual.

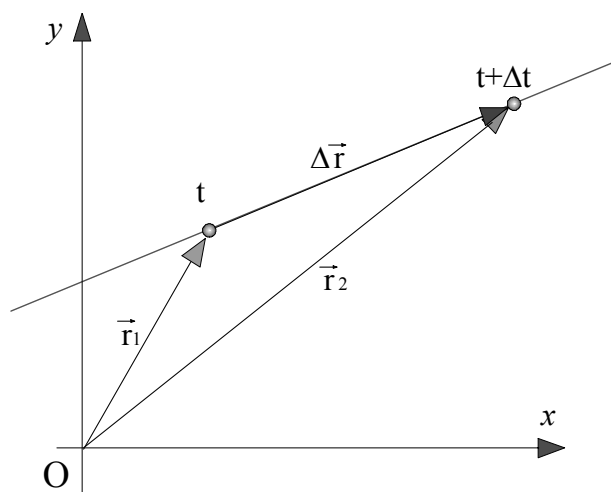
Se dice que un cuerpo puntual, m , respecto de un S.R. dado, describe un movimiento rectilíneo y uniforme cuando:

- Su trayectoria es una recta.
- En intervalos de tiempo Δt iguales, realiza desplazamientos $\Delta \vec{r}$ iguales para cualquier valor de t .

Es decir, si en el intervalo de t_1 a $t_1 + \Delta t$, realiza un desplazamiento, $\Delta \vec{r}_1$, entonces en el intervalo de t_2 a $t_2 + \Delta t$, realiza un desplazamiento $\Delta \vec{r}_2$ tal que:

$$\Delta \vec{r}_1 = \Delta \vec{r}_2$$

Para cualesquiera t_1 , t_2 , y Δt y $t_1 \neq t_2$, y $\Delta t \neq 0$.



En este caso, se define la velocidad de m , respecto del S.R. dado, de la siguiente forma:

Sean $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ las posiciones de m , en los tiempos t y $t + \Delta t$, de tal forma que en el intervalo Δt realiza el desplazamiento $\Delta \vec{r}$, dado por:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Se dice que m se desplaza con velocidad constante $\vec{V}$ dada por:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta t} \right) \Delta \vec{r}$$

Se define la rapidez de m como:

$$V = |\vec{v}| = \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

Obsérvese que:

$$[V] = \frac{[\Delta \vec{r}]}{[\Delta t]} = \frac{[Longitud]}{[Tiempo]} = \frac{\text{metro}}{\text{segundo}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

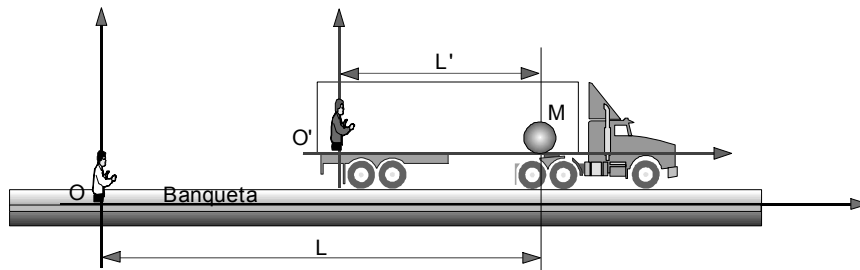
En términos de la velocidad, se dice que m se encuentra en reposo respecto del S.R. dado, cuando $\vec{v} = \vec{0}$ para todo t .

2. Primera Ley de Newton.

Experimentalmente se verifica que las características observadas en el movimiento de un cuerpo, dependen en parte del S.R. utilizado. En general, se observa la existencia de dos tipos de S.R. llamados: **S.R. Inerciales** y **S.R. No-Inerciales**.

Ejemplo de S.R. Inercial y S.R. No-Inercial.

Consideremos una pelota M colocada en reposo sobre el piso de un camión, inicialmente en reposo respecto a la banqueta. Sean O y O' los S.R. de dos observadores. O fijo a la banqueta y O' fijo sobre el piso del camión, como se muestra en la figura.



Cuando el camión acelera hacia la derecha, O' observa que M comienza a rodar hacia él, es decir L' disminuye mientras transcurre el tiempo, por otro lado, O observa que M mantiene su estado de reposo, es decir $L = \text{cte.}$ en el transcurso del tiempo.

En este caso, el observador O ha definido un S.R. inercial, en el cual M mantiene su estado de reposo, a menos que otro cuerpo interactúe con él, en tanto que O' es un S.R. No inercial, en el cual M comienza a moverse sin que otro cuerpo interactúe sobre él. En cursos posteriores de Física se verá que el comportamiento de M , es debido a efectos inerciales de sí mismo, o a la aparición de “Pseudofuerzas” que se manifiestan en el S.R. no inercial.

Sistema de Referencia Inercial.

Son aquellos S.R. en los cuales se observa que: Un Cuerpo Puntual conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que otro cuerpo interactúe sobre él.

Al reconocimiento experimental de la existencia de *S.R.* inerciales, se le llama la Primera Ley de Newton.

De la **1ª Ley de Newton** se observa lo siguiente:

Definición de masa.

En un *S.R.* inercial los cuerpos materiales evidencian la propiedad de mantener su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme; a esta propiedad se le llama inercia.

El parámetro físico que cuantifica la inercia de un cuerpo es la masa. La masa de un cuerpo es una cantidad escalar cuya unidad de medida es el kilogramo:

$$[m] = [masa] = \text{kilogramo} = kg$$

Y su valor se asocia de manera proporcional a la inercia, es decir a mayor inercia, se le asocia mayor masa.

Definición de Fuerza.

La fuerza que se ejercen entre sí dos cuerpos, es el parámetro físico que se usa para cuantificar la interacción entre los cuerpos materiales capaz de modificar su estado de movimiento.

Se observa que la fuerza es una cantidad vectorial y su definición operativa la establece la **2ª Ley de Newton**.

El origen de todas las fuerzas observadas macroscópicamente se explica a partir de cuatro fuerzas que se manifiestan a escala microscópica entre las partículas más pequeñas que componen la materia, a saber:

- Fuerzas Gravitatorias.
Se manifiestan a nivel Cósmico.
- Fuerzas Electromagnéticas.
Se manifiestan a nivel Atómico y Molecular.
- Fuerza Débil de Corto Alcance.
Se manifiesta a nivel Nuclear, genera la radiación Nuclear Espontánea.
- Fuerza Fuerte de Corto Alcance.
Se manifiesta a nivel Nuclear; mantiene la estabilidad de los núcleos, y en la interacción entre partículas elementales.

3. Segunda Ley de Newton.

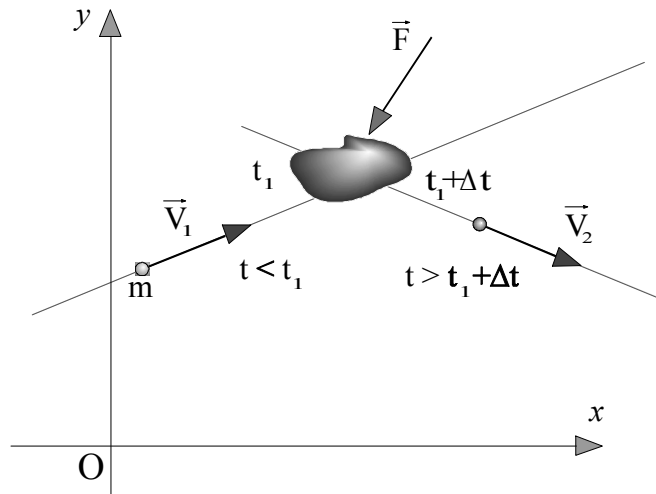
Supongamos que respecto de un *S.R.* inercial, un cuerpo puntual de masa m se mueve rectilínea y uniformemente con velocidad $\vec{V}_1$. Si al tiempo t_1 se ejerce sobre m una fuerza $\vec{F}$ constante durante un tiempo Δt , experimentalmente se observa que para tiempos $t > t_1 + \Delta t$, m se mueve rectilínea y uniformemente con velocidad $\vec{V}_2$, es decir m sufrió un cambio de velocidad dado por:

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

Experimentalmente se verifica que $\Delta \vec{V}$ es tal que:

$$\Delta \vec{V} = \frac{\Delta t}{m} \vec{F} \quad \text{ó} \quad \vec{F} = m \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

A este resultado experimental se le llama la **2ª Ley de Newton**.



Observaciones:

De la **2ª Ley de Newton** se tiene la definición operativa del parámetro fuerza.

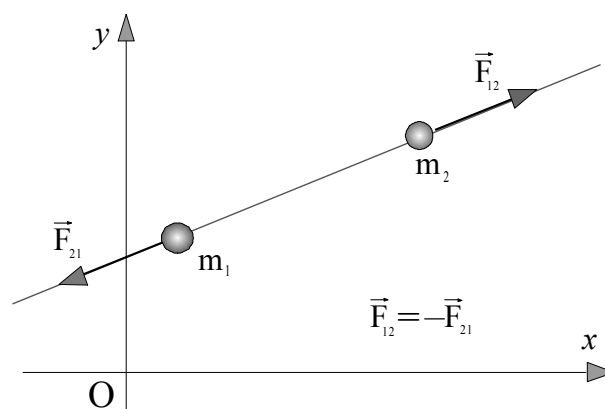
Unidades. Se tiene:

$$\begin{aligned} [\vec{F}] &= [Fuerza] = \frac{[m]}{[\Delta t]} [\Delta \vec{V}] = \frac{[masa]}{[tiempo]} \frac{[Longitud]}{[tiempo]} = \\ &= (\text{kilogramo}) \frac{\text{metro}}{(\text{segundo})^2} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{Newton} = \text{N} \end{aligned}$$

4. Tercera Ley de Newton.

Experimentalmente se observa que, respecto de un S.R. inercial, si un cuerpo m_1 ejerce una fuerza $\vec{F}_{12}$ a otro cuerpo m_2 , entonces m_2 ejerce a m_1 una fuerza $\vec{F}_{21}$ tal que:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



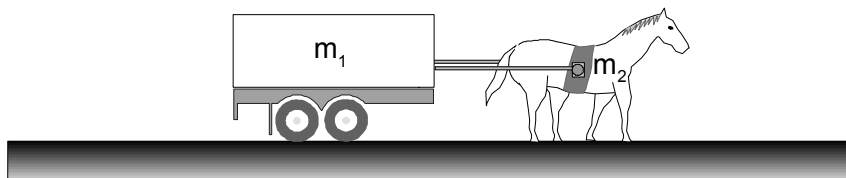
Es importante tomar en cuenta que las fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ **actúan sobre cuerpos distintos**; en este caso sobre m_2 y m_1 respectivamente.

También observar que la existencia de una propicia la acción de la otra. Es por eso que a estas fuerzas se les llama fuerzas de Acción-Reacción. Por ejemplo si m_1 ejerce sobre m_2 la fuerza $\vec{F}_{12}$, m_2 reaccionará y ejerce sobre m_1 la fuerza $\vec{F}_{21}$. Por lo tanto a la **Tercera Ley de Newton** se le identifica como la **ley de Acción-Reacción**:

“A toda acción le corresponde una reacción de igual magnitud, en la misma dirección y sentido contrario”.

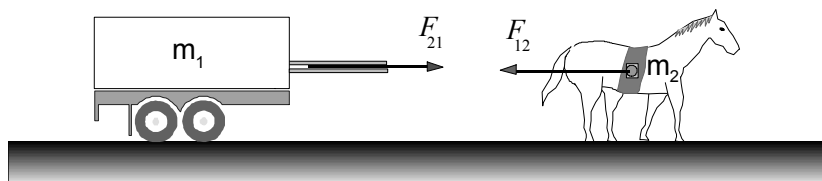
Ejemplo que ilustra la aplicación de la Tercera Ley de Newton.

Consideremos una carreta m_1 tirada por un caballo m_2 , sobre una superficie horizontal, como se muestra en la figura.



De acuerdo con la 3ª Ley de Newton, si m_2 jala a m_1 con una fuerza F_{21} , m_1 jala a m_2 con una fuerza F_{12} , tal que:

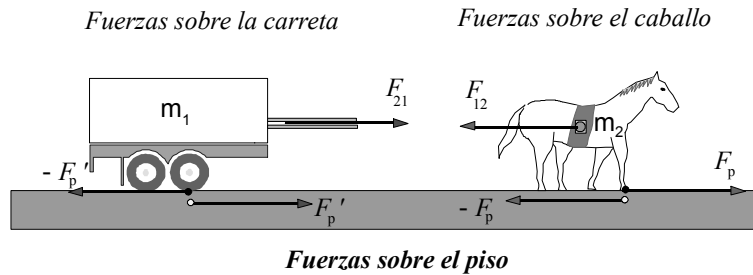
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Entonces, ¿Por qué se mueve la carreta tirada por el caballo?

La explicación está dada en términos de las fuerzas que el piso ejerce sobre el caballo y sobre la carreta, de la siguiente forma:

Cuando el caballo apoya sus patas sobre el piso para jalar la carreta, el piso le ejerce una fuerza F_p , siendo $-F_p$ la fuerza que el caballo ejerce sobre el piso. Ahora la carreta tiende a deslizar sobre el piso, en ese caso el piso le ejerce una fuerza $-F_p'$, donde F_p' es la fuerza que la carreta le ejerce al piso.



La diferencia $F_p - F_p'$ es la que determina el avance de la carreta y del caballo sobre el piso.



UNIDAD II

EQUILIBRIO DEL CUERPO

PUNTUAL

Objetivos

Se pretende que los alumnos:

- a) Aprendan a identificar, con claridad, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo puntual dado su entorno.
- b) Entiendan y apliquen la condición para el equilibrio de un cuerpo puntual.
- c) Aprendan a determinar las condiciones de equilibrio para un sistema de cuerpos puntuales interaccionando entre sí.

Contenido

- 1. Condiciones de equilibrio para un cuerpo puntual.
- 2. Planteamiento y solución del problema sobre el equilibrio del cuerpo puntual.
- 3. Tipos de fuerzas que se ejercen entre sí los cuerpos.
- 4. Nomenclatura normalizada.

1. Condiciones de Equilibrio para un Cuerpo Puntual.

Definición.

Se dice que un cuerpo puntual se encuentra en equilibrio respecto de un *S.R.* inercial dado, cuando la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero.

Observación:

De la *1ª Ley de Newton* se tiene que un cuerpo puntual en equilibrio mantiene su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme.

Solamente consideraremos el caso del equilibrio de cuerpos puntuales en reposo.

2. Planteamiento y Solución del Problema sobre el Equilibrio del Cuerpo Puntual.

Problema a considerar:

Dado un conjunto de cuerpos puntuales interaccionando entre sí; encontrar las condiciones para las cuales los cuerpos se encuentran en equilibrio.

Solución al problema planteado.

Procederemos de la siguiente forma:

- Debemos identificar las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo de interés, elaborando lo que se llama el diagrama de cuerpo libre para cada uno de ellos.
- Aplicar la condición de equilibrio para cada uno de los cuerpos de interés, es decir, que la suma de las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo es cero; si $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$; son las que actúan sobre uno de esos cuerpos entonces:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0} \quad \text{ó} \quad \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{0}$$

Observar que la ecuación anterior establece una suma de cantidades vectoriales y se debe aplicar a cada cuerpo del sistema.

Si las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo quedan contenidas en un plano, al establecer un *S.R.* inercial en este plano, se pueden obtener las componentes cartesianas de cada fuerza, es decir:

$$\vec{F}_1 = F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j},$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\hat{i} + F_{2y}\hat{j},$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vec{F}_n = F_{nx}\hat{i} + F_{ny}\hat{j}.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad \text{ó} \quad F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad \text{ó} \quad F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0 \end{cases}$$

- c) Como se verá adelante, dependiendo de las características de los dispositivos de interacción entre los cuerpos del sistema, y de éstos con el entorno del sistema; algunas de las fuerzas que se ejercen a los cuerpos estarán relacionadas entre sí o relacionadas con parámetros propios de los dispositivos de interacción. Esas relaciones, al plantearlas algebraicamente, establecerán lo que llamaremos las ecuaciones constitutivas.
- d) Al plantear las condiciones de equilibrio a cada cuerpo y las ecuaciones constitutivas respectivas, se establecerá un sistema de ecuaciones que nos permitirá calcular el valor de los parámetros requeridos.

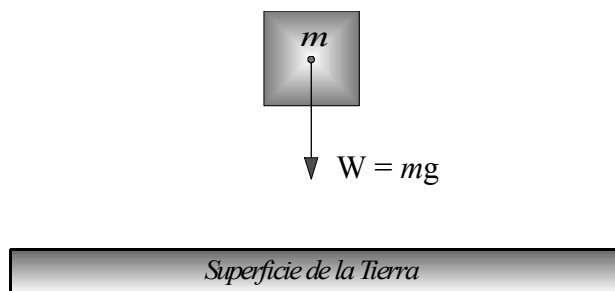
3. Tipos de Fuerzas que se Ejercen entre Sí los Cuerpos.

a) Fuerza de gravedad terrestre.

Sobre todo cuerpo de masa m , colocado en regiones cercanas a la superficie de la tierra, la tierra le ejerce una fuerza constante, llamada el peso del cuerpo, cuya dirección y sentido es verticalmente dirigida hacia la superficie de la tierra y cuya magnitud es:

$$W = mg, \quad \text{donde,} \quad g = 9.8 \frac{m}{s^2}.$$

A g se le llama la aceleración de la gravedad terrestre.



b) Fuerzas por contacto entre cuerpos.

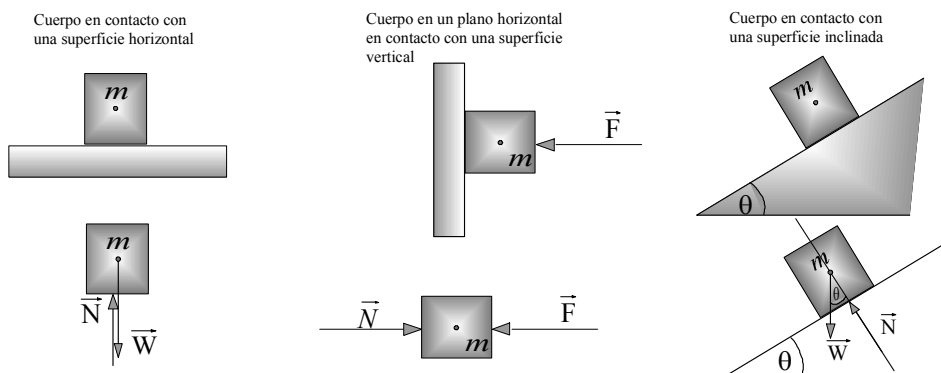
Estas fuerzas se manifiestan por las propiedades elásticas de los cuerpos cuando entran en contacto material.

i. *Fuerzas de Contacto entre cuerpos rígidos.*

Un cuerpo se dice que es rígido cuando no sufre deformaciones bajo la acción de fuerzas.

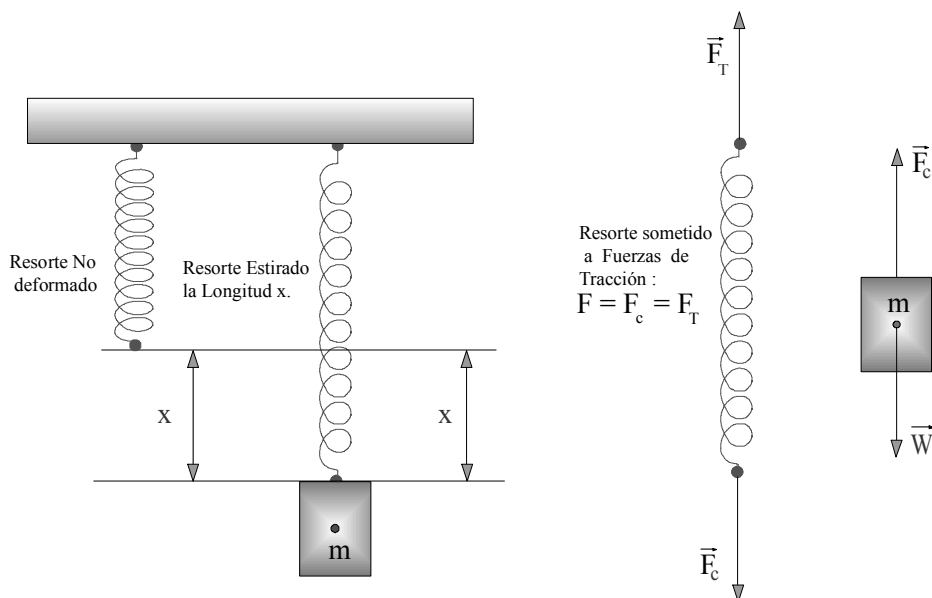
Cuando dos cuerpos rígidos entran en contacto material, interactúan a través de fuerzas perpendiculares a las superficies en contacto, conocidas como fuerzas normales, N .

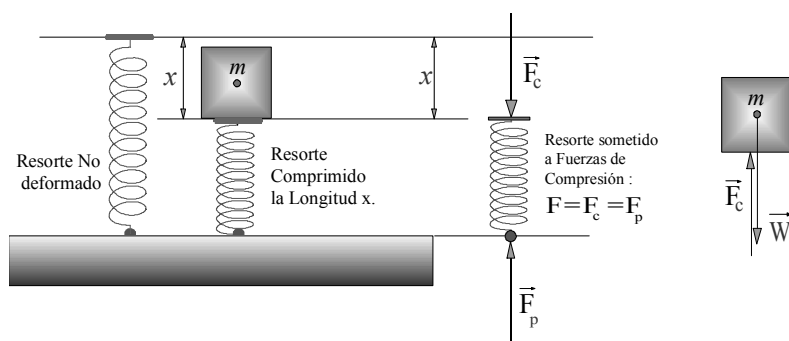
Ejemplos:



ii. *Fuerzas de Contacto entre un cuerpo rígido y un cuerpo elástico.*

Un cuerpo elástico es aquel que sufre deformaciones al aplicarle fuerzas y recupera su forma al liberarle de esas fuerzas. Ejemplo de éstos son los resortes que son cuerpos elásticos en una dirección y la deformación que sufren en esa dirección es proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada. Además consideraremos que la masa de los resortes es tan pequeña que su valor se puede ignorar.





Si un resorte es sometido a fuerzas de tracción, o de compresión, F ; sufre un alargamiento, o una contracción, x tal que:

$$k = \frac{F}{x} = \text{cte.}$$

A la constante k se le llama la constante elástica del resorte.

Observar que un resorte deformado la longitud x , ejerce una fuerza F cuyo sentido es contrario al sentido de la deformación, por eso se acostumbra escribir:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

A esta relación se le llama la **Ley de Hooke**.

c) Fuerzas de Fricción.

i. Fuerzas de Fricción Estática.

Cuando un cuerpo m se encuentra en reposo en contacto con otro cuerpo y sobre m actúa una fuerza F que tiende a hacer que m deslice sobre la superficie del cuerpo en contacto, entonces dicha superficie le ejerce a m una fuerza $\vec{f}_E$, llamada **fuerza de fricción estática**, con las siguientes características.

f_E evita el deslizamiento de m , es decir actúa en la dirección de las superficies en contacto y en sentido opuesto al del deslizamiento de m .

Si F crece, en la misma cantidad crece también f_E . Dados los dos cuerpos en contacto, el crecimiento f_E está limitado por el valor máximo dado por:

$$f_{E \text{ máx}} = \mu_E N$$

Donde N es la magnitud de la fuerza de contacto entre los cuerpos y μ_E es una constante cuyo valor se determina experimentalmente y depende del acabado macroscópico de las superficies en contacto y de los materiales que constituyen a los cuerpos en contacto.

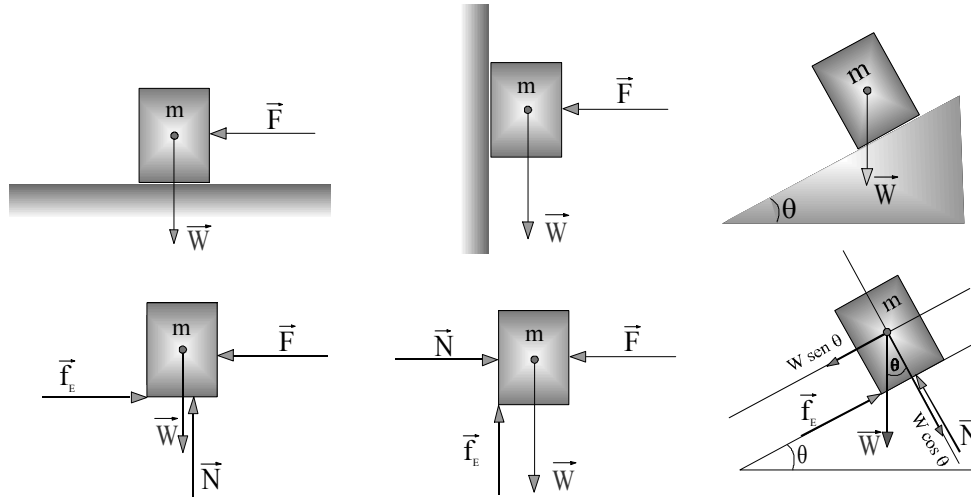
A μ_E se le llama el **coeficiente de fricción estático** entre los cuerpos.

Dado el comportamiento de f_E , se dice que es tal que:

$$f_E \leq \mu_E N$$

Normalmente se tiene que $0 \leq \mu_E \leq 1$. En el caso en que $\mu_E = 0$, se dice que entre los cuerpos no hay fricción.

Ejemplos:



ii. Fuerza de Fricción Cinética.

Cuando un cuerpo m desliza sobre la superficie de otro cuerpo en contacto, sobre m se ejerce una fuerza $\vec{f}_C$, llamada **fuerza de fricción cinética**, cuya dirección y sentido son opuestos al deslizamiento de m . Si N es la magnitud de la fuerza de contacto entre los cuerpos, experimentalmente se observa que la magnitud de $\vec{f}_C$ es tal que:

$$\mu_C = \frac{f_C}{N} = \text{cte.} \quad \text{ó} \quad f_C = \mu_C N$$

A μ_C se le llama el **coeficiente de fricción cinético** entre los cuerpos, su valor numérico se obtiene experimentalmente y se observa que depende del acabado macroscópico de las superficies en contacto y del material que constituye a los cuerpos. Generalmente se tiene

$0 \leq \mu_C \leq 1$; en el caso en que $\mu_C = 0$ se dice que entre los cuerpos no hay fricción. Dados dos cuerpos en contacto se tiene que:

$$\mu_E > \mu_C$$

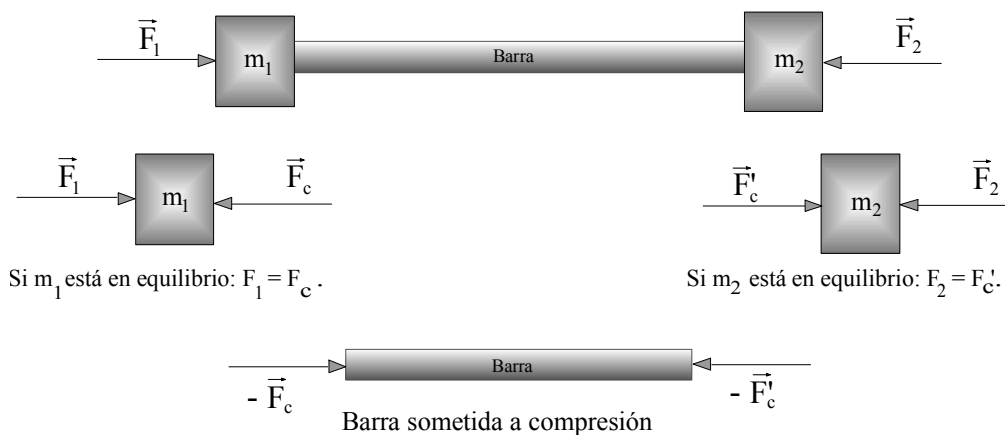
d) Dispositivos de interacción entre cuerpos.

i. Barra.

Una barra es un cuerpo rígido cuya masa es tan pequeña que se puede despreciar. Al colocar los extremos de una barra en contacto con dos cuerpos, es posible transmitir el efecto de las fuerzas aplicadas a los cuerpos de uno al otro, por el efecto de compresión o de tensión en la barra, de la siguiente forma:

Barra en compresión:

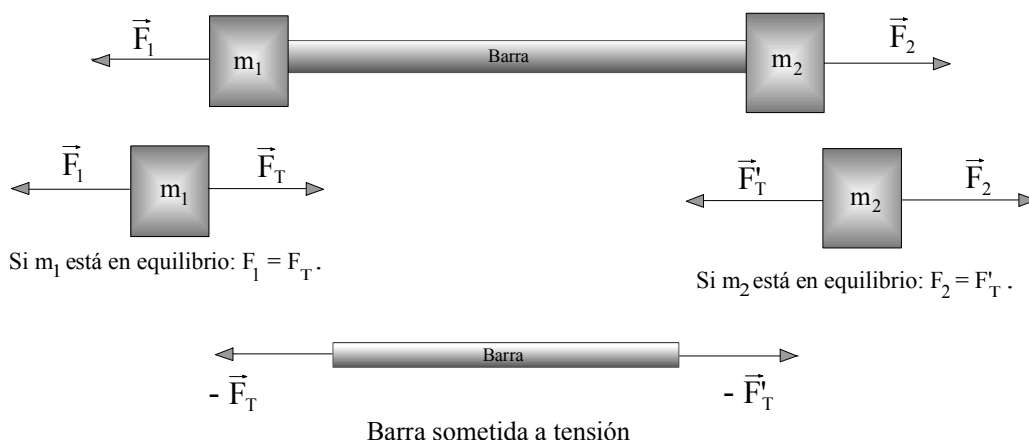
Cuerpos m_1 y m_2 unidos por una barra y sometidos a las fuerzas F_1 y F_2 .



Para el equilibrio del sistema se debe cumplir: $F_1 = F_2$.

Barra en tensión.

Cuerpos m_1 y m_2 unidos por una barra y sometidos a las fuerzas F_1 y F_2 .



Para el equilibrio del sistema se debe cumplir: $F_1 = F_2$.

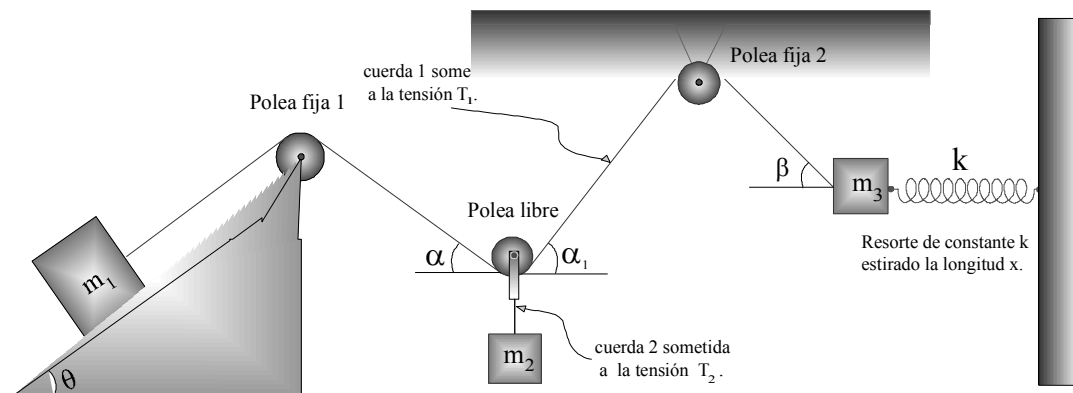
ii. Cuerdas y poleas.

Una cuerda es un cuerpo flexible e inextensible cuya masa es tan pequeña que se puede ignorar. Las cuerdas se usan, como las barras, para transmitir fuerzas entre cuerpos unidos a ellas. A través de una cuerda se pueden transmitir solamente fuerzas de tensión, una cuerda no puede transmitir fuerzas de compresión.

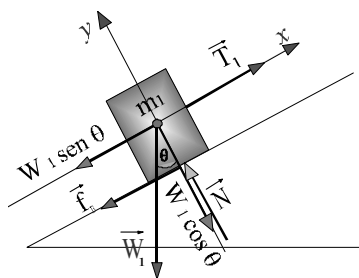
Una polea es un dispositivo cuya masa se puede ignorar y que combinado con cuerdas, se usa para transmitir fuerzas entre cuerpos en diferentes direcciones. Al combinar cuerdas y poleas se ignorarán efectos de deslizamiento y de fricción cinética entre ellos.

En los mecanismos que consideraremos se usarán las llamadas poleas fijas y poleas libres; las cuales se ejemplificarán a continuación.

Ejemplo:

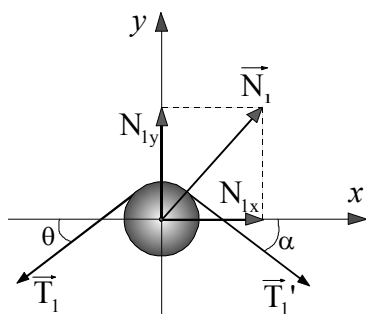


Para el equilibrio de m_1 :



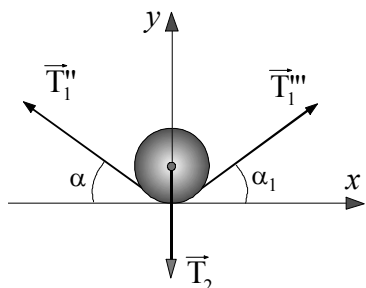
$$\begin{aligned} T_1 - W_1 \sin \theta - f_E &= 0, \\ N - W_1 \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

Para el equilibrio de la polea 1:



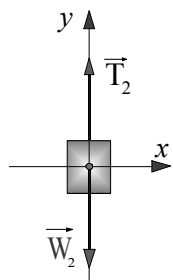
$$\begin{aligned} |\vec{T}_1| &= |\vec{T}_1'| = T_1, \\ T_1 \cos \alpha + N_{1x} - T_1 \cos \theta &= 0, \\ N_{1y} - T_1 \sin \alpha - T_1 \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

Para el equilibrio de la polea libre:



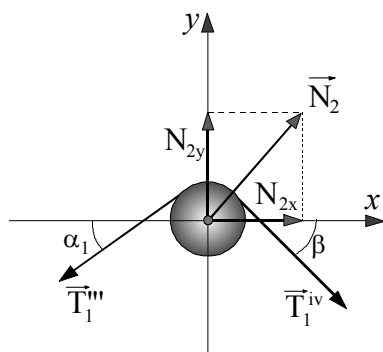
$$\begin{aligned} |\vec{T}_1''| &= |\vec{T}_1'''| = T_1, \\ -T_1 \cos \alpha + T_1 \cos \alpha_1 &= 0, \\ T_1 \sin \alpha + T_1 \sin \alpha_1 - T_2 &= 0. \end{aligned}$$

Para el equilibrio de m_2 :



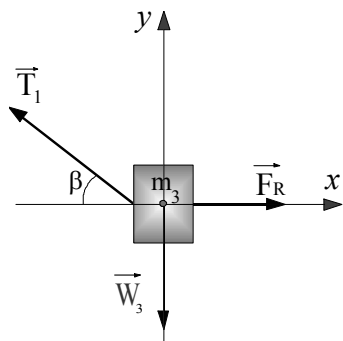
$$T_2 - W_2 = 0.$$

Para el equilibrio de la polea 2:



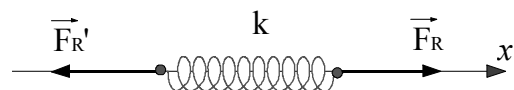
$$\begin{aligned} |\vec{T}_1^{\text{'''}}| &= |\vec{T}_1^{\text{iv}}| = T_1, \\ N_{2x} - T_1 \cos \alpha_1 + T_1 \cos \beta &= 0, \\ N_{2y} - T_1 \sin \beta - T_1 \sin \alpha_1 &= 0. \end{aligned}$$

Para el equilibrio de m_3 :



$$\begin{aligned} -T_1 \cos \beta + F_R &= 0, \\ T_1 \sin \beta - W_3 &= 0. \end{aligned}$$

Para el equilibrio del resorte:



$$F_R - F_R' = 0, \text{ donde } F_R = kx.$$

4. Nomenclatura normalizada.

Símbolos internacionales de las unidades.

Los símbolos de unidades que se han indicado, son los que han sido aceptados y los que deberán usarse. Se escriben con tipo vertical (ordinario) independientemente del tipo que se usa en el texto. No cambian en plural, no son seguidos por un punto, y se colocan después del valor numérico de la cantidad. Es regla general escribir los símbolos con letras minúsculas a menos que el nombre de la unidad se derive del nombre de una persona.

Ejemplos

m	metro
kg	kilogramo
s	segundo
A	ampere
Wb	weber
N	Newton

Combinaciones de símbolos.

Cuando una unidad compuesta se forma por multiplicación de dos o más unidades, esto se puede escribir de la manera siguiente:

$$\text{N m} \quad , \quad \text{N} \cdot \text{m} .$$

Cuando una unidad se forma por división de una unidad entre otra, esto se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{\text{m}}{\text{s}} , \quad \text{m/s}, \quad \text{m s}^{-1}, \quad \text{ó} \quad \text{m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Nunca se debe poner más de una diagonal de división (/) sobre una misma línea a menos que se usen paréntesis, para evitar confusiones. En casos más complicados se deben usar potencias con exponentes negativos o paréntesis.

Los símbolos de prefijos se ponen con tipo vertical (ordinario) (independientemente del tipo usado en el texto) sin espacio entre el prefijo y el símbolo de la unidad.

Un prefijo pertenece al símbolo de la unidad que lo sigue. Juntos forman un símbolo nuevo que se puede elevar a potencias con exponentes positivos o negativos, y que se puede combinar con otros símbolos de unidad a símbolos de unidades compuestas.

PROBLEMARIO

Objetivos

Se pretende que los alumnos:

- a) Apliquen lo aprendido en las unidades I y II en el análisis de sistemas de cuerpos puntuales en condiciones de equilibrio estático.
- b) Ejerciten la solución de problemas similares a los planteados en el primer examen parcial del curso.

Contenido

Se presentan nueve versiones de ejercicios en la estructura típica del primer examen parcial del curso.

Versión 1.

1. Un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad constante V_0 , es sometido a la acción de la fuerza F constante, como se muestra en la *figura 1*, durante un tiempo Δt , calcular:
 - a) El cambio de la velocidad que sufre m ,
 - b) La velocidad terminal de m .
 ($m=0.7 \text{ kg}$, $V_0=4 \text{ m/s}$, $F=5 \text{ N}$, $\theta=30^\circ$, $\Delta t=3.1 \text{ s}$).

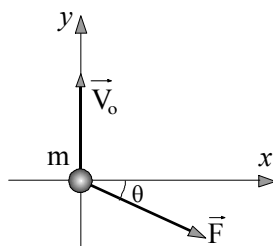


figura 1.

2. Sobre un cuerpo puntual A actúan las fuerzas F_1 y F_2 como se observa en la *figura 2*, calcular:
 - a) La magnitud de la fuerza F y,
 - b) Su dirección θ , para mantenerlo en equilibrio.
 ($F_1=25 \text{ N}$, $F_2=40 \text{ N}$).

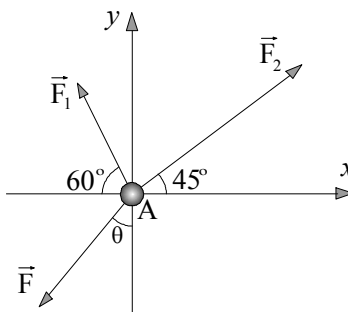


figura 2.

3. El sistema de la *figura 3* se encuentra en equilibrio:
 - a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre para cada bloque,
 - b) Encontrar las tensiones T_1 y T_2 ,
 - c) Determinar los ángulos θ_1 y θ_2 .
 ($P_1=400 \text{ N}$, $P_2=200 \text{ N}$, $P_3=300 \text{ N}$).

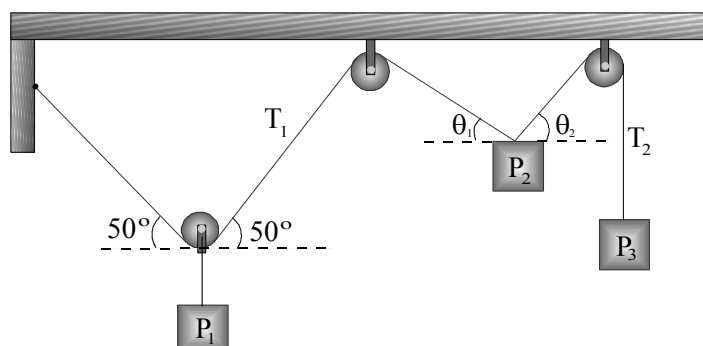


figura 3.

Solución

1. $m=0.7 \text{ kg}$, $V_0=4 \text{ m/s}$, $F = 5 \text{ N}$, $\theta=30^\circ$, $\Delta t=3.1 \text{ s}$.

a) De la segunda ley de Newton se tiene que el cambio de velocidad de m , está dado por:

$$\vec{F} = m \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{V} = \frac{\Delta t}{m} \vec{F}$$

En el sistema de referencia mostrado en la figura 1:

$$\vec{F} = (F \cos \theta) \hat{i} - (F \sin \theta) \hat{j} = [(5 \text{ N}) \cos 30^\circ] \hat{i} - [(5 \text{ N}) \sin 30^\circ] \hat{j}$$

$$\vec{F} = (4.33 \text{ N}) \hat{i} - (2.5 \text{ N}) \hat{j}$$

Ahora:

$$\Delta \vec{V} = \frac{3.1 \text{ s}}{0.7 \text{ kg}} [(4.33 \text{ N}) \hat{i} - (2.5 \text{ N}) \hat{j}] = (19.175 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{i} - (11.071 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{j}$$

$$\boxed{\Delta \vec{V} = (19.175 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{i} - (11.071 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{j}}$$

b) Por otro lado:

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_f - \vec{V}_o \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_f = \Delta \vec{V} + \vec{V}_o$$

En el sistema de referencia mostrado en la figura 1:

$$\vec{V}_o = (4 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{j},$$

Por lo tanto:

$$\vec{V}_f = (4 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{j} + [(19.175 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{i} - (11.071 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{j}] = (19.175 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{i} - (7.071 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_f = (19.175 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{i} - (7.071 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \hat{j}}$$

2. $F_1 = 25 \text{ N}$, $F_2 = 40 \text{ N}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

Para el equilibrio, se debe cumplir:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

Con respecto al sistema de referencia (S.R.) mostrado en la figura se tiene:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -F \sin \theta - F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -F \cos \theta + F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta = 0 \quad (2)$$

De la ec. (1), se tiene:

$$F \sin \theta = F_2 \cos \beta - F_1 \cos \alpha = (40 \text{ N}) \cos 45^\circ - (25 \text{ N}) \cos 60^\circ$$

Es decir:

$$\boxed{F \sin \theta = 15.784 \text{ N}} \quad (1')$$

De la ec. (2) se tiene:

$$F \cos \theta = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta = (25 \text{ N}) \sin 60^\circ + (40 \text{ N}) \sin 45^\circ$$

Es decir:

$$\boxed{F \cos \theta = 49.934 \text{ N}} \quad (2')$$

Dividiendo la ec. (1') por la ec. (2'):

$$\frac{F \sin \theta}{F \cos \theta} = \tan \theta = \frac{15.784 \text{ N}}{49.934 \text{ N}} = 0.316$$

$$\theta = \text{Arctan}(0.316) = 17.536^\circ$$

$$\boxed{\theta = 17.536^\circ}$$

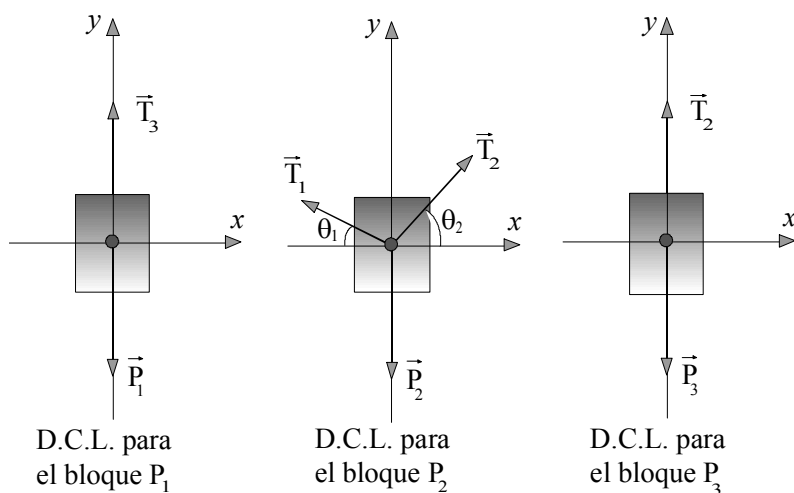
Ahora de la ec. (1'):

$$F = \frac{15.784 \text{ N}}{\sin \theta} = \frac{15.784 \text{ N}}{\sin(17.536^\circ)}$$

$$\boxed{F = 52.385 \text{ N}}$$

3. $P_1=400\text{ N}$, $P_2=200\text{ N}$, $P_3=300\text{ N}$, $\alpha=50^\circ$.

a) El diagrama de cuerpo libre para cada bloque es:



b) Para el equilibrio de cada bloque se debe cumplir:

Para P_1 :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_3 - P_1 = 0 \quad (1)$$

Para P_2 :

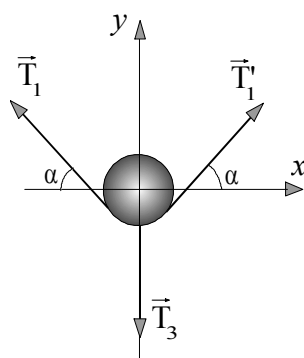
$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -T_1 \cos \theta_1 + T_2 \cos \theta_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 - P_2 = 0 \quad (3)$$

Para P_3 :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_2 - P_3 = 0 \quad (4)$$

Adicionalmente se debe considerar el equilibrio de la polea libre:



D.C.L. para la polea

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_1 \cos \alpha - T_1 \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 \sin \alpha + T_1 \sin \alpha - T_3 = 0 \quad (6)$$

De la ec. (1):

$$T_3 = P_1 = 400 \text{ N}$$

De la ec. (4):

$$T_2 = P_3 = 300 \text{ N}$$

De la ec. (6)

$$2 T_1 \sin \alpha - T_3 = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{T_3}{2 \sin \alpha} = \frac{400 \text{ N}}{2 \sin 50^\circ}$$

$$\boxed{T_1 = 261.081 \text{ N}}$$

c) De la ec. (2):

$$T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 \Rightarrow T_1^2 \cos^2 \theta_1 = T_2^2 \cos^2 \theta_2 \quad (2')$$

De la ec. (3):

$$\begin{aligned} T_1 \sin \theta_1 &= P_2 - T_2 \sin \theta_2 \Rightarrow T_1^2 \sin^2 \theta_1 = (P_2 - T_2 \sin \theta_2)^2 \\ T_1^2 \sin^2 \theta_1 &= P_2^2 - 2 P_2 T_2 \sin \theta_2 + (T_2 \sin \theta_2)^2 \end{aligned} \quad (3')$$

Sumando las ecuaciones (2') y (3'):

$$T_1^2 = T_2^2 + P_2^2 - 2 P_2 T_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{T_2^2 + P_2^2 - T_1^2}{2 P_2 T_2}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{(300 \text{ N})^2 + (200 \text{ N})^2 - (261.081 \text{ N})^2}{2 (200 \text{ N})(300 \text{ N})} = 0.515$$

$$\boxed{\sin \theta_2 = 0.515}$$

Entonces:

$$\boxed{\theta_2 = \text{Arcsen}(0.515) = 30.997^\circ}$$

De la ec. (2):

$$\cos \theta_1 = \frac{T_2 \cos \theta_2}{T_1} = \frac{(300 \text{ N}) \cos(30.997^\circ)}{261.081 \text{ N}} = 0.984$$

Entonces:

$$\boxed{\theta_1 = \text{Arccos}(0.984) = 10.263^\circ}$$

$$\boxed{\theta_1 = 10.263^\circ}$$

Versión 2.

1. Considere el sistema de fuerzas mostrado en la figura 1.
 - a) Encontrar la magnitud del ángulo θ , de tal manera que la fuerza resultante esté a lo largo del *eje-y*,
 - b) Calcular la magnitud y establecer el sentido de la fuerza resultante.
 Donde, $F_1 = 600 \text{ N}$, $F_2 = 500 \text{ N}$ y $F_3 = 400 \text{ N}$.

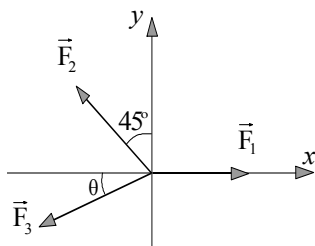


figura 1.

2. Para el sistema en equilibrio mostrado en la figura 2,
 - a) Hacer el diagrama de cuerpo libre de los bloques W_1 y W_2 y de las poleas A y B,
 - b) Encontrar la relación entre W_1 y W_2 .

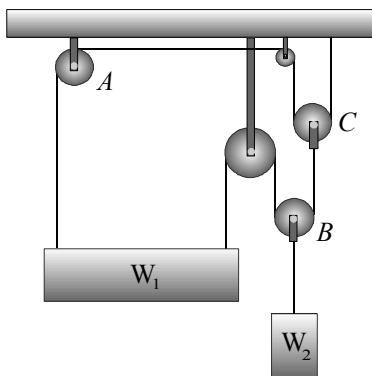


figura 2.

3. El sistema mostrado en la figura 3 está en equilibrio, calcular:
 - a) La fuerza que ejerce el resorte,
 - b) La tensión T .
 Donde, $W_1 = 200 \text{ N}$, $W_2 = 75 \text{ N}$, $\theta = 53^\circ$.

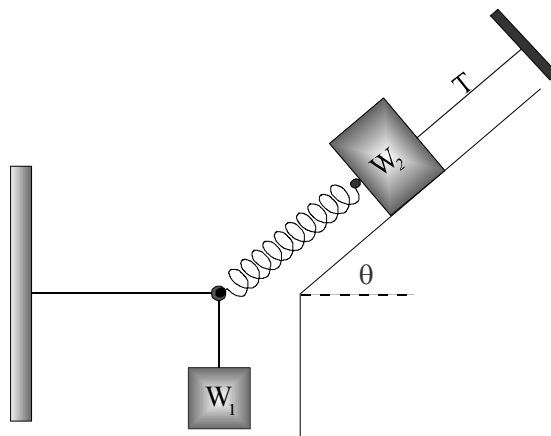


figura 3.

Solución.

1. $F_1 = 600 \text{ N}$, $F_2 = 500 \text{ N}$, $F_3 = 400 \text{ N}$, $\alpha = 45^\circ$.

a) Con respecto al S.R. ilustrado en la figura 1, la fuerza resultante es tal que:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_R \Rightarrow$$

$$\sum F_x = F_{Rx} \Rightarrow F_1 - F_2 \sin \alpha - F_3 \cos \theta = F_{Rx} \quad (1)$$

$$\sum F_y = F_{Ry} \Rightarrow F_2 \cos \alpha - F_3 \sin \theta = F_{Ry} \quad (2)$$

Se quiere calcular θ tal que $F_{Rx} = 0$, por lo tanto, de la ec. (1):

$$F_1 - F_2 \sin \alpha - F_3 \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{F_1 - F_2 \sin \alpha}{F_3}$$

$$\cos \theta = \frac{600 \text{ N} - (500 \text{ N}) \sin 45^\circ}{400 \text{ N}} = 0.616$$

Entonces:

$$\theta = \arccos(0.616) = 51.975^\circ$$

$$\boxed{\theta = 51.975^\circ}$$

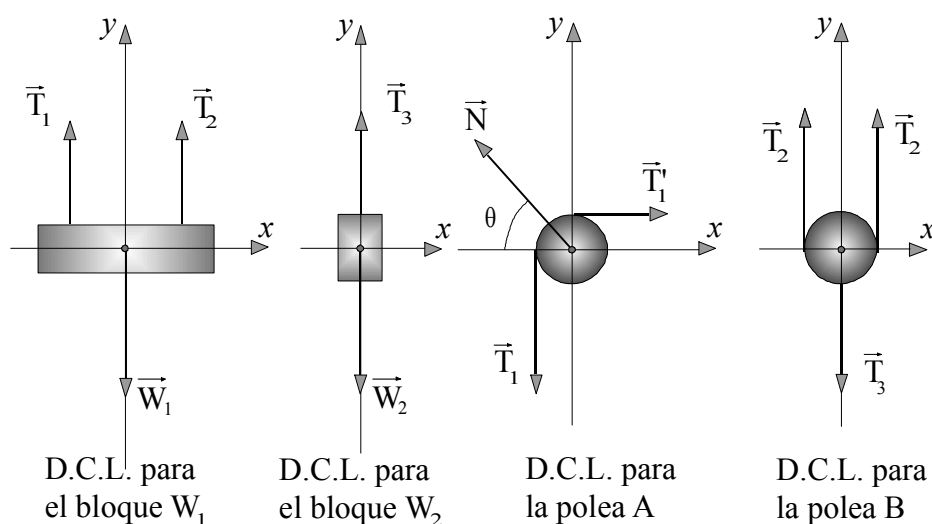
b) De la ec. (2):

$$F_{Ry} = (500 \text{ N}) \cos 45^\circ - (400 \text{ N}) \sin(51.975^\circ) = 38.456 \text{ N}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\vec{F} = 0 \hat{i} + (38.456 \text{ N}) \hat{j}}$$

2. a) Los diagramas de cuerpo libre, para los cuerpos solicitados, son:



b) Con respecto al S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio se debe cumplir:

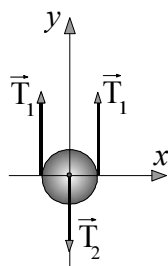
$$\text{Para } W_1: \quad \sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_2 - W_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Para } W_2: \quad \sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_3 - W_2 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Para la Polea B:} \quad \sum \vec{F} = \vec{0} \quad &\Rightarrow \quad \sum F_y = 0 \\ &\Rightarrow \quad T_2 + T_2 - T_3 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Además se debe considerar el equilibrio de la otra polea libre (polea C):

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_1 - T_2 = 0 \quad (4)$$



D.C.L. para
la polea C

De la ec. (4):

$$2T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{T_2}{2}$$

Sustituyendo en la ec. (1):

$$\frac{T_2}{2} + T_2 = W_1 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{2}{3}W_1$$

Sustituyendo en la ec. (3):

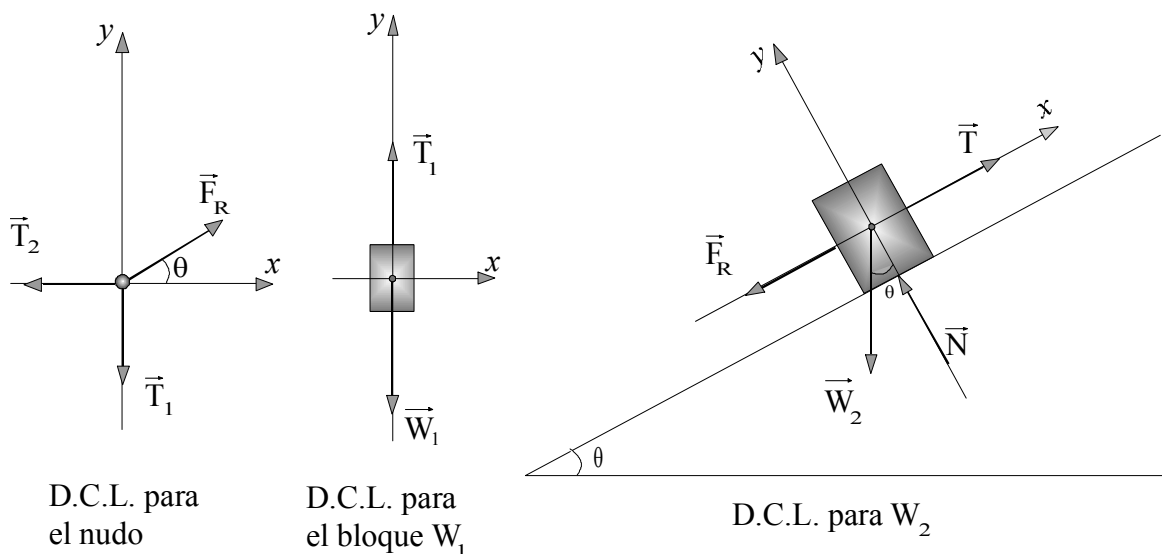
$$T_3 = 2T_2 = \frac{4}{3}W_1$$

Sustituyendo en la ec. (2):

$$\frac{4}{3}W_1 = W_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_1 = \frac{3}{4}W_2}$$

3. $W_1=200\text{ N}$, $W_2=75\text{ N}$, $\theta=53^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio se debe cumplir:



Para el Nudo:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow F_R \cos \theta - T_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_R \sin \theta - T_1 = 0 \quad (2)$$

Para W_1 :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 - W_1 = 0 \quad (3)$$

Para W_2 :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow T - F_R - W_2 \sin \theta = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - W_2 \cos \theta = 0 \quad (5)$$

a) De la ec. (3):

$$T_1 = W_1 = 200\text{ N}$$

Sustituyendo en la ec. (2):

$$F_R = \frac{T_1}{\sin \theta} = \frac{200\text{ N}}{\sin 53^\circ} = 250.427\text{ N}$$

$$\boxed{F_R = 250.427\text{ N}}$$

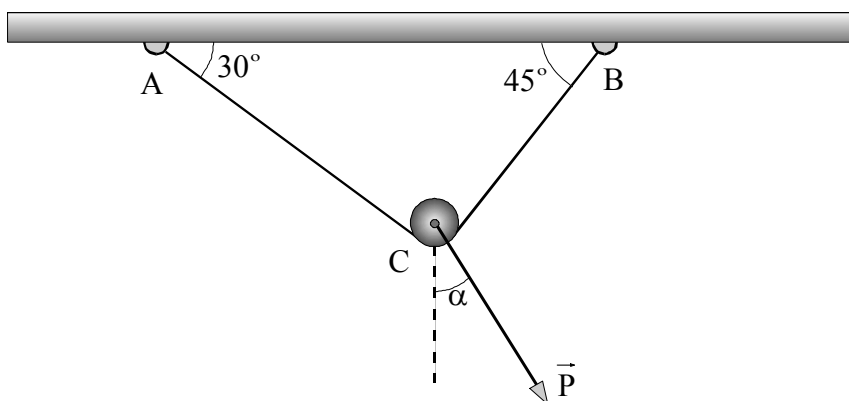
b) De la ec. (4):

$$T = F_R + W_2 \sin \theta = 250.427\text{ N} + (75\text{ N}) \sin 53^\circ$$

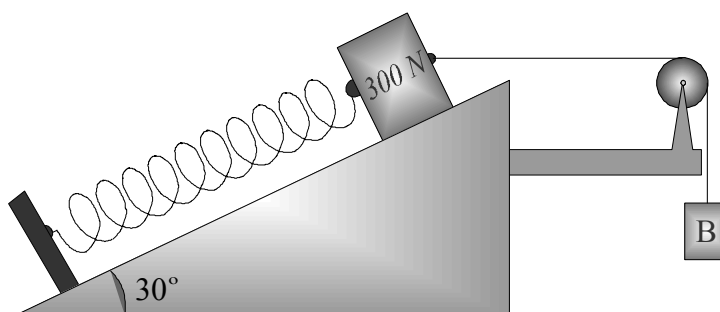
$$\boxed{T = 310.324\text{ N}}$$

Versión 3.

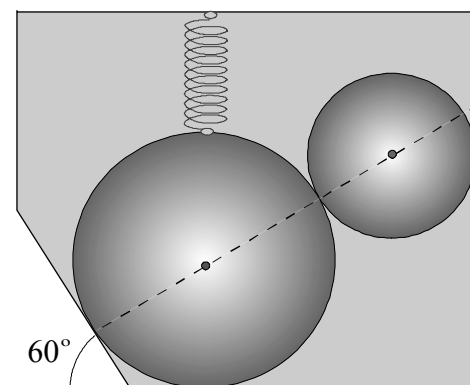
1. La fuerza P se aplica a una polea pequeña, que se desliza sobre el cable ACB. En la situación de equilibrio de la figura, la tensión en el cable es de 750 N. Determine la magnitud y dirección de P .



2. En la figura, el bloque A pesa 300 N. El plano inclinado es áspero, $\mu=0.2$; $\theta=30^\circ$. El resorte de constante $k=1 \times 10^4$ N/m se estira 5 cm. Determine el peso de B para que el sistema se mantenga en equilibrio.



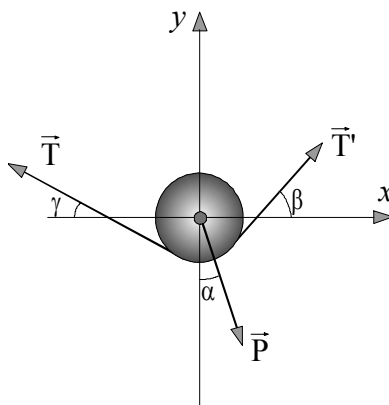
3. Haga el diagrama de cuerpo libre para el sistema de cilindros de la figura sabiendo que el resorte se encuentra comprimido, especifique los pares de tipo acción – reacción relacionados con el cilindro grande.



Solución.

1. $\gamma=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $T=750\text{ N}$.

Con respecto al S.R. mostrado en la figura, para el equilibrio de la polea se debe cumplir:



D.C.L. para
la polea

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T \cos \beta - T \cos \gamma + P \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T \sin \beta + T \sin \gamma - P \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

De la ec. (1):

$$P \sin \alpha = T (\cos \gamma - \cos \beta) \quad (1')$$

De la ec. (2):

$$P \cos \alpha = T (\sin \gamma + \sin \beta) \quad (2')$$

Dividiendo (1') por (2'):

$$\frac{P \sin \alpha}{P \cos \alpha} = \frac{T (\cos \gamma - \cos \beta)}{T (\sin \gamma + \sin \beta)} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{(\cos \gamma - \cos \beta)}{(\sin \gamma + \sin \beta)}$$

$$\tan \alpha = \frac{(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ)}{(\sin 30^\circ + \sin 45^\circ)} = 0.1316,$$

$$\boxed{\alpha = \text{Arctan}(0.1316) = 7.497^\circ}$$

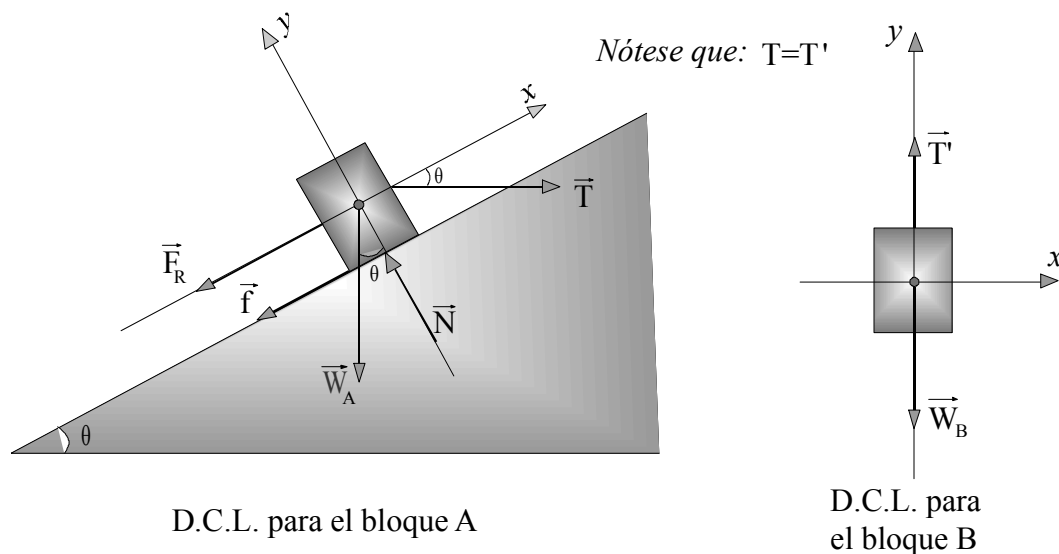
De la ec. (1'):

$$P = \frac{T (\cos \gamma - \cos \beta)}{\sin \alpha} = \frac{(750\text{N})(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ)}{\sin(7.497^\circ)} = 913.505\text{N},$$

$$\boxed{P = 913.505\text{N}}$$

2. $W_A = 300 \text{ N}$, $\mu = 0.2$, $k = 1 \times 10^4 \text{ N/m}$, $x = 0.05 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio de los bloques A y B, se debe cumplir:



Para el bloque A:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T \cos \theta - F_R - f - W_A \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - T \sin \theta - W_A \cos \theta = 0 \quad (2)$$

Para el bloque B:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T - W_B = 0 \quad (3)$$

Considerando que el bloque A está a punto de deslizar hacia arriba del plano, se debe cumplir:

$$f = \mu N \quad (4)$$

De la ley de Hooke:

$$F_R = k x \quad (5)$$

De la ec. (5):

$$F_R = \left(1 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(0.05 \text{ m}) = 500 \text{ N}$$

$$\boxed{F_R = 500 \text{ N}}$$

De la ec. (2):

$$N = T \sin \theta + W_A \cos \theta$$

Sustituyendo en la ec. (4):

$$f = \mu (T \sin \theta + W_A \cos \theta)$$

Sustituyendo en la ec. (1):

$$T \cos \theta - F_R - \mu (T \sin \theta + W_A \cos \theta) - W_A \sin \theta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$T (\cos \theta - \mu \sin \theta) - F_R - W_A (\sin \theta + \mu \cos \theta) = 0 \quad \Rightarrow$$

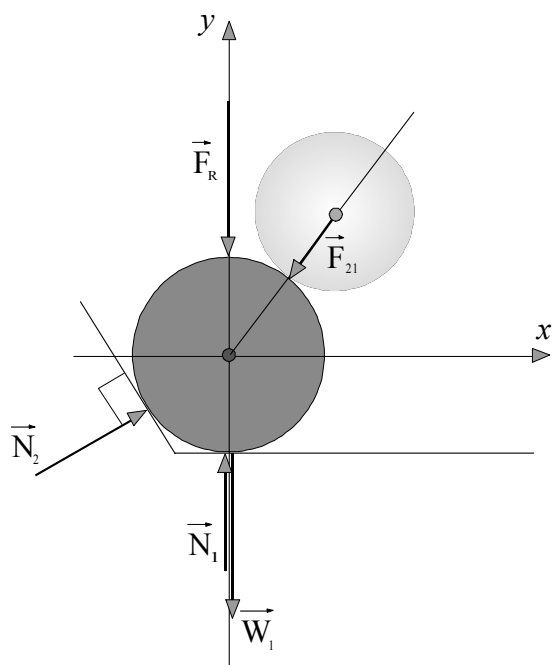
$$T = \frac{F_R + W_A (\sin \theta + \mu \cos \theta)}{(\cos \theta - \mu \sin \theta)} = \frac{500 \text{ N} + (300 \text{ N}) (\sin 30^\circ + (0.2) \cos 30^\circ)}{\cos 30^\circ - (0.2) \sin 30^\circ}$$

$$\boxed{T = 916.368 \text{ N}}$$

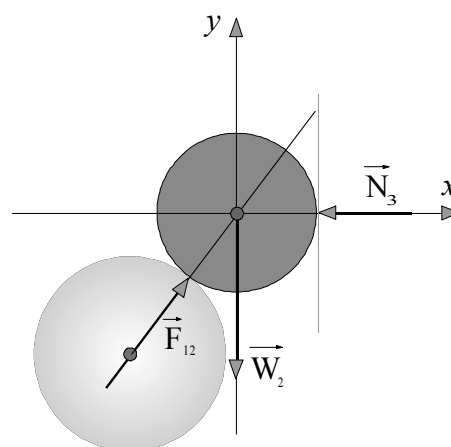
De la ec. (3):

$$\boxed{W_B = T = 916.368 \text{ N}}$$

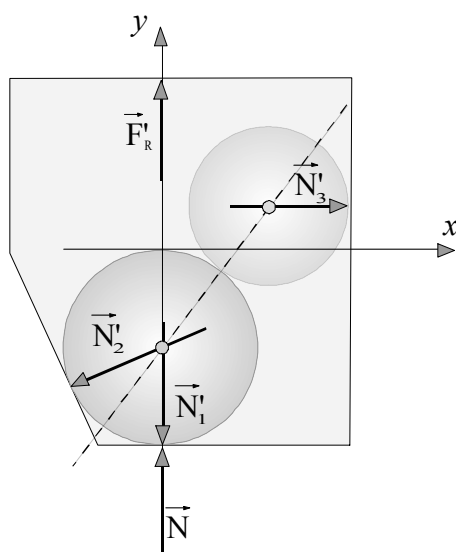
3. En los esquemas siguientes se muestran los diagramas solicitados.



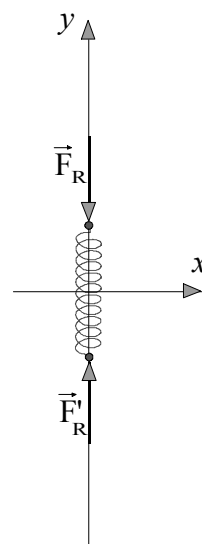
D.C.L. para el cilindro 1 (grande)



D.C.L. para el cilindro 2 (pequeño)



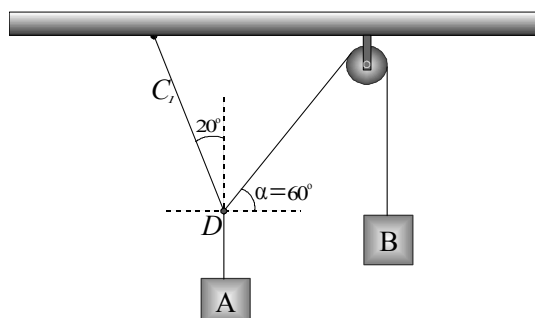
D.C.L. para la caja



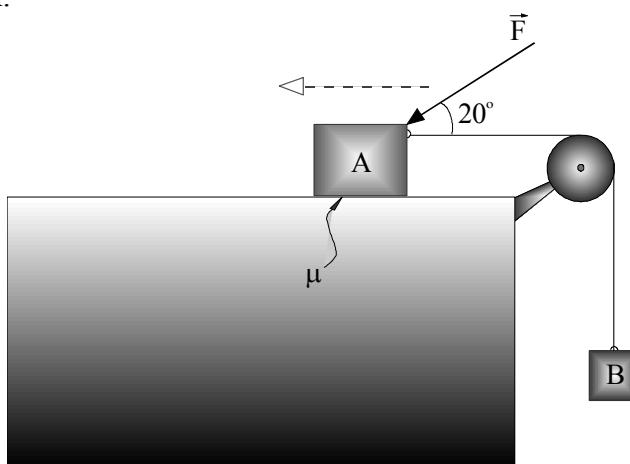
D.C.L. para el resorte

Versión 4.

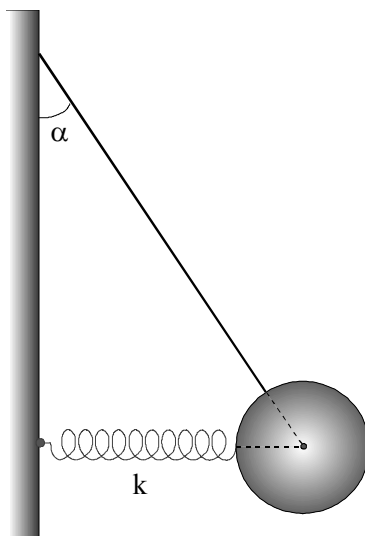
1. Las masas de los bloques A y B son de 180 kg y m_B respectivamente. Determinar el valor de la fuerza de tensión en el cable C_1 si el sistema se encuentra en equilibrio.



2. El bloque A esta a punto de moverse, sobre la mesa, hacia la izquierda. Si el peso del bloque B es de magnitud $W_B = 70 \text{ N}$, $F=100 \text{ N}$, $\mu = 0.1$. Calcular la fuerza de fricción y el peso del bloque A.



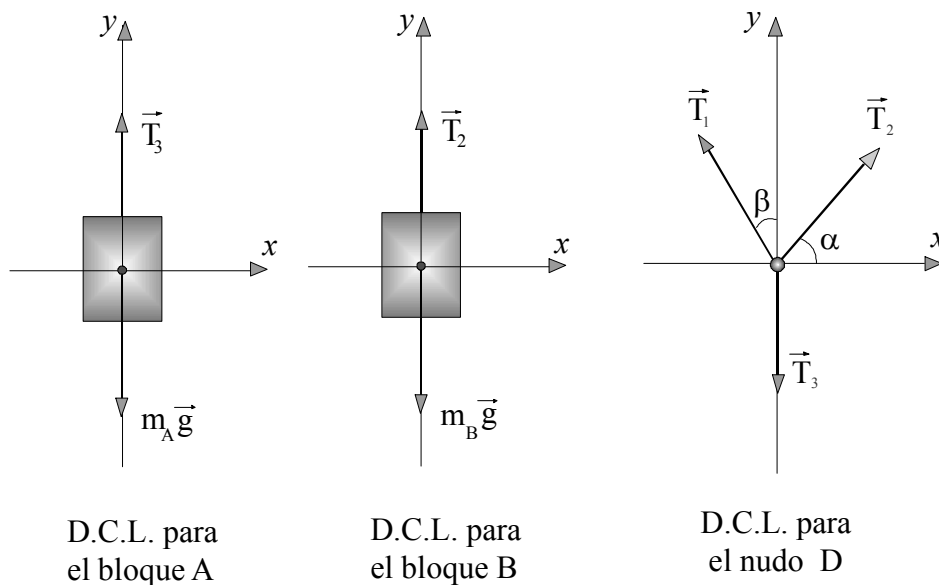
3. La esfera de peso P se encuentra en equilibrio y comprime al resorte, de constante elástica k, una cantidad x_0 . Construya el diagrama de cuerpo libre de dicha esfera.



Solución.

1. $m_A=180 \text{ kg}$, $\alpha=60^\circ$, $\beta=20^\circ$.

Con respecto al S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



Para el Bloque A:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_3 - m_A g = 0 \quad (1)$$

Para el bloque B:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_2 - m_B g = 0 \quad (2)$$

Para el Nudo D:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow T_2 \cos \alpha - T_1 \sin \beta = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 \cos \beta + T_2 \sin \alpha - T_3 = 0 \quad (4)$$

De la ec. (1):

$$T_3 = m_A g = (180 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\boxed{T_3 = 1764 \text{ N}}$$

De la ec. (4):

$$T_1 = \frac{T_3 - T_2 \sin \alpha}{\cos \beta} \quad (4')$$

Sustituyendo en la ec. (3):

$$T_2 \cos \alpha - \frac{T_3 - T_2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos \beta} \operatorname{sen} \beta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$T_2 \cos \alpha - T_3 \tan \beta + T_2 \operatorname{sen} \alpha \tan \beta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$T_2 (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \tan \beta) = T_3 \tan \beta \quad \Rightarrow$$

$$T_2 = \left(\frac{\tan \beta}{(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \tan \beta)} \right) T_3$$

$$T_2 = \left(\frac{\tan 20^\circ}{(\cos 60^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ \tan 20^\circ)} \right) (1764 \text{ N})$$

$$\boxed{T_2 = 787.582 \text{ N}}$$

De la ec. (2):

$$m_B = \frac{T_2}{g} = \frac{787.582 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 80.365 \text{ kg}$$

$$\boxed{m_B = 80.365 \text{ kg}}$$

Finalmente de la ec. (4'), tenemos:

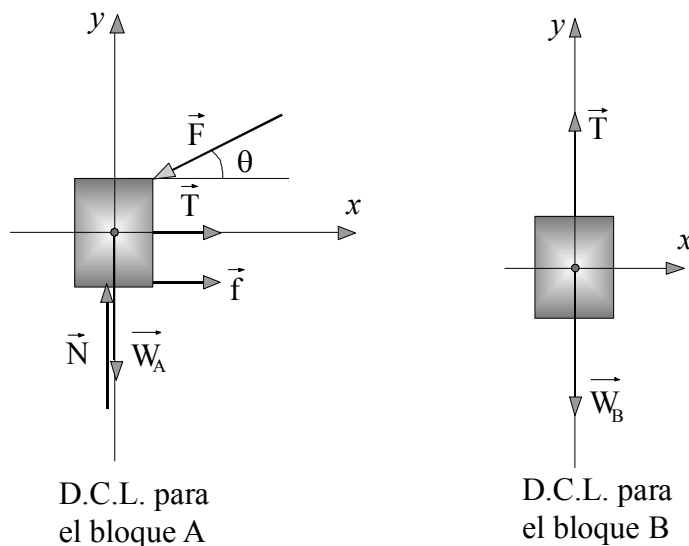
$$T_1 = \frac{T_3 - T_2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos \beta}$$

$$T_1 = \frac{1764 \text{ N} - (787.582 \text{ N})(\operatorname{sen} 60^\circ)}{\cos 20^\circ}$$

$$\boxed{T_1 = 1151.370 \text{ N}}$$

2. $W_B=70 \text{ N}$, $F=100 \text{ N}$, $\mu=0.1$, $\theta=20^\circ$.

Respecto del S. R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



Para el bloque A:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow T + f - F \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - F \sin \theta - W_A = 0 \quad (2)$$

Para el bloque B:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T - W_B = 0 \quad (3)$$

Además se debe cumplir:

$$f = \mu N \quad (4)$$

De la ec. (3):

$$\boxed{T = W_B = 70 \text{ N}}$$

Sustituyendo la ec. (4) en (1):

$$T + \mu N - F \cos \theta = 0 \Rightarrow N = \frac{F \cos \theta - T}{\mu} = \frac{(100 \text{ N}) \cos 20^\circ - 70 \text{ N}}{0.1},$$

$$\boxed{N = 239.692 \text{ N}}$$

De la ec. (4):

$$f = 0.1(239.692 \text{ N}),$$

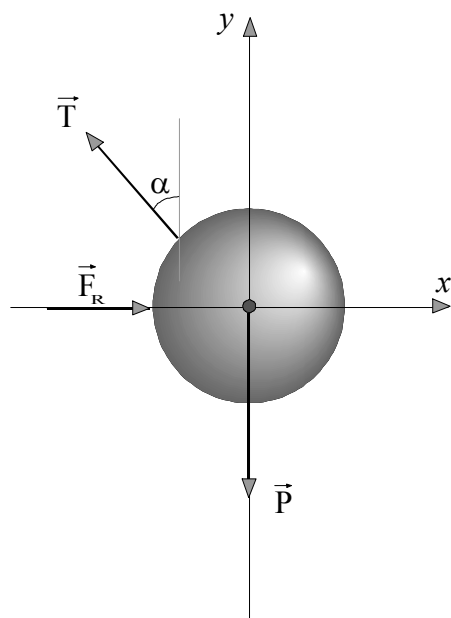
$$\boxed{f = 23.9692 \text{ N}}$$

De la ec. (2):

$$W_A = N - F \operatorname{sen} \theta = 239.692 \text{ N} - (100 \text{ N}) \operatorname{sen} 20^\circ$$

$$W_A = 205.489 \text{ N}$$

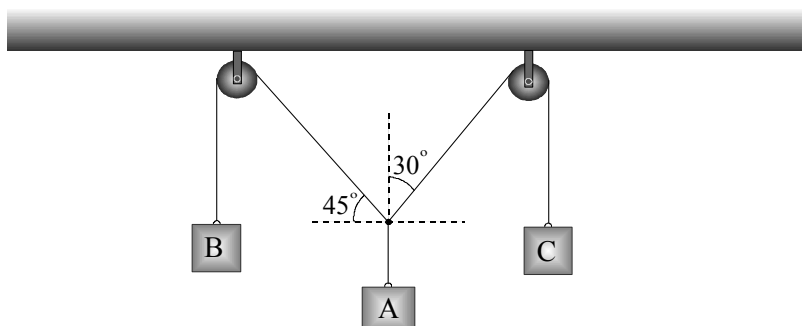
3. D.C.L. de la esfera de peso P.



D.C.L. de la esfera
de peso P

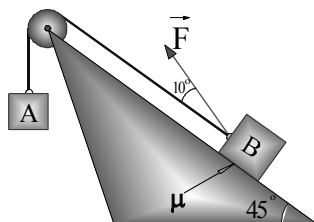
Versión 5.

1. Al bloque A, cuyo peso es de 120 N, se le obliga a permanecer en la posición mostrada. Determinar los pesos de los bloques B y C respectivamente.

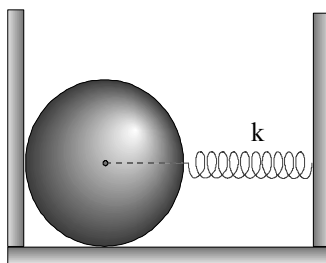


2. El bloque B, cuyo peso es de 100 N, está a punto de moverse hacia arriba del plano inclinado. Calcular la fuerza de fricción y el peso del bloque A.

$$P_B = 100 \text{ N}, F = 20 \text{ N}, \mu = 0.15.$$



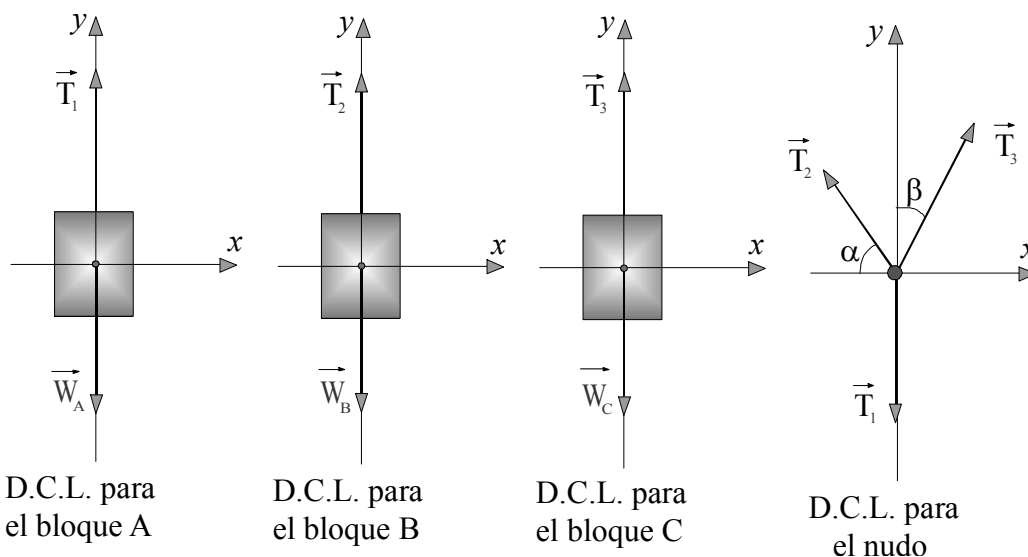
3. La esfera de peso P se encuentra en equilibrio comprimiendo al resorte, de constante k , la cantidad x_0 . Construya el diagrama de cuerpo libre de dicha esfera. Desprecie toda fuerza de fricción.



Solución

1. $W_A=120 \text{ N}$, $\alpha=45^\circ$, $\beta=30^\circ$.

Con respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



Para el bloque A:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 - W_A = 0 \quad (1)$$

Para el bloque B:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_2 - W_B = 0 \quad (2)$$

Para el bloque C:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_3 - W_C = 0 \quad (3)$$

Para el Nudo:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_3 \sin \beta - T_2 \cos \alpha = 0 \\ T_2 \sin \alpha + T_3 \cos \beta - T_1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(5)$$

De la ec. (1):

$$T_1 = W_A$$

$$\boxed{T_1 = 120 \text{ N}}$$

De la ec. (4):

$$T_2 = \frac{T_3 \sin \beta}{\cos \alpha} \quad (4')$$

Sustituyendo en la ec. (5):

$$\frac{T_3 \sin \beta}{\cos \alpha} \sin \alpha + T_3 \cos \beta - T_1 = 0 \Rightarrow$$

$$T_3 (\sin \beta \tan \alpha + \cos \beta) = T_1 \Rightarrow$$

$$T_3 = \frac{T_1}{(\sin\beta \tan\alpha + \cos\beta)} = \frac{120 \text{ N}}{\sin 30^\circ \tan 45^\circ + \cos 30^\circ}$$

$$\boxed{T_3 = 87.846 \text{ N}}$$

De la ec. (4'):

$$T_2 = \frac{(87.846) \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ}$$

De la ec. (2):

$$W_B = T_2,$$

$$\boxed{T_2 = 62.116 \text{ N}}$$

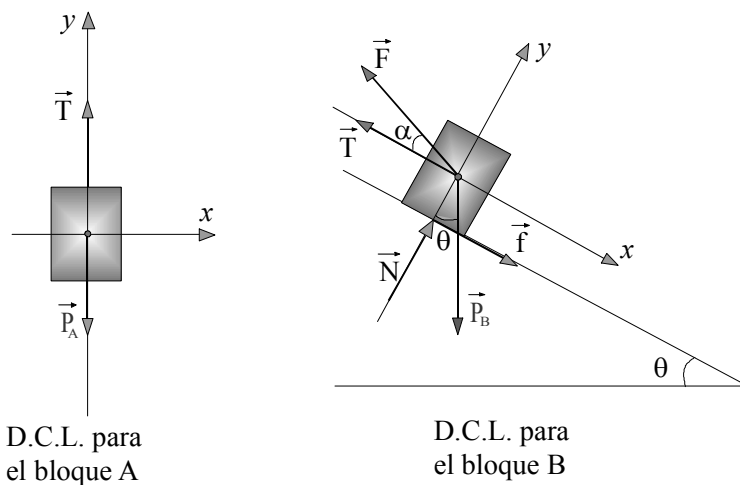
De la ec. (3):

$$T_3 = W_C,$$

$$\boxed{W_C = 87.846 \text{ N}}$$

2. $P_B = 100 \text{ N}$, $F = 20 \text{ N}$, $\mu = 0.15$, $\theta = 45^\circ$, $\alpha = 10^\circ$.

Con respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



Para el bloque A:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T - P_A = 0 \quad (1)$$

Para el bloque B:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f - T - F \cos \alpha + P_B \sin \theta = 0 \\ N + F \sin \alpha - P_B \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

Además se debe cumplir:

$$f = \mu N \quad (4)$$

De la ec. (3):

$$N = P_B \cos \theta - F \sin \alpha = (100\text{N}) \cos 45^\circ - (20\text{N}) \sin 10^\circ$$

$$\boxed{N = 67.237\text{N}}$$

De la ec. (4):

$$f = (0.15)(67.237\text{N}),$$

$$\boxed{f = 10.085\text{N}}$$

De la ec. (2):

$$T = f - F \cos \alpha + P_B \sin \theta = 10.085\text{N} - (20\text{N}) \cos 10^\circ + (100\text{N}) \sin 45^\circ$$

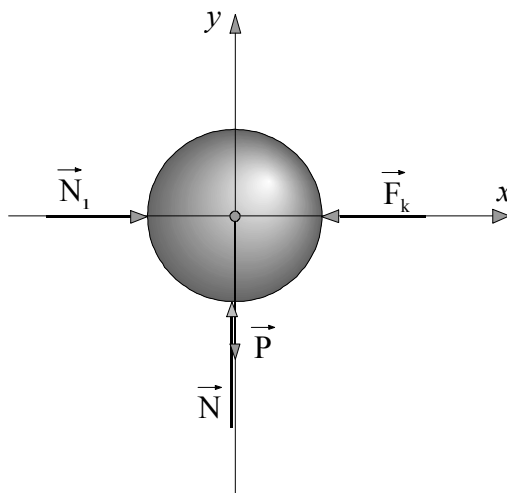
$$\boxed{T = 61.099\text{N}}$$

De la ec. (1):

$$P_A = T,$$

$$\boxed{P_A = 61.099\text{N}}$$

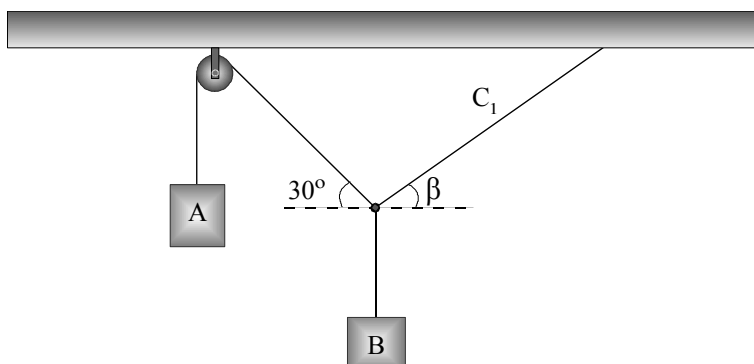
3.



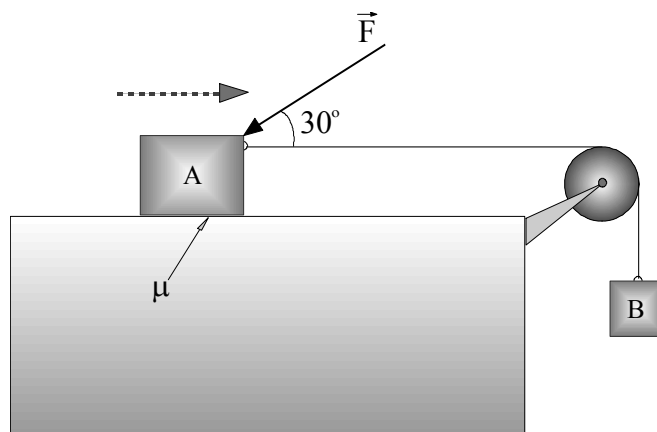
D.C.L. para la esfera
de peso P

Versión 6.

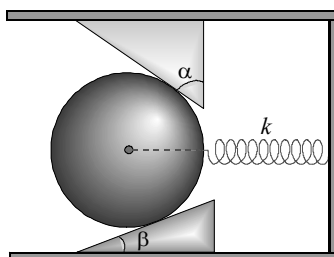
1. Las masas de los bloques A y B son de 75 kg y 100 kg respectivamente. Determinar el valor de β y la tensión en el cable C_1 si el sistema se encuentra en equilibrio.



2. El bloque A está a punto de moverse, sobre la mesa, hacia la derecha. Si el peso del bloque B es de 90 N, $F=70$ N, $\mu=0.15$. Calcular la fuerza de fricción y el peso del bloque A.



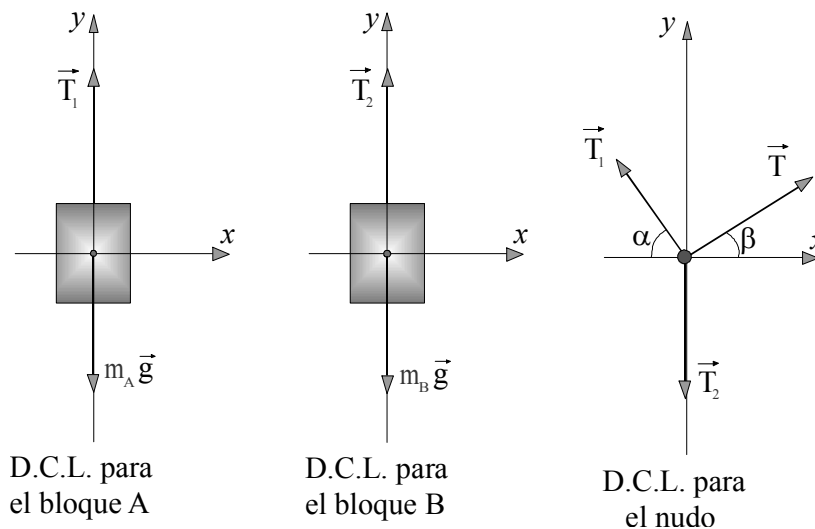
3. La esfera de peso P se encuentra en equilibrio. El resorte, de constante k , está estirado la cantidad x_0 . Exhiba el diagrama de cuerpo libre de la mencionada esfera. No considere fuerza de fricción.



Solución.

1. $m_A=75 \text{ kg}$, $m_B=100 \text{ kg}$, $\alpha=30^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



Para el bloque A:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 - m_A g = 0 \quad (1)$$

Para el bloque B:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_2 - m_B g = 0 \quad (2)$$

Para el Nudo:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \cos \beta - T_1 \cos \alpha = 0 \\ T \sin \beta + T_1 \sin \alpha - T_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

De la ec. (1):

$$T_1 = m_A g = (75 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

$$\boxed{T_1 = 735 \text{ N}}$$

De la ec. (2):

$$T_2 = m_B g = (100 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

$$\boxed{T_2 = 980 \text{ N}}$$

De la ec. (3):

$$T \cos \beta = T_1 \cos \alpha = (735 \text{ N}) \cos 30^\circ = 636.528 \text{ N} \quad (3')$$

De la ec. (4):

$$T \sin \beta = T_2 - T_1 \sin \alpha = 980 \text{ N} - (735 \text{ N}) \sin 30^\circ = 612.5 \text{ N} \quad (4')$$

Dividiendo (4') por (3').

$$\frac{T \sin \beta}{T \cos \beta} = \frac{612.5 \text{ N}}{636.528 \text{ N}} \Rightarrow \tan \beta = 0.962$$

$$\beta = \text{Arctan}(0.962) = 43.89^\circ \Rightarrow \boxed{\beta = 43.89^\circ}$$

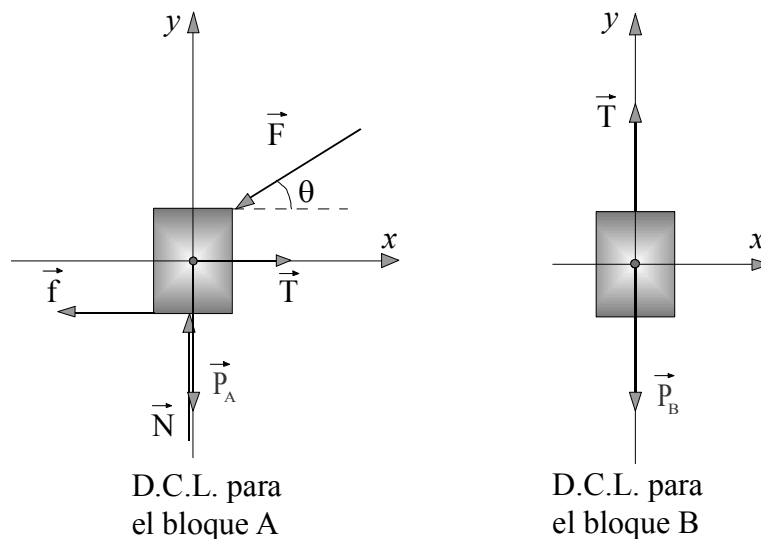
De la ec. (3'):

$$T = \frac{636.528 \text{ N}}{\cos \beta} = \frac{636.528 \text{ N}}{\cos(43.89^\circ)}$$

$$\boxed{T = 883.242 \text{ N}}$$

2. $P_B = 90 \text{ N}$, $F = 70 \text{ N}$, $\mu = 0.15$, $\theta = 30^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se requiere:



Para el bloque A:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - f - F \cos \theta = 0 \\ N - F \sin \theta - P_A = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Para el bloque B:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T - P_B = 0 \quad (3)$$

Además se debe cumplir:

$$f = \mu N \quad (4)$$

De la ec. (3):

$$T = P_B,$$

$$\boxed{T = 90 \text{ N}}$$

De la ec. (1):

$$f = T - F \cos \theta = 90 \text{ N} - (70 \text{ N}) \cos 30^\circ$$

$$\boxed{f = 29.37 \text{ N}}$$

De la ec. (4):

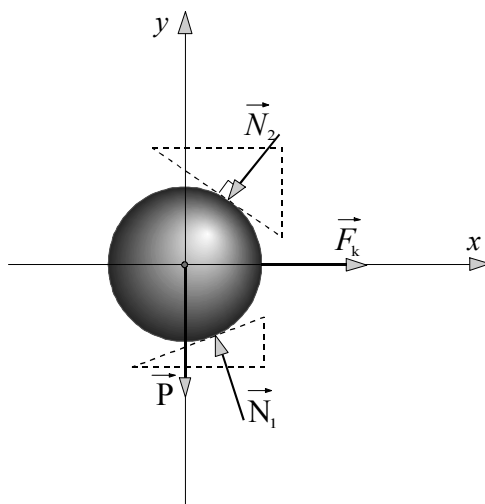
$$N = \frac{f}{\mu} = \frac{29.378 \text{ N}}{0.15} \quad \boxed{N = 195.853 \text{ N}}$$

De la ec. (2):

$$P_A = N - F \sin \theta = 195.853 \text{ N} - (70 \text{ N}) \sin 30^\circ$$

$$\boxed{P_A = 160.853 \text{ N}}$$

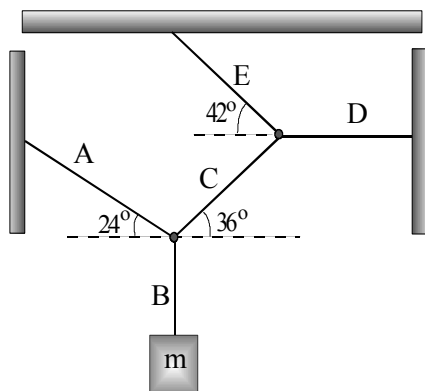
3.



D.C.L. de la esfera de peso P

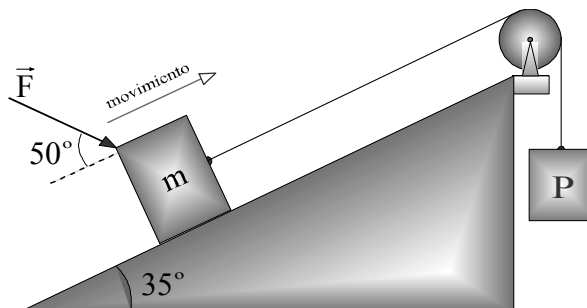
Versión 7.

1. Determinar la tensión en la cuerda D sabiendo que $m=600 \text{ kg}$.

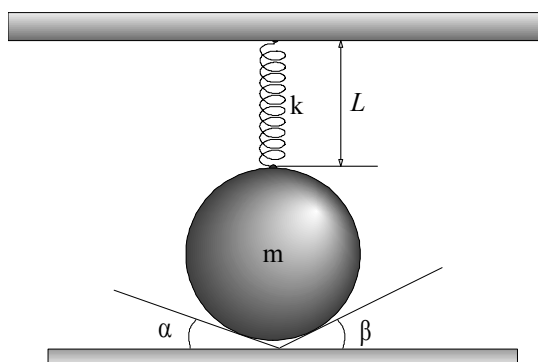


2. El bloque de la figura está en equilibrio y tiende a moverse en la dirección indicada.

Se dan: $F=100 \text{ N}$, $m=50 \text{ kg}$, $\mu = 0.3$. Calcule el peso P , la normal N y la fuerza de fricción f .



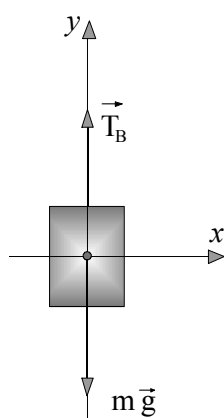
3. Haga el diagrama de cuerpo libre para el sistema de la figura sabiendo que el resorte se encuentra extendido.



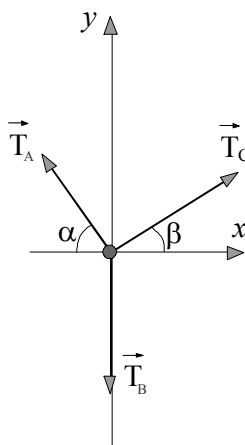
Solución.

1. $m=600 \text{ kg}$, $\alpha=24^\circ$, $\beta=36^\circ$, $\gamma=42^\circ$.

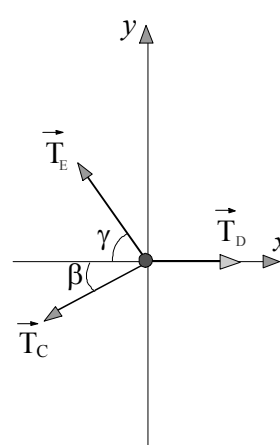
Con respecto al S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



D.C.L. para el bloque m



D.C.L. para el nudo 1



D.C.L. para el nudo 2

Para el bloque m:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_B - mg = 0 \quad (1)$$

Para el Nudo 1:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_C \cos \beta - T_A \cos \alpha = 0 \\ T_A \sin \alpha + T_C \sin \beta - T_B = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

Para el Nudo 2:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_D - T_C \cos \beta - T_E \cos \gamma = 0 \\ T_E \sin \gamma - T_C \sin \beta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(5)$$

De la ec. (1):

$$T_B = mg = (600 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

$$\boxed{T_B = 5880 \text{ N}}$$

De la ec. (2):

$$T_A = \frac{T_C \cos \beta}{\cos \alpha}$$

Sustituyendo en la ec. (3):

$$T_C \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha + T_C \sin \beta = T_B \Rightarrow$$

$$T_C = \frac{T_B}{\cos\beta \tan\alpha + \sen\beta} = \frac{5880 \text{ N}}{\cos 36^\circ \tan 24^\circ + \sen 36^\circ}$$

$$\boxed{T_C = 6202.644 \text{ N}}$$

De la ec. (5):

$$T_E = \frac{T_C \sen\beta}{\sen\gamma} = \frac{(6202.644 \text{ N}) \sen 36^\circ}{\sen 42^\circ}$$

$$\boxed{T_E = 5448.596 \text{ N}}$$

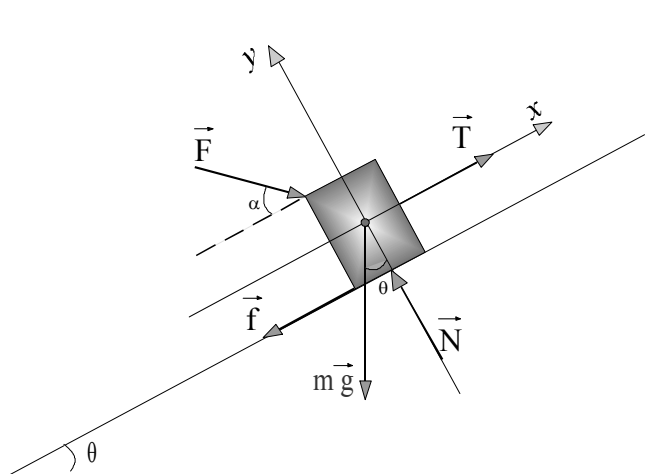
De la ec. (4):

$$T_D = T_C \cos\beta + T_E \cos\gamma = (6202.644 \text{ N}) \cos 36^\circ + (5448.596 \text{ N}) \cos 42^\circ$$

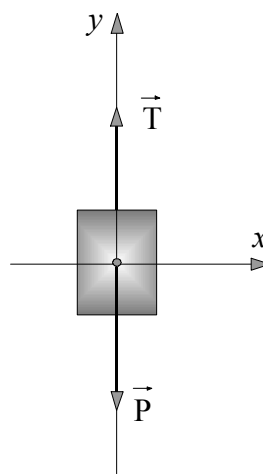
$$\boxed{T_D = 9067.14 \text{ N}}$$

2. $F = 100 \text{ N}$, $m = 50 \text{ kg}$, $\mu = 0.3$, $\theta = 35^\circ$, $\alpha = 50^\circ$.

Con respecto al S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



D.C.L. para el bloque m



D.C.L. para el bloque P

Para el bloque m:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - f + F \cos\alpha - mg \sen\theta = 0 \\ N - F \sen\alpha - mg \cos\theta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Para el bloque P:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T - P = 0 \quad (3)$$

Además se debe cumplir: $f = \mu N$ (4)

De la ec. (2):

$$N = F \sin \alpha + mg \cos \theta = (100 \text{ N}) \sin 50^\circ + (50 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cos 35^\circ$$

$$N = 477.988 \text{ N}$$

De la ec. (4):

$$f = \mu N = (0.3)(477.988 \text{ N})$$

$$f = 143.396 \text{ N}$$

De la ec. (1):

$$T = f - F \cos \alpha + mg \sin \theta = 143.396 \text{ N} - (100 \text{ N}) \cos 50^\circ + (50 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \sin 35^\circ$$

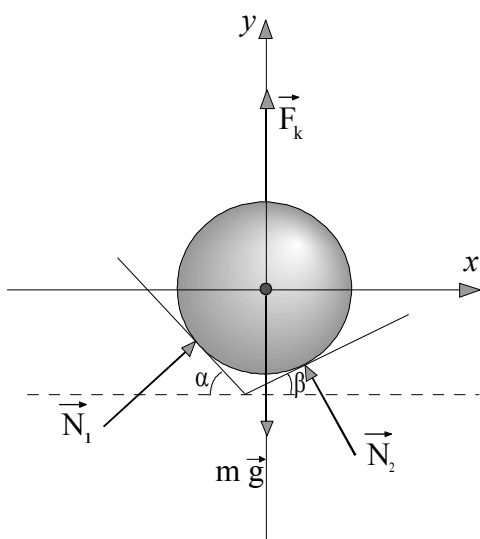
$$T = 360.17 \text{ N}$$

De la ec. (3):

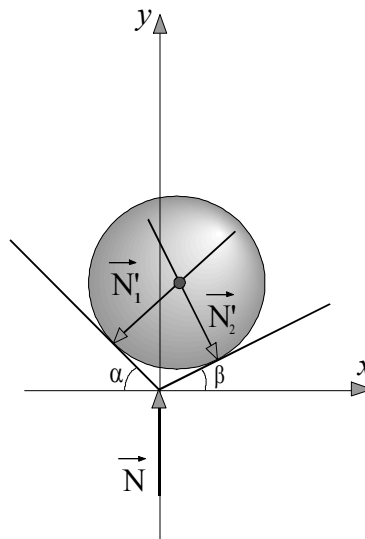
$$P = T$$

$$P = 360.17 \text{ N}$$

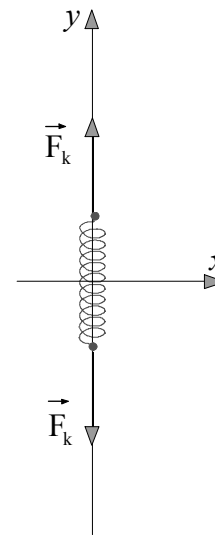
3.



D.C.L. para
la esfera m



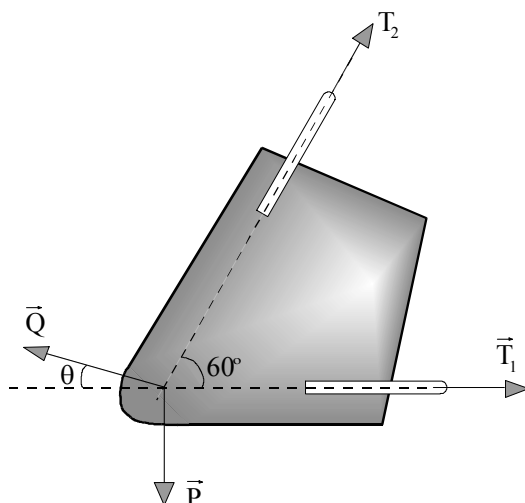
D.C.L. para
la caja



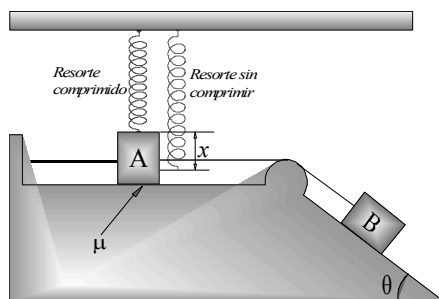
D.C.L. para
el resorte

Versión 8.

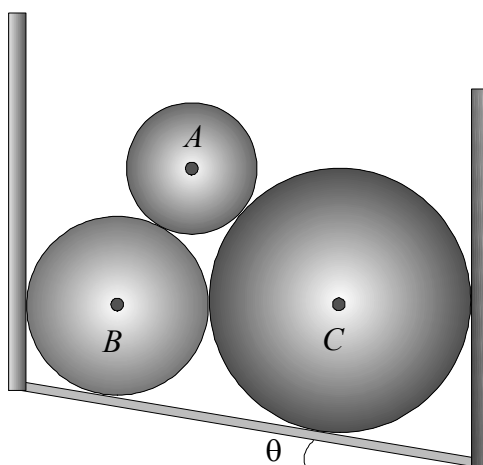
1. Dos fuerzas P y Q de magnitudes $P=1000\text{ N}$ y $Q=1200\text{ N}$, se aplican a la conexión (utilizada en aviones) mostrada en la figura. Si la conexión está en equilibrio determine las tensiones T_1 y T_2 , $\theta=15^\circ$.



2. El sistema de la figura está a punto de salir del equilibrio. Si $k=1800\text{ N/m}$, y $x=3\text{ cm}$, calcule las tensiones en los hilos para $\mu=0.2$, $P_A=50\text{ N}$, $P_B=160\text{ N}$, $\theta=45^\circ$.



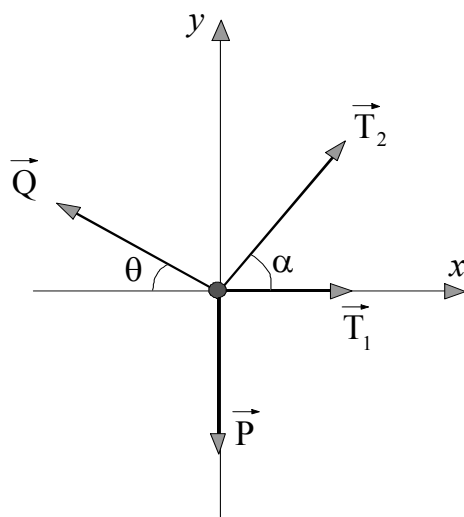
3. Haga el diagrama de cuerpo libre para cada uno de los cilindros del sistema en equilibrio de la figura. Especifique los pares de tipo acción-reacción entre los cilindros. ($m_A=400\text{ kg}$, $m_B=600\text{ kg}$, $m_C=900\text{ kg}$).



Solución.

1. $P=1000 \text{ N}$, $Q=1200 \text{ N}$, $\theta= 15^\circ$, $\alpha= 60^\circ$.

Con respecto al S.R. mostrado en la figura, para el equilibrio, se debe cumplir:



D.C.L. para
la conexión

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} T_1 + T_2 \cos \alpha - Q \cos \theta &= 0 \\ T_2 \sin \alpha + Q \sin \theta - P &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

De la ec. (2):

$$T_2 = \frac{P - Q \sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{1000 \text{ N} - (1200 \text{ N}) \sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$\boxed{T_2 = 796.07 \text{ N}}$$

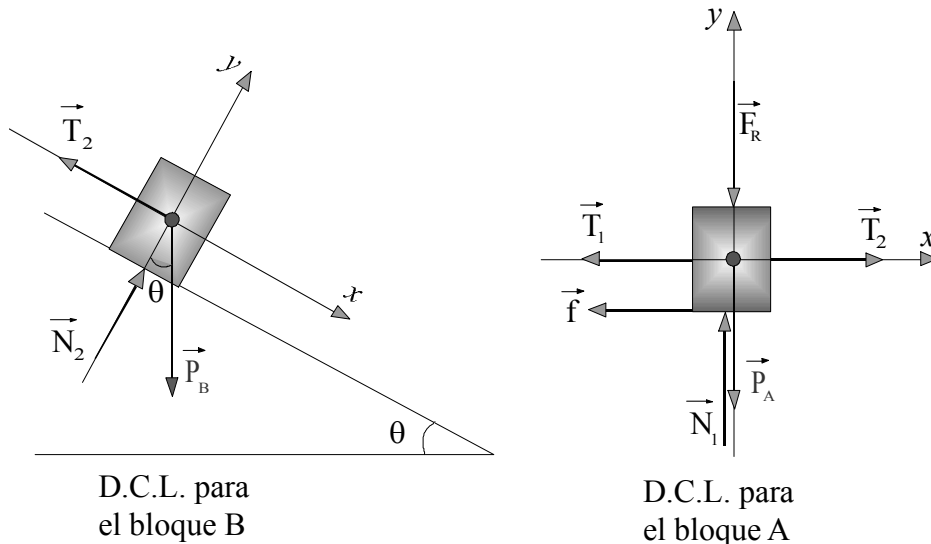
De la ec. (1):

$$T_1 = Q \cos \theta - T_2 \cos \alpha = (1200 \text{ N}) \cos 15^\circ - (796.07 \text{ N}) \cos 60^\circ$$

$$\boxed{T_1 = 761.076 \text{ N}}$$

2. $P_A=50 \text{ N}$, $P_B=160 \text{ N}$, $k=1800 \text{ N/m}$, $x=0.03 \text{ m}$, $\mu=0.2$, $\theta=45^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



Para el bloque A:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2 - T_1 - f = 0 \\ N_1 - F_R - P_A = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Para el bloque B:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_B \sin \theta - T_2 = 0 \\ N_2 - P_B \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

(4)

Además se debe cumplir:

$$f = \mu N_1, \quad (5)$$

y

$$F_R = kx \quad (6)$$

De (6):

$$F_R = (1800 \frac{\text{N}}{\text{m}})(0.03 \text{ m}) \quad \boxed{F_R = 54 \text{ N}}$$

De la ec. (3):

$$T_2 = P_B \sin \theta = (160 \text{ N}) \sin 45^\circ \quad \boxed{T_2 = 113.137 \text{ N}}$$

De la ec. (2):

$$N_1 = F_R + P_A = 54 \text{ N} + 50 \text{ N} = 104 \text{ N}$$

De la ec. (5):

$$f = \mu N_1 = (0.2)(104 \text{ N})$$

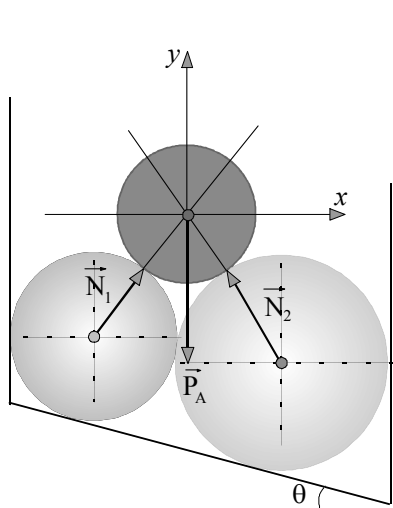
$$\boxed{f = 20.8 \text{ N}}$$

De la ec. (1):

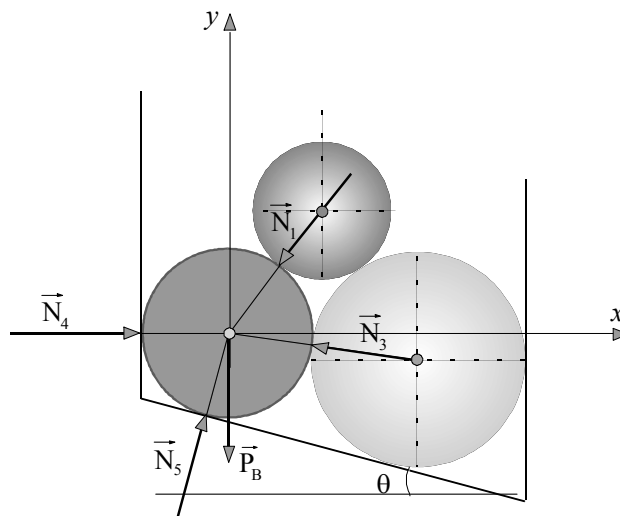
$$T_1 = T_2 - f = 113.137 \text{ N} - 20.8 \text{ N},$$

$$T_1 = 92.337 \text{ N}$$

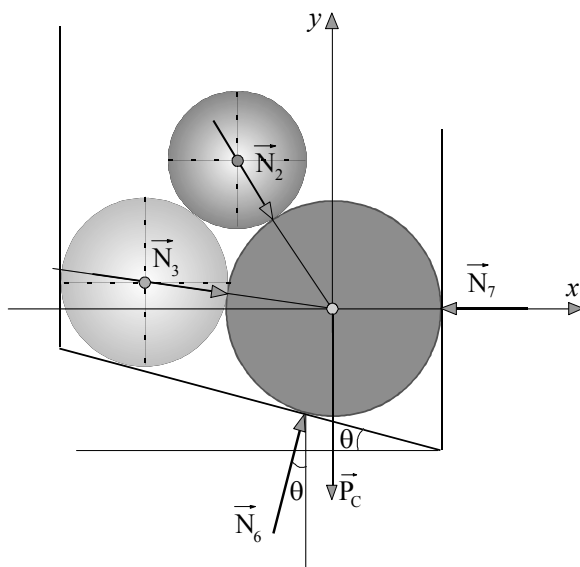
3.



D.C.L. para el
cilindro A



D.C.L. para el
cilindro B



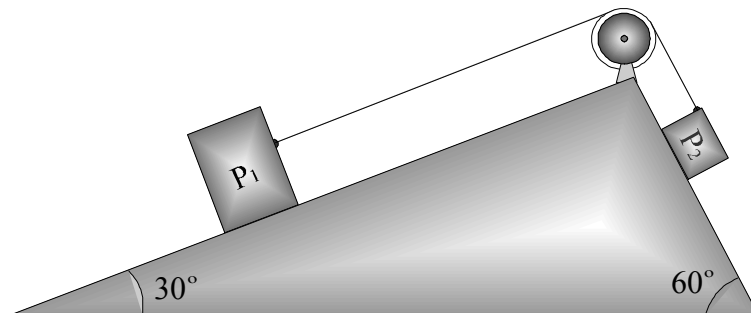
D.C.L. para el
cilindro C

donde:

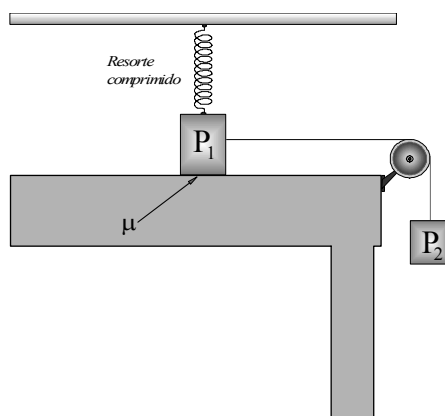
$$\vec{P}_A = m_A \vec{g}, \quad \vec{P}_B = m_B \vec{g}, \quad \vec{P}_C = m_C \vec{g}.$$

Versión 9.

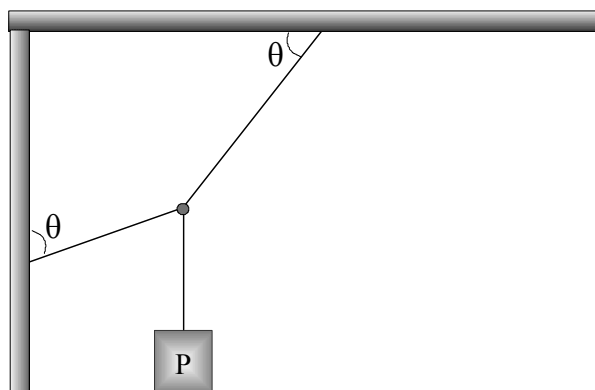
1. Se conecta un cuerpo de peso $P_1=1000\text{ N}$ con otro de peso P_2 mediante una cuerda que pasa sobre una polea ligera y sin fricción. El conjunto está en equilibrio sobre un par de superficies sin rozamiento como se muestra en la figura. Calcular P_2 .



2. El sistema de la figura está a punto de salir del equilibrio. Haga el diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo; escriba (sin resolver) las ecuaciones del equilibrio.



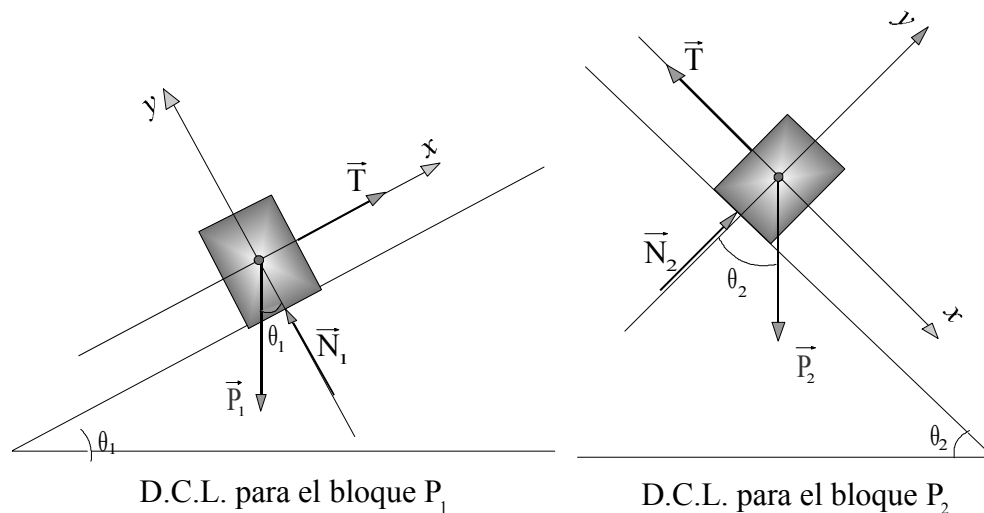
3. Calcule las tensiones para las cuerdas de soporte mostradas en la figura. ($m_p=500\text{ kg}$, $\theta=60^\circ$).



Solución.

1. $P_1=1000 \text{ N}$, $\theta_1=30^\circ$, $\theta_2=60^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



Para el bloque P_1 :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} T - P_1 \sin \theta_1 &= 0 \\ N_1 - P_1 \cos \theta_1 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Para el bloque P_2 :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} P_2 \sin \theta_2 - T &= 0 \\ N_2 - P_2 \cos \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

De la ec. (1):

$$T = P_1 \sin \theta_1 = (1000 \text{ N}) \sin 30^\circ$$

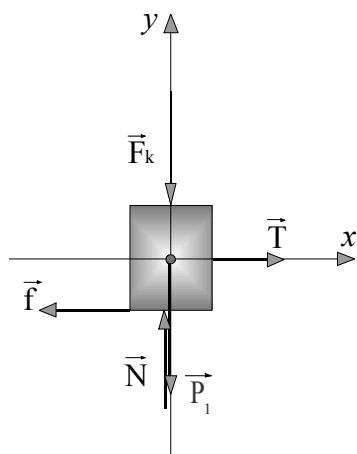
$$\boxed{T = 500 \text{ N}}$$

De la ec. (3):

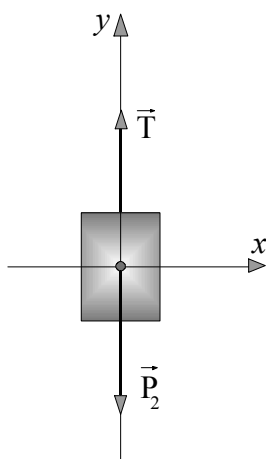
$$P_2 = \frac{T}{\sin \theta_2} = \frac{500 \text{ N}}{\sin 60^\circ}$$

$$\boxed{P_2 = 577.35 \text{ N}}$$

2. Respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se requiere:



D.C.L. para
el bloque P_1



D.C.L. para
el bloque P_2



Para el bloque P_1 :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} T - f &= 0 \\ N - F_k - P_1 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Para el bloque P_2 :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

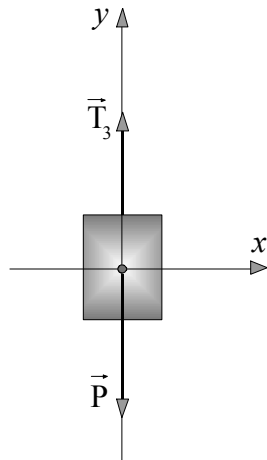
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T - P_2 = 0 \quad (3)$$

Además se debe cumplir:

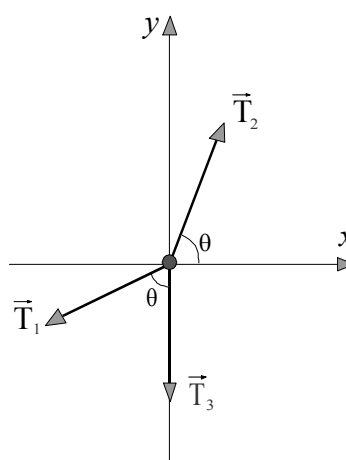
$$f = \mu N \quad (4)$$

3. $m_p=500 \text{ kg}$, $\theta=60^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



D.C.L. para
el bloque P



D.C.L. para
el nudo

Para el cuerpo P:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_3 - m_p g = 0 \quad (1)$$

Para el Nudo:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} T_2 \cos \theta - T_1 \sin \theta &= 0 \\ T_2 \sin \theta - T_1 \cos \theta - T_3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \\ (3) \end{aligned}$$

De la ec. (1):

$$T_3 = m_p g = (500 \text{ N}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\boxed{T_3 = 4900 \text{ N}}$$

De la ec. (2):

$$T_2 = \frac{T_1 \sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow T_2 = T_1 \tan \theta \quad (2')$$

Sustituyendo en la ec. (3):

$$T_1 = \frac{T_3}{\sin \theta \tan \theta - \cos \theta} = \frac{4900 \text{ N}}{\sin 60^\circ \tan 60^\circ - \cos 60^\circ}$$

$$\boxed{T_1 = 4900 \text{ N}}$$

De la ec. (2'):

$$T_2 = (4900 \text{ N}) \tan 60^\circ, \quad \boxed{T_2 = 8487.04 \text{ N}}$$

Segunda Parte



UNIDAD III

EQUILIBRIO DEL

CUERPO RÍGIDO

Objetivos

Se pretende que los alumnos:

- a) Entiendan el efecto de rotación producido por un conjunto de fuerzas equilibradas aplicadas a un cuerpo de geometría conocida.
- b) Entiendan el concepto de torca.
- c) Aprendan y apliquen las condiciones de equilibrio para un cuerpo cuya geometría se conoce.

Contenido

- 1. Definición de Cuerpo Rígido.
- 2. Condiciones de Equilibrio para un Cuerpo Rígido.
- 3. Centro de Gravedad.
- 4. Apoyos Simples y Articulados.

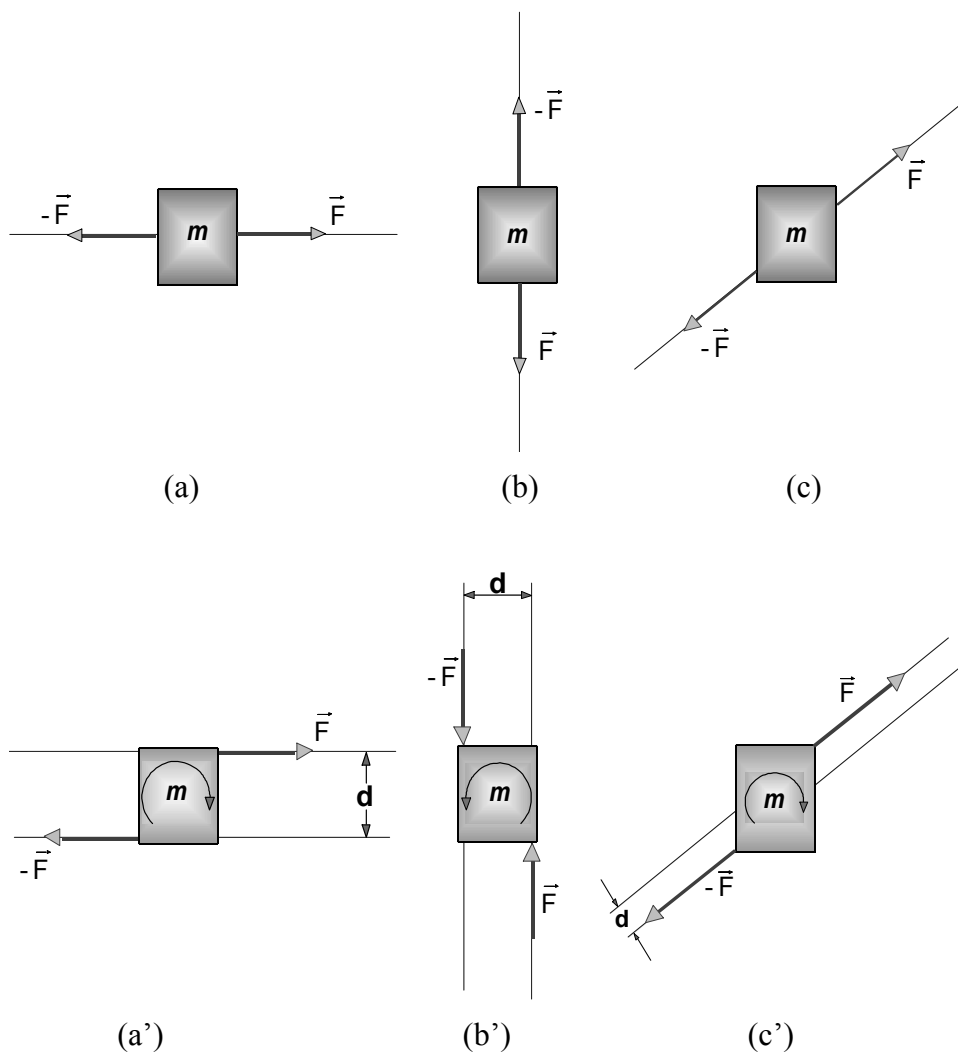
1. Definición de Cuerpo Rígido.

Diremos que un cuerpo de masa m es *un cuerpo rígido*, cuando:

- Su geometría y su distribución de masa no cambian bajo la aplicación de fuerzas.
- Las características de su movimiento dependen de las fuerzas aplicadas y de sus puntos de aplicación.

Momento de un Par

Consideremos un cuerpo rígido m bajo la acción de dos fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$; diremos que sobre m actúa un PAR. Supongamos que $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ se aplican como se muestra en las siguientes figuras:



Observemos que:

En todos los casos considerados se cumple que:

$$\sum \vec{F} = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0},$$

se dice que m se encuentra en equilibrio de traslación.

En los casos (a), (b), (c), las líneas de acción de $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ coinciden, se dice que son **Fuerzas colineales**, y se observa experimentalmente que m mantiene su estado de reposo. Diremos que m se encuentra en equilibrio de traslación y de rotación.

En los casos (a'), (b'), (c'), las líneas de acción de $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ no coinciden, están separadas la distancia d , se dice que las **Fuerzas son no colineales**, y se observa experimentalmente que m tiende a girar alrededor de un eje perpendicular al plano donde quedan contenidas, de tal forma que, en los casos (a') y (c') m tiende a girar en sentido de las manecillas del reloj mientras que en el caso (b') m tiende a girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Experimentalmente se observa que la tendencia de rotación de m es mayor para valores mayores de $|\vec{F}|$ y de d . En particular para $d=0$, es decir fuerzas colineales, m no presenta tendencia de rotación.

Se define **el momento del PAR** formado por $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ como la cantidad $\vec{M}$ cuya magnitud es:

$$M = |\vec{M}| = |\vec{F}| d.$$

Donde d es la distancia de separación de las líneas de acción de $\vec{F}$ y $-\vec{F}$.

Se considerará que el momento M es positivo si el par aplicado tiende a hacer girar a m en sentido contrario a las manecillas del reloj, y negativo en el caso contrario, es decir.

$$M = +|\vec{F}| d, \text{ si } m \text{ tiende a girar en sentido contrario al reloj.}$$

$$M = -|\vec{F}| d, \text{ si } m \text{ tiende a girar en sentido del reloj.}$$

Experimentalmente se observa que el equilibrio de rotación de m se logra bajo la aplicación de pares, tales que:

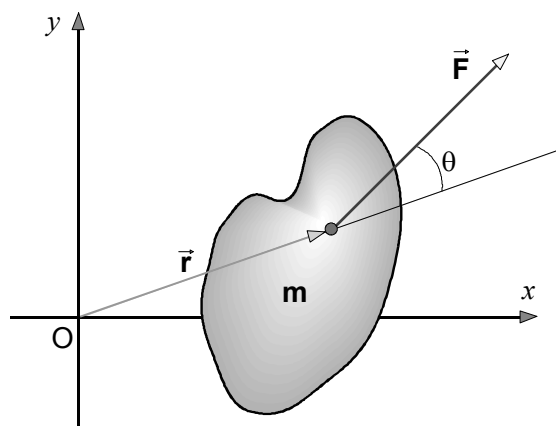
- a) Todos los pares sean coplanares.
- b) La suma algebraica de los momentos de los pares aplicados sea cero.

En el caso en que todas las fuerzas aplicadas a m sean coplanares, se dice que m se comporta como un cuerpo rígido plano.

Consideraremos el caso del equilibrio de cuerpos rígidos planos.

Definición de Torca.

Consideremos un cuerpo rígido m bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$. Respecto de un S.R. tal que $\vec{F}$ queda contenida en el plano XY, sea $\vec{r}$ la posición del punto de aplicación de $\vec{F}$.



Se define la **torca** ejercida por $\vec{F}$ sobre m , respecto de “O” (el origen del S.R. dado) como la cantidad $\vec{\tau}_O$, cuya magnitud está dada por:

$$|\vec{\tau}_O| = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin\theta.$$

Donde θ es el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{r}$.

Algunas observaciones sobre la torca.

I) Observemos que:

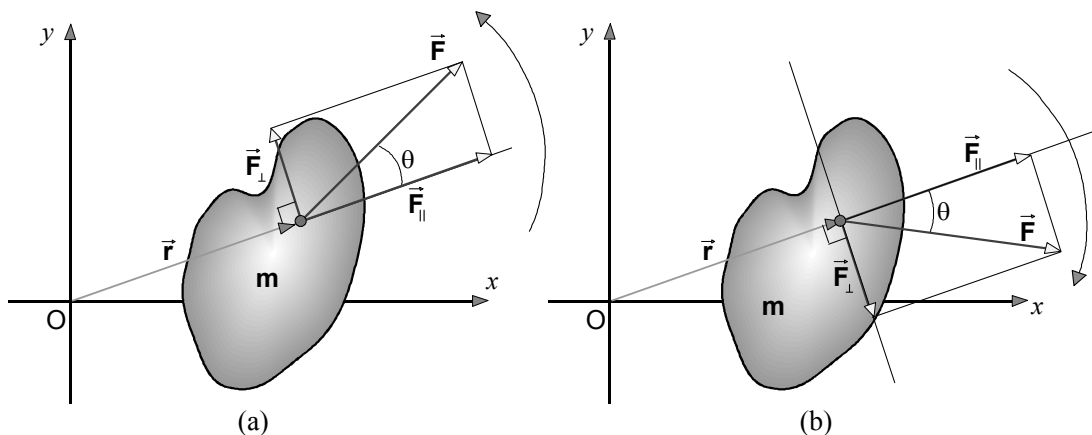
$$|\vec{\tau}_O| = F_{\perp} |\vec{r}|,$$

donde:

$$F_{\perp} = |\vec{F}| \sin\theta,$$

es la componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$.

Observar que, dependiendo de la orientación de $F_{\perp}$ respecto de $\vec{r}$, m tiende a girar, respecto de un eje que pasa por “O”, en sentido contrario a las manecillas del reloj (caso (a)) o en sentido de las manecillas del reloj (caso (b)).



En el primer caso, se dice que $\vec{\tau}_o$ es **positiva** y en el segundo caso **negativa**, es decir:

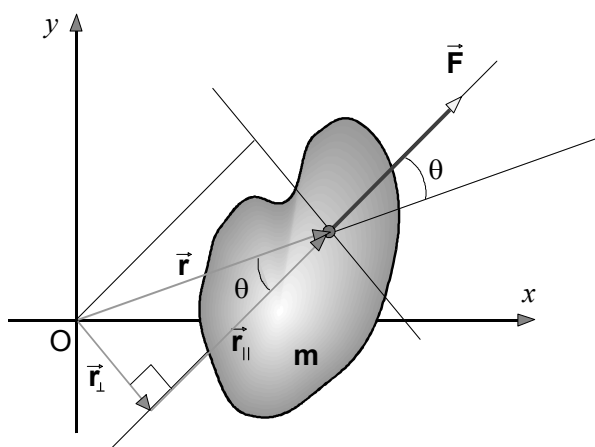
$$|\vec{\tau}_o| = +F_{\perp} |\vec{r}| = + (F \sin \theta) |\vec{r}|, \text{ } m \text{ tiende a girar en } \textit{sentido contrario al reloj};$$

$$|\vec{\tau}_o| = -F_{\perp} |\vec{r}| = - (F \sin \theta) |\vec{r}|, \text{ } m \text{ tiende a girar en } \textit{sentido del reloj}.$$

II) Observar que:

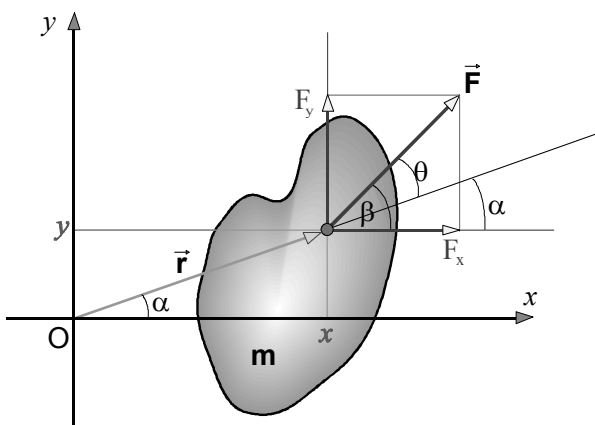
$$|\vec{\tau}_o| = |\vec{F}| r_{\perp}$$

donde $r_{\perp} = |\vec{r}| \sin \theta$ es la componente de $\vec{r}$ perpendicular a $\vec{F}$; a $r_{\perp}$ se le llama el brazo de palanca de $\vec{F}$.



III) Dado el S.R. "O", sean:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \text{ y } \vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j}.$$



Obsérvese que:

$$|\vec{\tau}_o| = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin \theta = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin(\beta - \alpha) = |\vec{F}| |\vec{r}| (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha)$$

$$|\vec{\tau}_o| = (|\vec{F}| \sin \beta) (|\vec{r}| \cos \alpha) - (|\vec{F}| \cos \beta) (|\vec{r}| \sin \alpha) = F_y x - F_x y,$$

es decir:

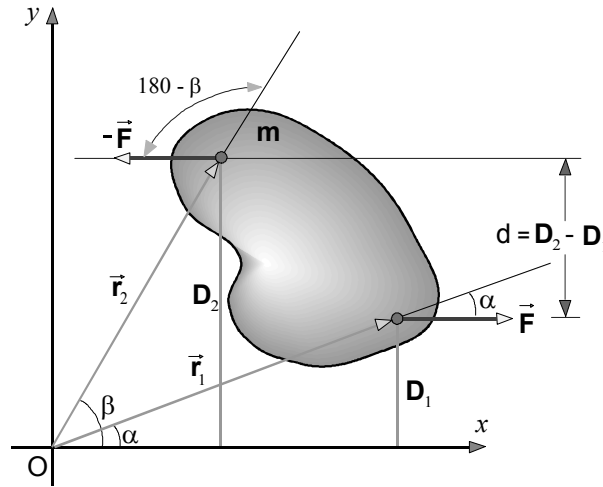
$$|\vec{\tau}_O| = F_y x - F_x y = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}.$$

IV) Relación entre el **momento de un par** $\vec{F}$, $-\vec{F}$ y la **torca ejercida por las fuerzas** $\vec{F}$ y $-\vec{F}$.

Consideremos un cuerpo m sometido a un par $\vec{F}$ y $-\vec{F}$.

Tomemos un S.R. tal que: $\vec{F} = F \hat{i}$, $-\vec{F} = -F \hat{i}$,

y sean $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ las posiciones de los puntos de aplicación de las fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$.



Las torcas ejercidas por $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ sobre m , respecto de “O” son:

$$\tau_1 = |\vec{F}| |\vec{r}_1| \operatorname{sen} \alpha \quad \text{y}$$

$$\tau_2 = |-\vec{F}| |\vec{r}_2| \operatorname{sen}(180^\circ - \beta) = |\vec{F}| |\vec{r}_2| (\operatorname{sen}(180^\circ) \cos(\beta) - \cos(180^\circ) \operatorname{sen}(\beta))$$

$$\tau_2 = |\vec{F}| |\vec{r}_2| \operatorname{sen} \beta.$$

Obsérvese que:

$$D_1 = |\vec{r}_1| \operatorname{sen} \alpha \quad \text{y} \quad D_2 = |\vec{r}_2| \operatorname{sen} \beta.$$

Entonces:

$$|\vec{\tau}_1| = D_1 |\vec{F}| \quad \text{y} \quad |\vec{\tau}_2| = D_2 |\vec{F}|.$$

Por otro lado el momento del par esta dado por:

$$M = |\vec{F}| d = |\vec{F}| (D_2 - D_1) = |\vec{F}| D_2 - |\vec{F}| D_1 = |\vec{\tau}_2| - |\vec{\tau}_1|.$$

Es decir, el momento del par $\vec{F}$, $-\vec{F}$ es igual a la suma algebraica de las torcas ejercidas por $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ sobre m , respecto de “O”.

Observar que la suma algebraica de las torcas producidas por $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ es la misma para cualquier sistema de referencia “O”, respecto del cual se calculen las torcas; la suma algebraica solo depende de $|\vec{F}|$ y d que son constantes en todos los S.R. Por lo tanto, la condición para el **equilibrio de rotación**:

“Que la suma algebraica de los momentos de todos los pares aplicados sea cero”,

es equivalente a:

“Que la suma algebraica de las torcas ejercidas por todas las fuerzas aplicadas sea cero, respecto de cualquier sistema de referencia ‘O’ ”

2. Condiciones de Equilibrio para un Cuerpo Rígido.

Consideremos un cuerpo rígido plano m y sean $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$, N **fuerzas coplanares** que actúan sobre él. Sea “O” el origen de **cualquier** sistema de referencia inercial tal que el plano x-y coincide con el plano de acción de las fuerzas, de tal forma que en ese S.R., $\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ son las posiciones de los puntos de aplicación de las N fuerzas y:

$$\begin{array}{ll} \vec{F}_1 = F_{1x} \hat{i} + F_{1y} \hat{j} & , \quad \vec{r}_1 = r_{1x} \hat{i} + r_{1y} \hat{j} \\ \vec{F}_2 = F_{2x} \hat{i} + F_{2y} \hat{j} & , \quad \vec{r}_2 = r_{2x} \hat{i} + r_{2y} \hat{j} \\ \vdots & \vdots \\ \vec{F}_N = F_{Nx} \hat{i} + F_{Ny} \hat{j} & , \quad \vec{r}_N = r_{Nx} \hat{i} + r_{Ny} \hat{j} \end{array}$$

Se dice que el cuerpo rígido m **se encuentra en equilibrio** cuando se cumple:

a) Condición para el equilibrio de Traslación:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^N F_{ix} = 0 \quad \text{ó} \quad F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{Nx} = 0 \\ \sum_{i=1}^N F_{iy} = 0 \quad \text{ó} \quad F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{Ny} = 0 \end{cases} .$$

b) Condición para el **equilibrio de Rotación**:

$$\sum_{i=1}^N |\vec{\tau}_i|_O = 0 \quad \text{ó} \quad |\vec{\tau}_1|_O + |\vec{\tau}_2|_O + \dots + |\vec{\tau}_N|_O = 0 .$$

Donde $|\vec{\tau}_i|_O$ es la torca ejercida por $\vec{F}_i$ sobre m respecto de “O”, para $i = 1, 2, \dots, N$, es decir:

$$|\vec{\tau}_i|_O = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ F_{xi} & F_{yi} \end{vmatrix} .$$

3. Centro de Gravedad.

Dado un cuerpo rígido de masa m sobre el que actúa la fuerza de gravedad terrestre, su centro de gravedad (C.G.) es un punto “del” cuerpo sobre el cual se considera que se concentra la acción de la fuerza $\vec{W}$, cuya magnitud es:

$$W = m g, \quad \text{con} \quad g = 9.8 \, \text{m/s}^2 = \text{cte.}$$

y cuya dirección y sentido es a lo largo de la vertical terrestre, dirigida hacia la superficie de la tierra

El C.G. de un cuerpo se puede determinar experimentalmente y se observa que si el cuerpo es homogéneo y presenta simetría respecto de un punto, un eje o plano; el C.G. es un punto de ese eje o plano y, en su caso, coincide con el punto de simetría.

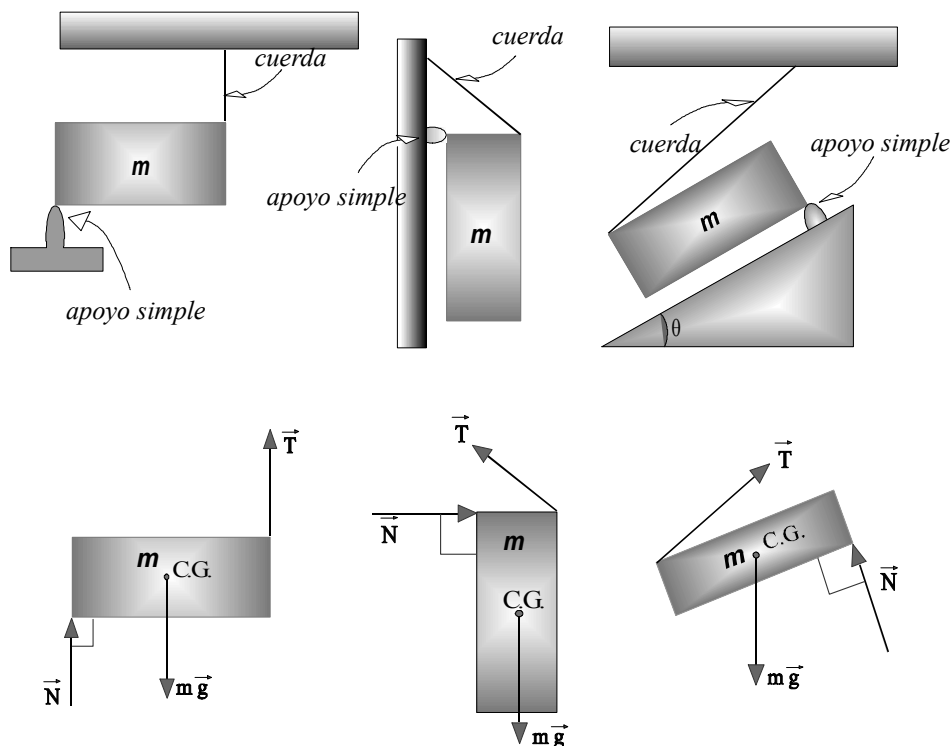
En todos los casos, consideraremos que el C.G. es conocido.

4. Apoyos Simples y Articulados.

Los apoyos son dispositivos a través de los cuales se pueden ejercer fuerzas sobre un cuerpo rígido. Consideraremos dos tipos de apoyos: *Apoyos simples* y *Apoyos articulados*.

a) Apoyo Simple.

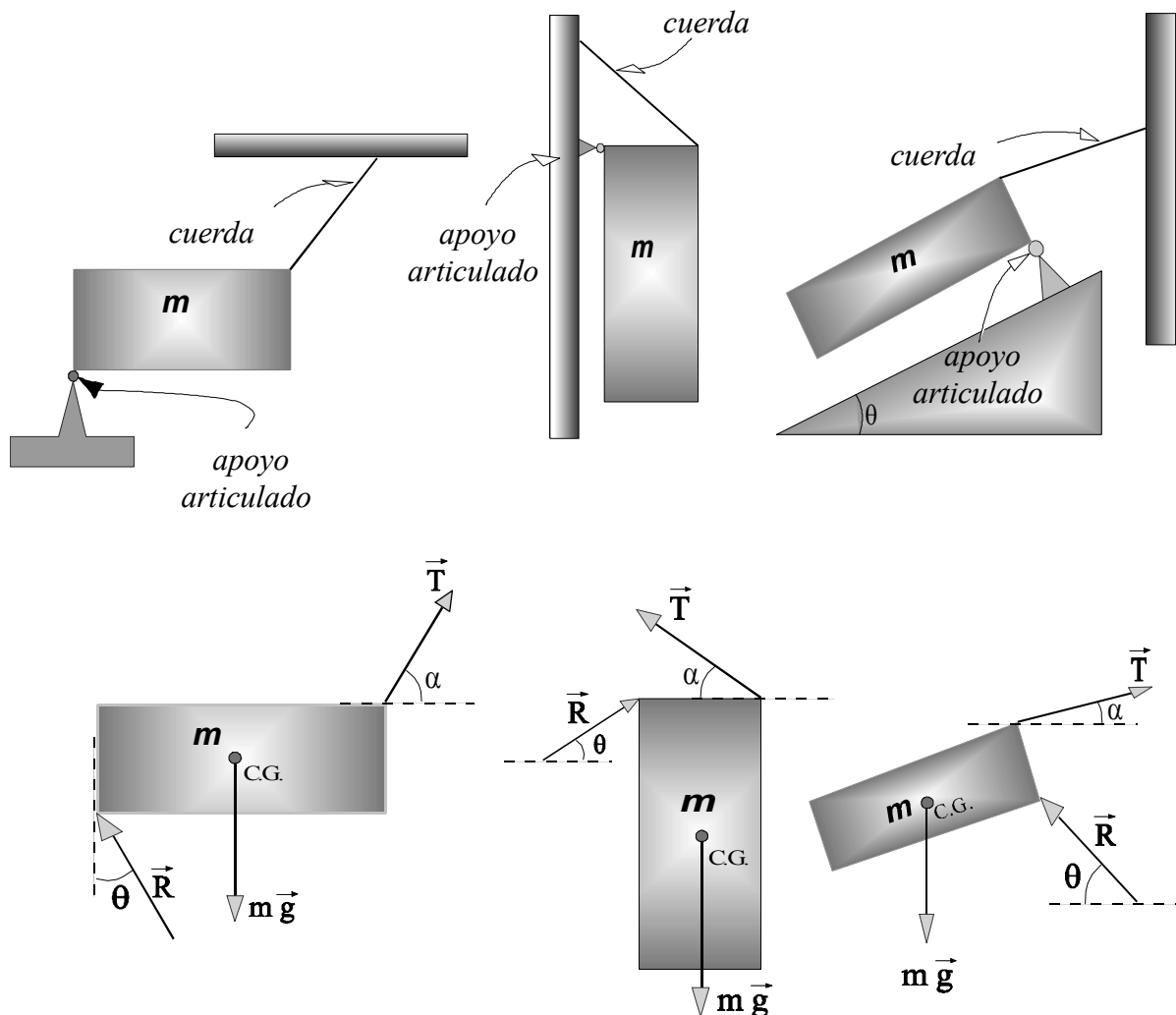
Cuando un cuerpo rígido m interacciona con otro a través de un apoyo simple, sobre m se ejerce, por contacto con el apoyo, una fuerza perpendicular a la superficie de m en el punto de contacto, en el sentido del apoyo hacia el cuerpo m , como se muestra en los siguientes casos:



En todos los casos, N es la fuerza ejercida por el apoyo simple sobre m .

b) Apoyo Articulado.

Cuando un cuerpo rígido m interacciona con otro a través de un apoyo articulado, sobre m se ejerce, por contacto con el apoyo, una fuerza cuya magnitud, dirección y sentido están indeterminados y quedan determinados por la distribución de otras fuerzas que actúen sobre m , como se muestra en los siguientes casos:

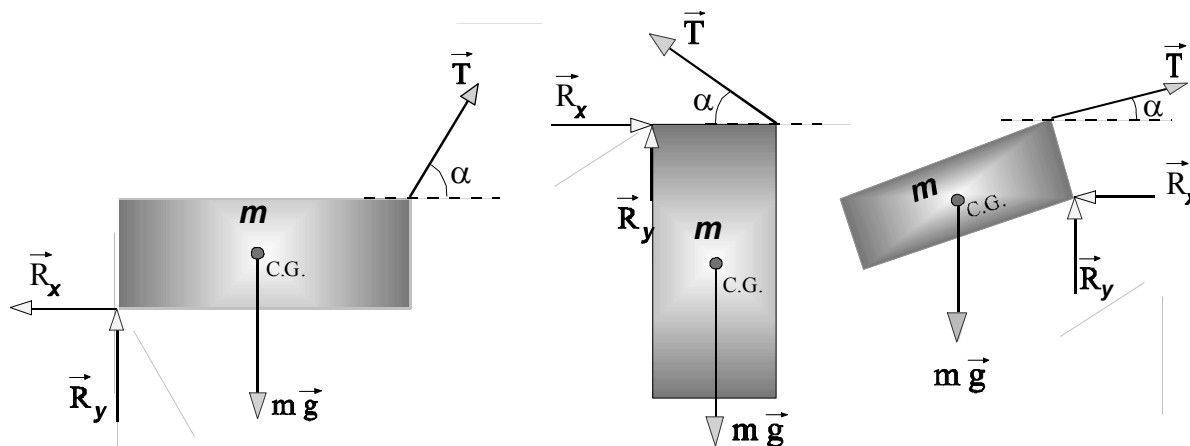


En todos los casos, $\vec{R}$ es la fuerza que el apoyo articulado ejerce sobre m . Tanto la magnitud de esa fuerza $|\vec{R}|$, como su ángulo de dirección θ , son desconocidos sus valores quedarán determinados por las ecuaciones de equilibrio de m . Al plantear las ecuaciones de equilibrio para m en términos de $|\vec{R}|$ y θ , se obtendrá un sistema de **ecuaciones no lineales** ya que θ se incorpora como una variable no lineal, p. e., en el primer caso de los ejemplos considerados, respecto de un S.R. usual, se tendría:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 &\Rightarrow & T \cos \alpha - R \sin \theta = 0 \\ \sum F_y &= 0 &\Rightarrow & T \sin \alpha + R \cos \theta - mg = 0.\end{aligned}$$

Dada la geometría del cuerpo, se podría plantear, además, la ecuación $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$, con lo cual se completaría el sistema de ecuaciones suficientes para calcular las incógnitas R , θ , T suponiendo conocidas m , g , α , el inconveniente de plantear las ecuaciones de equilibrio en términos de R y θ se observa al resolverlas para calcular θ pues el álgebra necesaria se puede complicar.

Es por eso que, de manera equivalente, se acostumbra suponer que el apoyo articulado ejerce sobre m una fuerza que presenta dos componentes cartesianas R_x y R_y , en lugar de R y θ , como se muestra en las siguientes figuras.

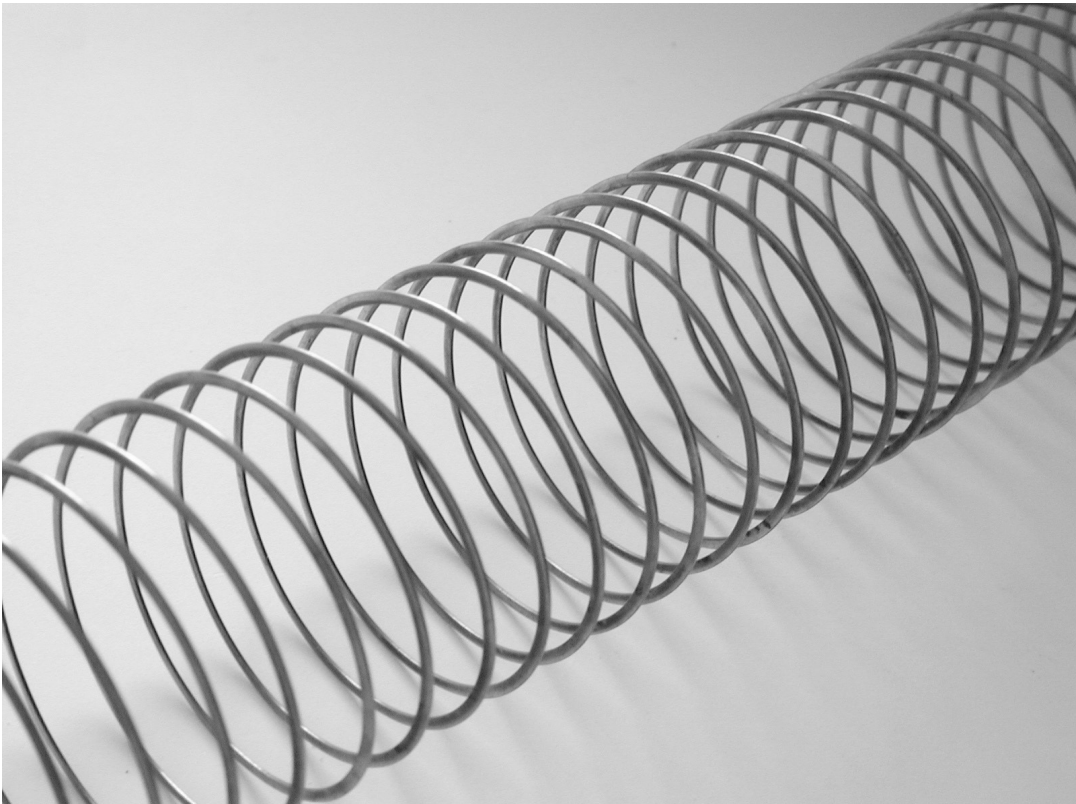


De esta forma, las ecuaciones de equilibrio de traslación en el primer caso son:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \Rightarrow T \cos \alpha - R_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & \Rightarrow T \sin \alpha + R_y - mg = 0.\end{aligned}$$

Ahora las incógnitas R_x , R_y , son variables lineales y su cálculo puede ser más simple. Ya calculadas R_x y R_y , se podrían calcular R y θ de la siguiente forma:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right).$$



UNIDAD IV

FUERZA ELASTICA

Objetivos

Se pretende que los alumnos:

- a) Entiendan que los cuerpos reales sufren deformaciones bajo la acción de fuerzas.
- b) Conozcan los diferentes tipos de deformaciones y sus características.
- c) Conozcan los fundamentos para el estudio de las deformaciones elásticas y lineales, en una y dos dimensiones.

Contenido

1. Cuerpos Deformables y Tipos de Deformación
2. Deformaciones Elásticas en una Dirección.
3. Deformaciones Elásticas en Dos Direcciones.

1. Cuerpos Deformables y Tipos de Deformación

Los cuerpos deformables son aquellos que bajo la acción de fuerzas, experimentan modificaciones geométricas.

Experimentalmente se observa que:

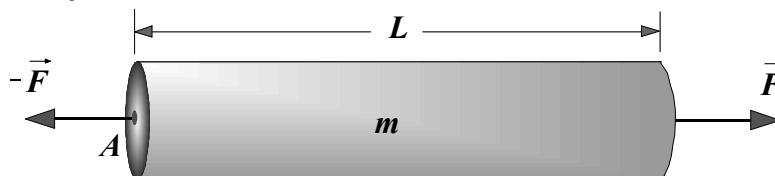
- En mayor o menor medida, todos los cuerpos reales son deformables.
- En mayor o menor medida, las deformaciones geométricas de los cuerpos están acompañadas de variaciones en la distribución de su masa, es decir la densidad del cuerpo cambia.
- Las características de las deformaciones de un cuerpo dependen de:
 - La magnitud de las fuerzas que sobre él actúan,
 - El material que configura al cuerpo,
 - La geometría original del cuerpo.
- Dependiendo de la acción de las fuerzas aplicadas, se observaran tres tipos de deformaciones:
 - Deformaciones volumétricas,
 - Deformaciones por flexión,
 - Deformaciones por torsión.

De tal forma que un cuerpo puede experimentar uno de esos tipos o combinaciones de esas deformaciones.

A continuación se ilustran cada uno de esos tipos de deformación, para esto, consideremos un cuerpo m de longitud L y área de sección transversal A , sometido a fuerzas en equilibrio.

Deformación volumétrica.

Cuerpo sometido a fuerzas de tracción.

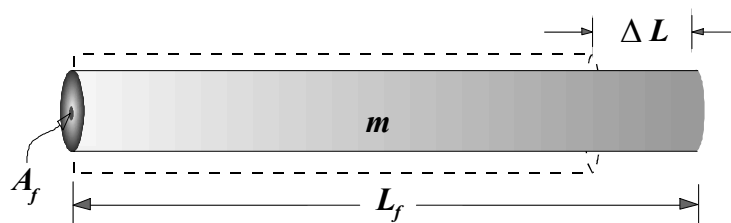


El cuerpo experimenta:

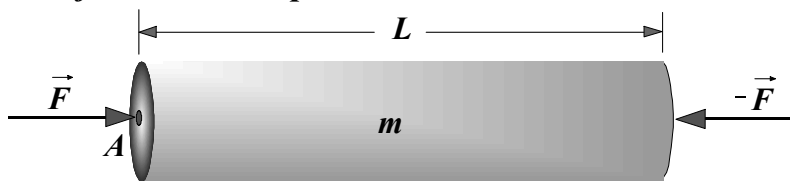
- Un alargamiento en la dirección de las fuerzas aplicadas, es decir:

$$L_f = L + \Delta L$$
- Una contracción transversal a la dirección de las fuerzas aplicadas, es decir:

$$A_f = A - \Delta A$$



Cuerpo sometido a fuerzas de compresión.

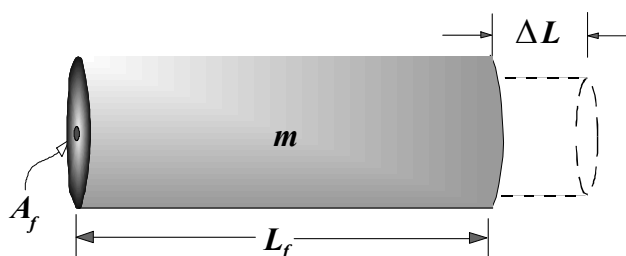


El cuerpo experimenta:

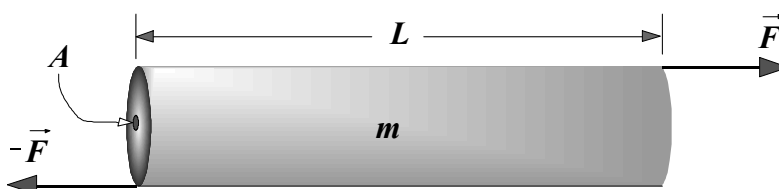
- Una contracción en la dirección de las fuerzas aplicadas, es decir:

$$L_f = L - \Delta L .$$
- Una expansión transversal a la dirección de las fuerzas aplicadas, es decir:

$$A_f = A + \Delta A$$

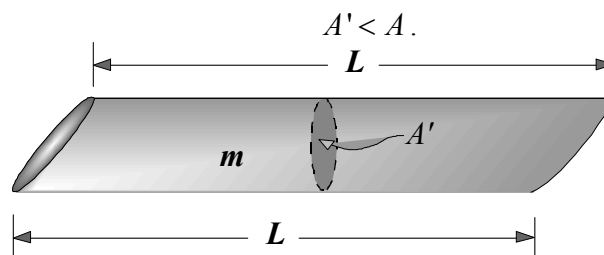


Cuerpo sometido a fuerzas cortantes de tracción o de compresión.



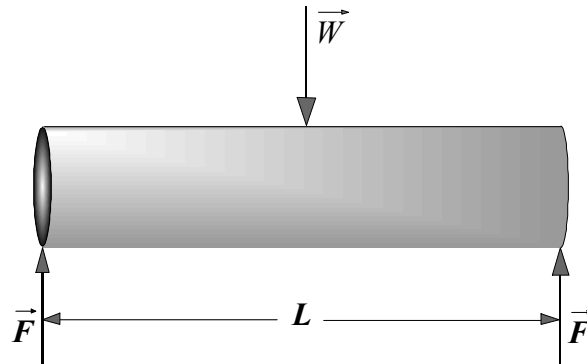
El cuerpo experimenta:

- Una deformación llamada de cizalladura, en la que se observa una contracción transversal, es decir:



ii) Deformaciones por Flexión.

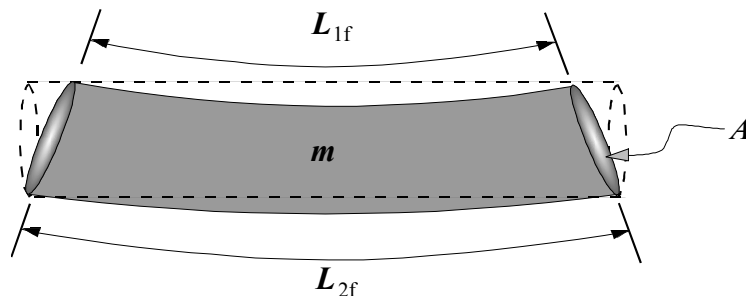
Cuerpo apoyado en sus extremos y sometido a una carga W en su centro.



El cuerpo experimenta una flexión cuya concavidad es en sentido contrario al de la carga, es decir:

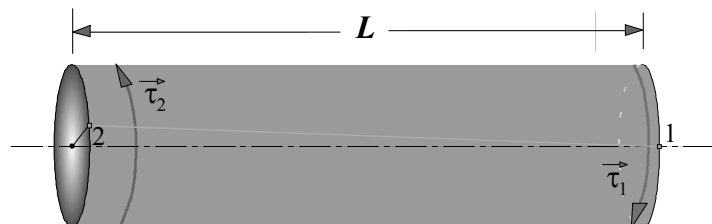
$$L_{1f} < L,$$

$$L_{2f} > L.$$

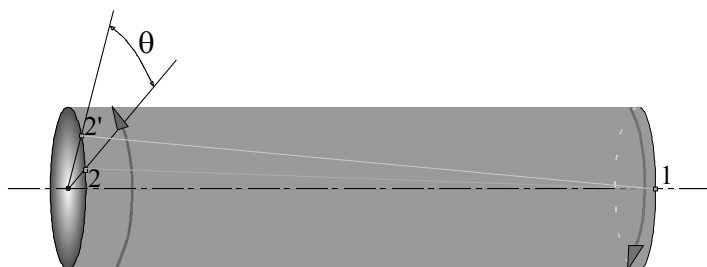


iii) Deformación por Torsión.

Cuerpo sometido a torcas aplicadas en sus extremos.



El cuerpo experimenta una torsión, es decir, el punto 2, respecto del 1, describe un desplazamiento angular θ hasta una posición 2', como se muestra en la siguiente figura.

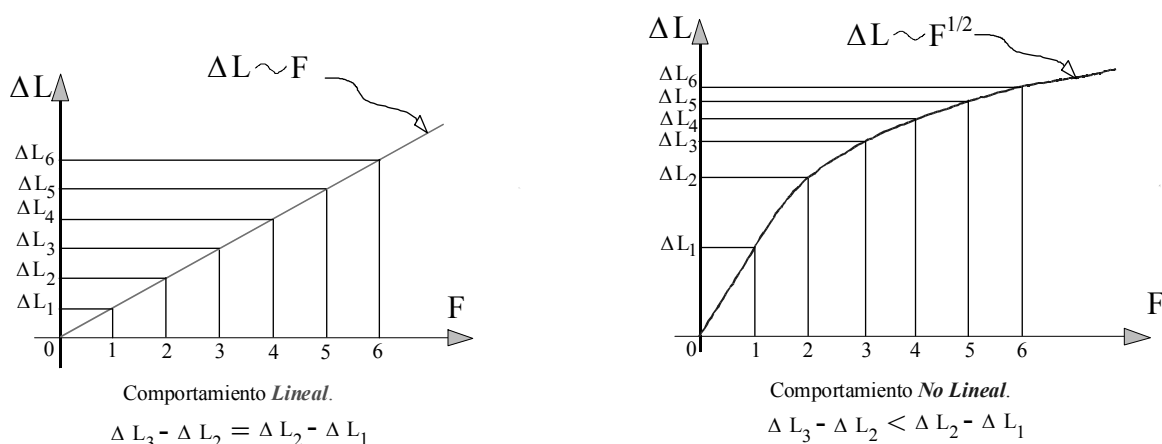


El comportamiento de los cuerpos, en lo referente a sus deformaciones, se clasifica bajo dos criterios, que son los siguientes.

- Con respecto a la relación entre las fuerzas aplicadas y la deformación producida, se dice que:

Un cuerpo Presenta un comportamiento **lineal** cuando la magnitud de la deformación es directamente proporcional a la magnitud de las fuerzas que la producen, en caso contrario, se dice que el cuerpo presenta un comportamiento **no lineal**.

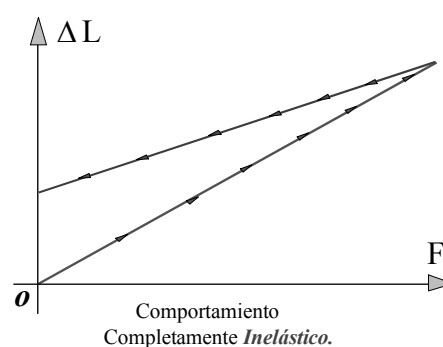
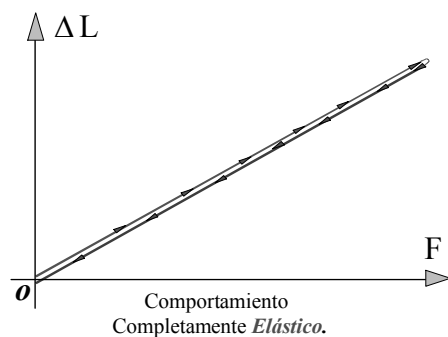
Por ejemplo, si consideramos la elongación longitudinal ΔL de un cuerpo sometido a fuerzas de tracción, $\vec{F}$, $-\vec{F}$; una grafica ΔL vs. F para comportamientos lineales y no lineales se observarían de la siguiente forma:



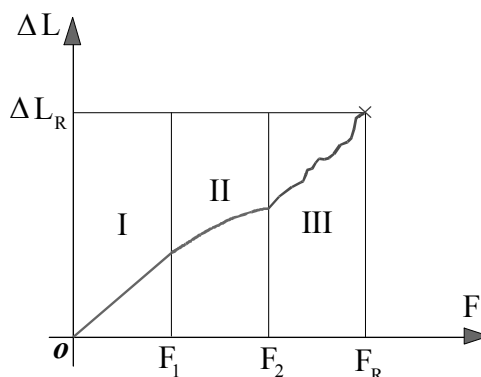
- Con respecto a la permanencia de la deformación.

Existen cuerpos para los cuales se observa que al liberarlos de las fuerzas que lo deforman, recuperan su forma original; en este caso, se dice que el cuerpo tiene un comportamiento **elástico**. En caso contrario, se dice que el cuerpo presenta un comportamiento **no elástico** o **plástico**.

Como ejemplo consideremos la elongación ΔL de un cuerpo sometido a fuerzas de tracción $\vec{F}$, $-\vec{F}$; gráficamente se tiene:



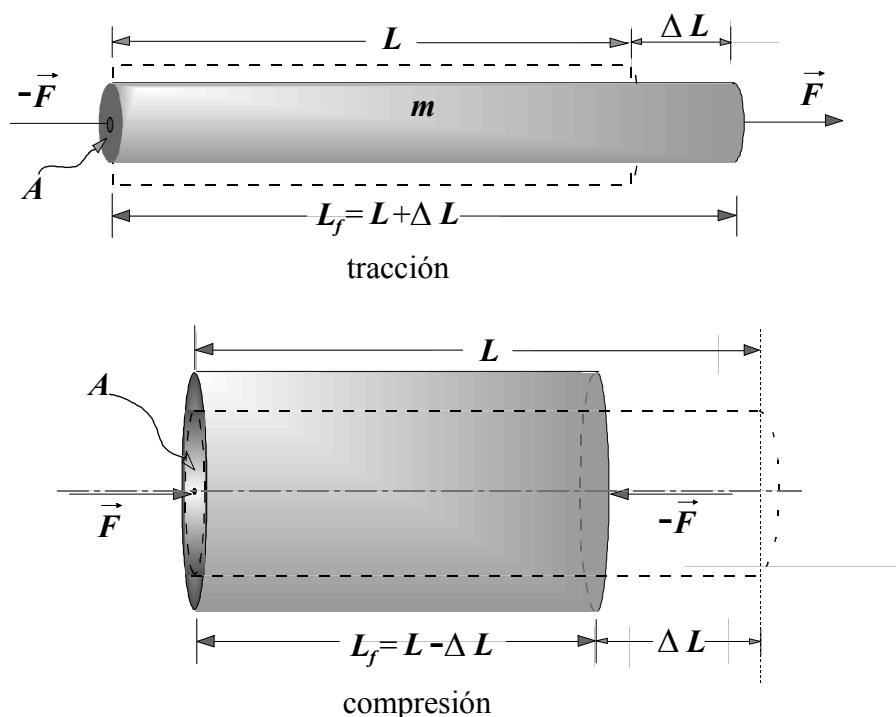
En general, las diferentes características de las deformaciones de los cuerpos, se manifiestan por intervalos de valores de la magnitud de las fuerzas aplicadas. Un comportamiento típico de la **elongación longitudinal** ΔL de un cuerpo sometido a fuerzas de tracción $\vec{F}$, $-\vec{F}$; se muestra en la siguiente gráfica.



- I. Para $0 \leq F \leq F_1$ Comportamiento **elástico y lineal**, F_1 es el límite de comportamiento lineal.
- II. Para $F_1 \leq F \leq F_2$ Comportamiento elástico y no lineal. F_2 es el límite de comportamiento elástico.
- III. Para $F_2 \leq F \leq F_R$. Comportamiento no elástico y no lineal. F_R es la fuerza de ruptura y ΔL_R es la deformación de ruptura, el cuerpo se fractura.

2. Deformaciones Elásticas en una Dirección.

Consideremos un cuerpo m de longitud L y área de sección transversal A , sometido a fuerzas de tracción o compresión $\vec{F}$, $-\vec{F}$; como se muestra en las figuras siguientes.



Se observa que m experimenta una elongación, o contracción, longitudinal ΔL ; se definen los siguientes parámetros:

a) Esfuerzo:

Se dice que m está sometido a un esfuerzo de tracción, o de compresión, cuya magnitud es:

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

b) Deformación Unitaria:

Se dice que m experimenta una deformación unitaria de elongación, o de contracción longitudinal ε , dada por:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}.$$

Despreciando la deformación transversal, experimentalmente se encuentra la llamada:

Ley de Hooke:

Si m presenta un *comportamiento elástico y lineal*, se cumple:

$$\varepsilon \propto \sigma, \text{ es decir, } \sigma = E \varepsilon \text{ ó } \frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

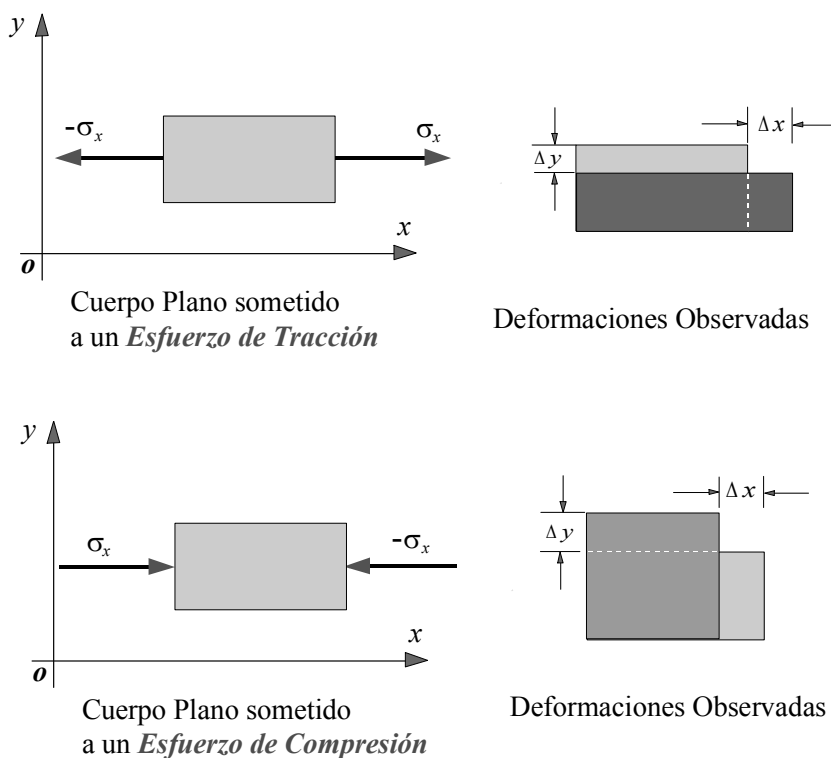
donde E es una constante escalar cuyo valor numérico se obtiene experimentalmente y se observa que depende del material que configura al cuerpo. A la constante E se le llama el **módulo elástico** o **módulo de Young** del material.

Ejemplos de valores numéricos del módulo de Young son:

MATERIAL	E (N/m ²)
Acero	$(200 \text{ a } 210) \times 10^9$
Aluminio	70×10^9
Hierro fundido	$(70 \text{ a } 140) \times 10^9$
Madera	$(7 \text{ a } 14) \times 10^9$
Nylon	$(28 \text{ a } 56) \times 10^9$
Hule blando	$(14 \text{ a } 1) \times 10^5$
Músculo liso	$(14 \text{ a } 1) \times 10^3$

3. Deformaciones Elásticas en Dos Direcciones.

Consideremos un cuerpo plano (su grosor es muy pequeño en comparación con otro parámetro geométrico del cuerpo), colocado en el plano x-y de un S.R. dado, como se muestra a continuación:



Sea la magnitud de un esfuerzo de tracción, o de compresión, aplicado al cuerpo a lo largo del *eje x*. Se observa que el cuerpo experimenta la siguiente deformación:

- Una elongación o contracción, a lo largo del *eje-x*; sea ε_x la deformación unitaria en esta dirección.
- Una contracción o elongación, a lo largo del *eje-y*; sea ε_y la deformación unitaria en esa dirección.

Para el comportamiento elástico y lineal, de la ley de Hooke, tenemos para la deformación longitudinal ε_x :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E},$$

donde E es el módulo de Young del cuerpo.

Mientras que para la deformación transversal ε_y , se observa que:

“ ε_y es contraria a ε_x , es decir si ε_x es producida por una elongación ε_y es producida por una contracción y viceversa.”

Si la configuración molecular del cuerpo es homogénea e isotrópica, experimentalmente se observa que:

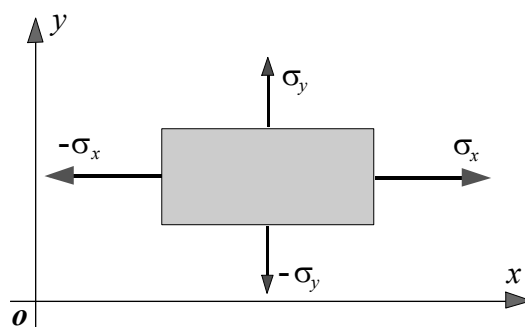
$$|\varepsilon_x| \neq |\varepsilon_y|.$$

Este resultado experimental se establece como:

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}.$$

Donde ν es una constante escalar, cuyo valor numérico se determina experimentalmente y se observa que depende del material que configura al cuerpo. A ν se le conoce con el nombre de razón de Poisson. Al igual que para el módulo de Young, existen tablas de valores de la razón de Poisson para diferentes materiales.

Si sobre el cuerpo plano actúan simultáneamente esfuerzos a lo largo de los ejes x, y , sean estos σ_x, σ_y , como se muestra en la figura.



Cuerpo sometido a
Esfuerzos Transversales

Entonces las deformaciones $\varepsilon_x, \varepsilon_y$, están dadas de la siguiente forma:

Deformación	Esfuerzo en x: σ_x	Esfuerzo en y: σ_y	Deformación Total
En la dirección x.	Elongación σ_x / E	Contracción $\nu \sigma_y / E$	$\sigma_x / E - \nu \sigma_y / E$
En la dirección y.	Contracción $\nu \sigma_x / E$	Elongación σ_y / E	$\sigma_y / E - \nu \sigma_x / E$

Es decir:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E} [\nu \sigma_x - \sigma_y]$$

ó

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix}.$$

Resultado conocido como relación lineal entre:

Vector de deformaciones, Matriz de elasticidad y Vector de esfuerzos.

PROBLEMARIO

Objetivos

Se pretende que los alumnos:

- a) Apliquen lo aprendido en las unidades III y IV, tanto en el análisis del equilibrio de un cuerpo rígido, como en el comportamiento de las deformaciones elásticas en una dimensión.
- b) Ejerciten la solución de problemas similares a los planteados en el segundo examen parcial del curso

Contenido

Se presentan nueve versiones de ejercicios en la estructura típica del segundo examen parcial del curso.

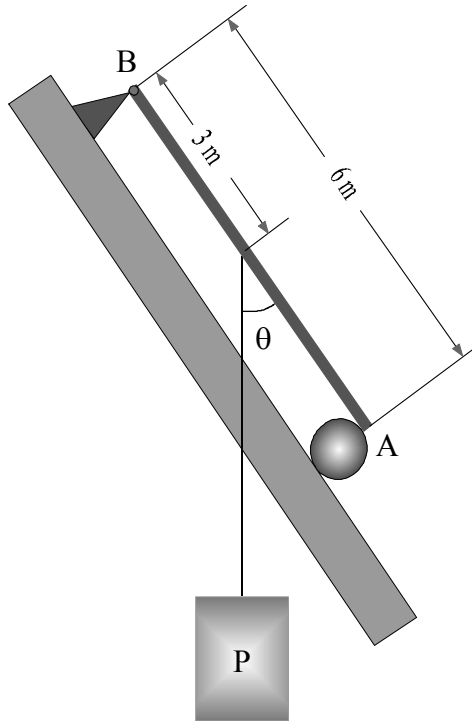
Versión 1.

1. La varilla, de peso despreciable, mostrada en la figura se encuentra en equilibrio.

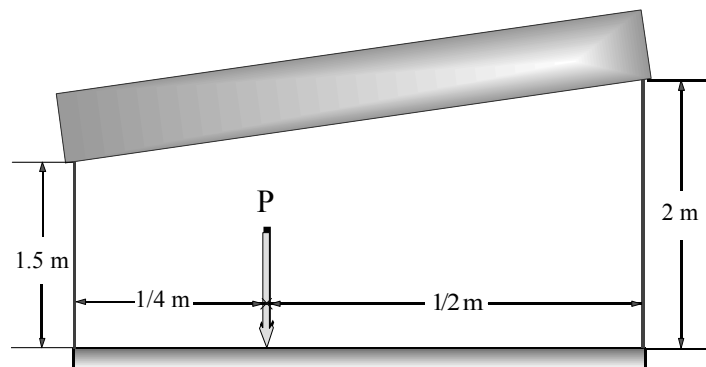
Calcular:

- a) La reacción en el apoyo simple A y,
b) La reacción en el apoyo articulado B.

$P = 2000 \text{ N}$, $\theta = 30^\circ$.



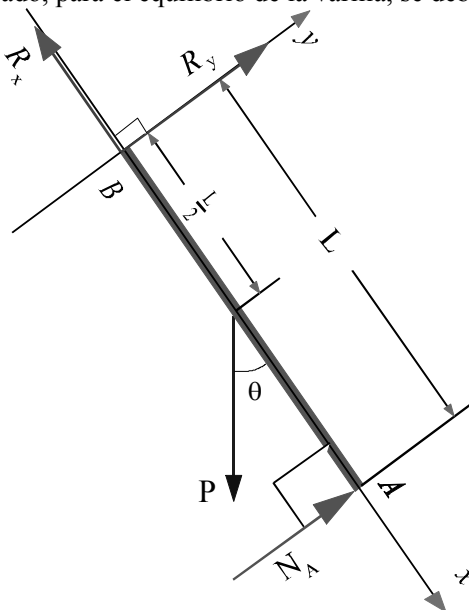
2. Una barra rígida, sin peso, está suspendida por dos alambres como se muestra en la figura. El alambre de la izquierda es de acero con $E_{ac.} = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y $A_{ac.} = 0.5 \text{ cm}^2$, el de la derecha es de aluminio con $E_{al.} = 0.7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y $A_{al.} = 1 \text{ cm}^2$. Si el peso P es de 10000 N. Calcular la elongación de cada alambre.



Solución

1. $P = 2000 \text{ N}$, $L = 6 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$.

Con respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la varilla, se debe cumplir:



D.C.L. para la varilla

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -R_x + P \cos \theta &= 0 \\ R_y + N_A - P \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Respecto del punto B:

$$\sum \vec{\tau}_B = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad N_A L - (P \sin \theta) \frac{L}{2} = 0 \quad (3)$$

a) De la ec. (3):

$$N_A = \frac{1}{2} (P \sin \theta) = \frac{1}{2} (2000 \text{ N}) \sin 30^\circ$$

$$\boxed{N_A = 500 \text{ N}}$$

b) De la ec. (1):

$$R_x = P \cos \theta = (2000 \text{ N}) \cos 30^\circ$$

$$\boxed{R_x = 1732.05 \text{ N}}$$

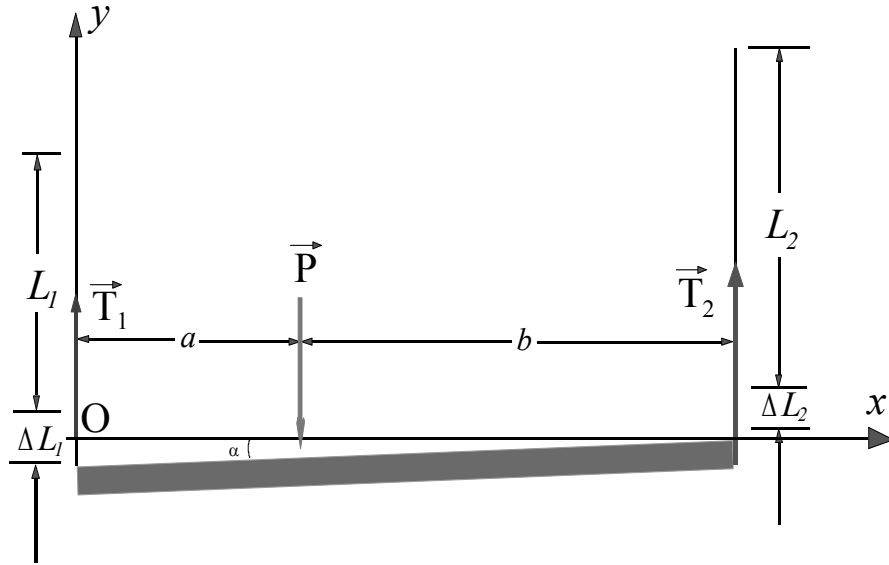
De la ec. (2):

$$R_y = P \sin \theta - N_A = (2000 \text{ N}) \sin 30^\circ - 500 \text{ N}$$

$$\boxed{R_y = 500 \text{ N}}$$

2. $P=10000 \text{ N}$, $L_1=1.5 \text{ m}$, $A_1=A_{ac.}=0.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E_1=E_{ac.}=2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$,
 $L_2=2 \text{ m}$, $A_2=A_{al.}=1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E_2=E_{al.}=0.7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $a=0.25 \text{ m}$, $b=0.5 \text{ m}$.

Supongamos que los estiramientos de los alambres ΔL_1 , ΔL_2 , son pequeños, de tal forma que la varilla se desvía de la horizontal un ángulo pequeño, $\alpha \cong 0^\circ$, por lo que los alambres deformados se mantienen casi verticales.



D.C.L. para la barra

Con respecto del S.R. mostrado en la figura, para el equilibrio de la barra, se debe cumplir:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_2 - P = 0 \quad (1)$$

Respecto del punto "O"

$$\sum \vec{\tau}_0 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad T_2(a+b) - Pa = 0 \quad (2)$$

De la ec. (2):

$$T_2 = \frac{a}{a+b} P = \frac{0.25}{0.75} (10000 \text{ N}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_2 = 3333.33 \text{ N}}$$

De la ec. (1):

$$T_1 = P - T_2 = 10000 \text{ N} - 3333.33 \text{ N}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1 = 6666.66 \text{ N}}$$

De la ley de Hooke se tiene:

$$\frac{T_1}{A_1} = E_1 \frac{\Delta L_1}{L_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta L_1 = \frac{T_1 L_1}{A_1 E_1},$$

$$\Delta L_1 = \frac{(6666.66 \text{ N})(1.5 \text{ m})}{(0.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2)}$$

$$\boxed{\Delta L_1 = 1 \times 10^{-3} \text{ m}}$$

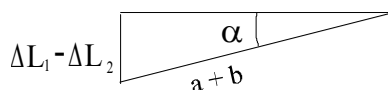
y

$$\frac{T_2}{A_2} = E_2 \frac{\Delta L_2}{L_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta L_2 = \frac{T_2 L_2}{A_2 E_2}$$

$$\Delta L_2 = \frac{(3333.33\text{N})(2\text{m})}{(1 \times 10^{-4} \text{m}^2)(0.7 \times 10^{11} \text{N/m}^2)}$$

$$\boxed{\Delta L_2 = 9.523 \times 10^{-4} \text{m}}$$

Calculemos el ángulo α :



$$\text{sen} \alpha = \frac{\Delta L_1 - \Delta L_2}{a + b} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{Arcsen} \left(\frac{\Delta L_1 - \Delta L_2}{a + b} \right).$$

Numéricamente se encuentra:

$$\alpha = \text{Arcsen} \left(\frac{1 \times 10^{-3} \text{m} - 9.523 \times 10^{-4} \text{m}}{0.25 \text{m} + 0.5 \text{m}} \right) = \text{Arcsen} (6.36 \times 10^{-5}) = 0.0036^\circ,$$

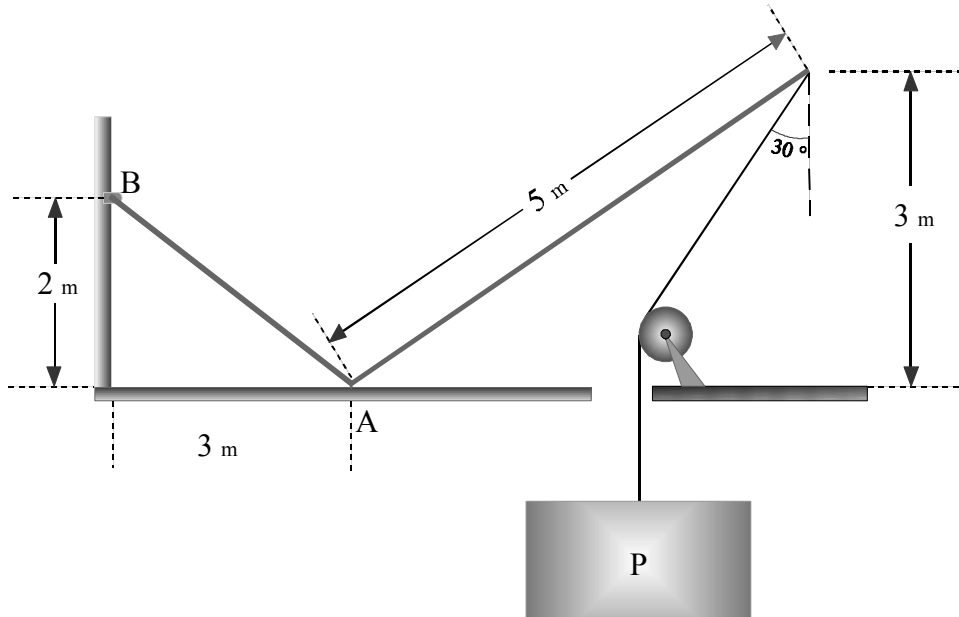
$$\boxed{\alpha = 0.0036^\circ}$$

es decir: $\alpha \cong 0^\circ$.

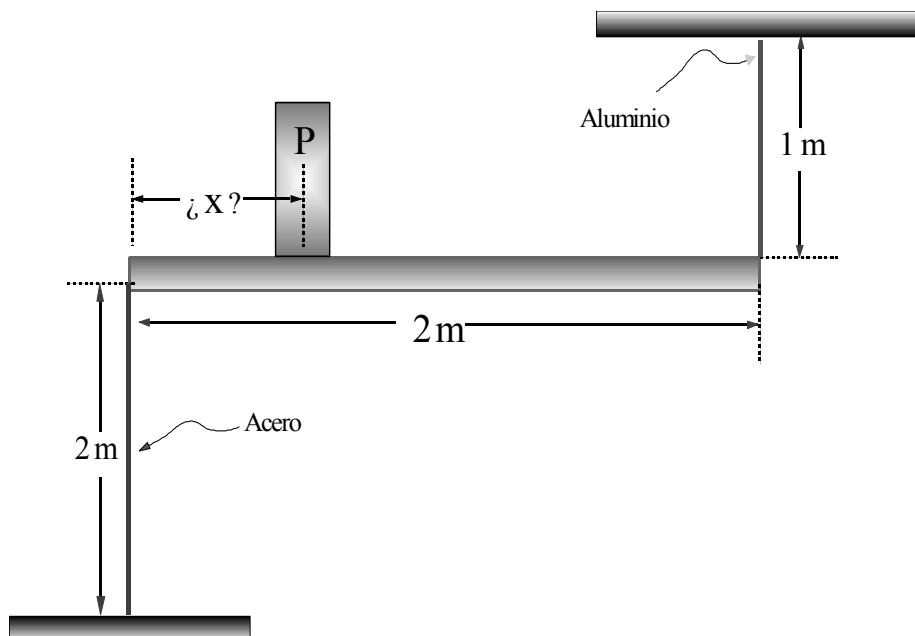
Versión 2.

1. La estructura, de peso despreciable, mostrada en la figura está en equilibrio. Calcular:

- La reacción en el apoyo simple A y,
 - La reacción en el apoyo articulado B.
- $P = 1000 \text{ N}$.



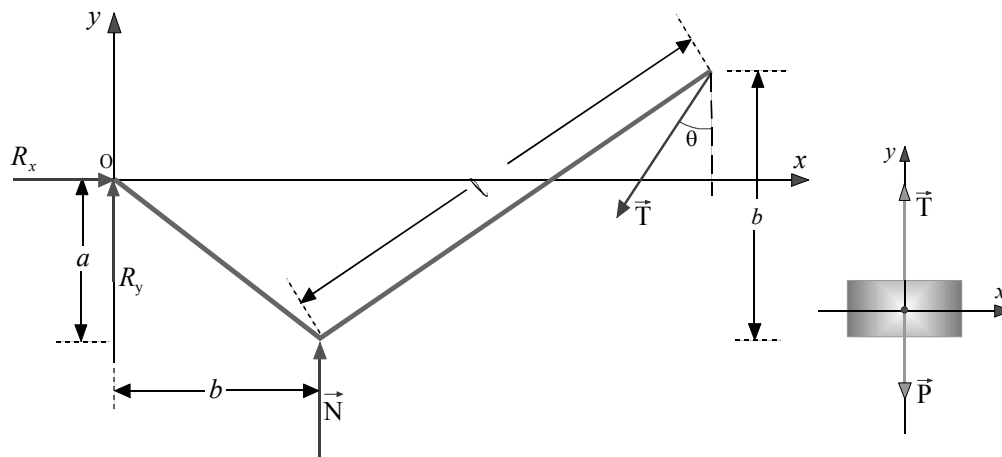
2. ¿Dónde se debe colocar la carga P para que el alargamiento del alambre de aluminio sea igual a la compresión de la varilla de acero? La barra horizontal, que sostiene a P, no tiene peso (ver la figura). $E_{ac} = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $A_{ac} = 2 \text{ cm}^2$; $E_{al} = 0.7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $A_{al} = 1 \text{ cm}^2$. La carga P es de 10000 N.



Solución.

1. $P=1000\text{ N}$, $a=2\text{ m}$, $b=3\text{ m}$, $\ell=5\text{ m}$, $\theta=30^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la estructura y el bloque, se debe cumplir:



D.C.L. para la estructura

D.C.L. para el bloque

Para la **estructura**:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} R_x - T \sin \theta &= 0 \\ R_y + N - T \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Respecto del punto **O**:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow N b + (T \sin \theta)(b - a) - (T \cos \theta)\left(b + \sqrt{\ell^2 - b^2}\right) = 0 \quad (3)$$

Para el **bloque P**:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T - P = 0 \quad (4)$$

De la ec.(4):

$$T = P$$

$$\boxed{T = 1000\text{ N}}$$

a) De la ec. (3):

$$\begin{aligned} N &= \frac{T}{b} \left[\cos \theta \left(b + \sqrt{\ell^2 - b^2} \right) - (b - a) \sin \theta \right] \\ N &= \frac{1000\text{ N}}{3\text{ m}} \left[\cos 30^\circ \left(3\text{ m} + \sqrt{(5\text{ m})^2 - (3\text{ m})^2} \right) - (3\text{ m} - 2\text{ m}) \sin 30^\circ \right] \\ &\Rightarrow \boxed{N = 1854.059\text{ N}} \end{aligned}$$

b) De la ec. (1):

$$R_x = T \sin \theta = (1000\text{ N}) \sin 30^\circ \Rightarrow \boxed{R_x = 500\text{ N}}$$

De la ec.(2):

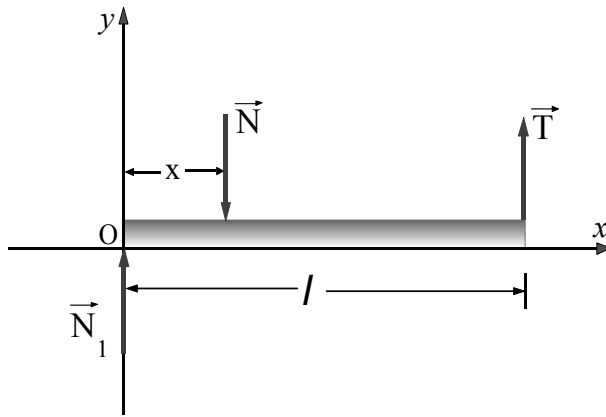
$$R_y = T \cos \theta - N = (1000 \text{ N}) \cos 30^\circ - 988.03 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_y = -988.033 \text{ N}}$$

Es decir R_y *tiene sentido opuesto al indicado* en la figura.

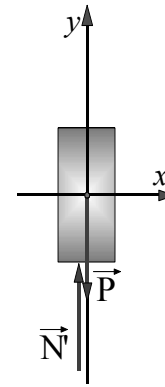
2. $P=10000 \text{ N}$, $L_1=2 \text{ m}$, $A_1=A_{ac.}=2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E_1=E_{ac.}=2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$,
 $L_2=1 \text{ m}$, $A_2=A_{al.}=1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E_2=E_{al.}=0.7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $l=2 \text{ m}$.

Sea x la distancia a la que se debe colocar la carga.

Respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio, se debe cumplir:



D.C.L. para la barra



D.C.L. para el bloque

Para la **barra**:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum F_y = 0 \\ \Rightarrow \quad N_1 + T - N &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum \vec{\tau}_O &= \vec{0} \\ \Rightarrow \quad -Nx + Tl &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Para el bloque **P**:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum F_y = 0 \\ \Rightarrow \quad N - P &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Para la deformación de la varilla se tiene:

$$\frac{N_1}{A_1} = E_1 \frac{\Delta L_1}{L_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{A_1 E_1} \quad (4)$$

Para la deformación del alambre se tiene:

$$\frac{T}{A_2} = E_2 \frac{\Delta L_2}{L_2} \Rightarrow \Delta L_2 = \frac{TL_2}{A_2 E_2} \quad (5)$$

Se quiere que $\Delta L_1 = \Delta L_2$, entonces, de (4) y (5)

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{A_1 E_1} = \frac{TL_2}{A_2 E_2} = \Delta L_2 \quad (6)$$

De la ec. (3):

$$\boxed{N = P = 10000 \text{ N}}$$

De la ec. (6):

$$N_1 = \frac{A_1 E_1 L_2}{A_2 E_2 L_1} T$$
$$N_1 = \frac{(2 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2)(1 \text{ m})}{(1 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(0.7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2)(2 \text{ m})} T$$
$$\boxed{N_1 = 2.85 T}$$

Sustituyendo N_1 en (1):

$$(2.85)T + T - N = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{N}{3.85} = \frac{10000}{3.85}$$

$$\boxed{T = 2597.4 \text{ N}}$$

De la ec. (2):

$$x = \frac{TI}{N} = \frac{(2597.4 \text{ N})}{10000 \text{ N}} (2 \text{ m})$$

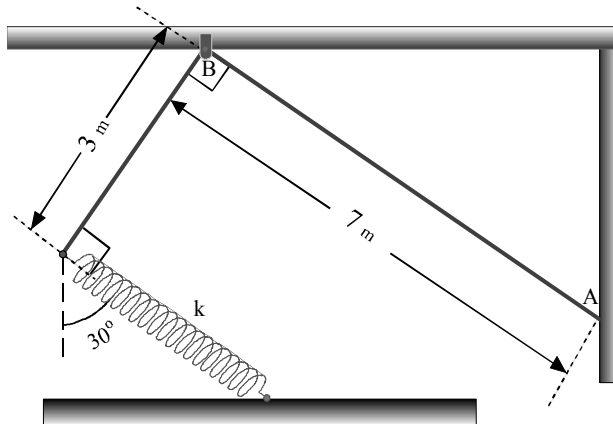
$$\boxed{x = 0.5194 \text{ m}}$$

Versión 3.

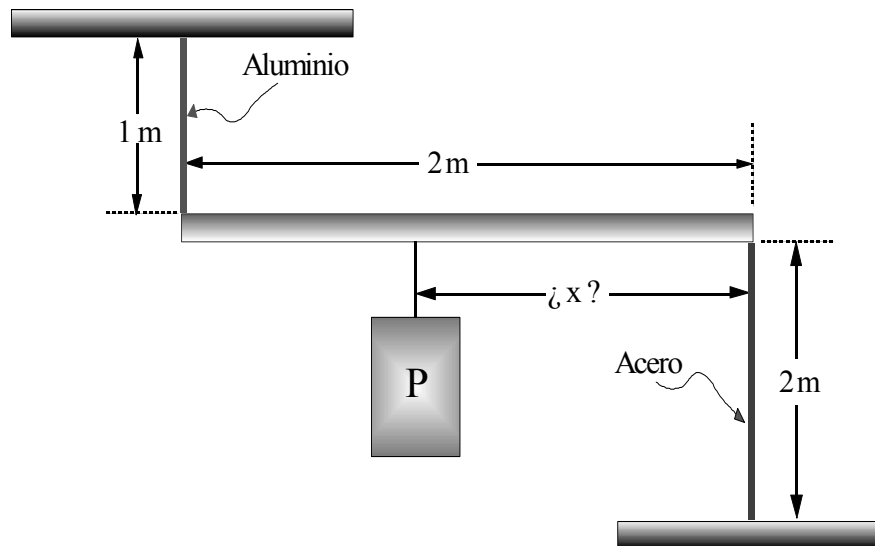
1. La escuadra mostrada en la figura, tiene un peso despreciable, y se encuentra en equilibrio. El resorte de constante elástica k , está estirado una cantidad x_0 .

Calcular:

- La reacción en el apoyo simple A y,
 - La reacción en el apoyo articulado B.
- $k = 5000 \text{ N/m}$, $x_0 = 10 \text{ cm}$.



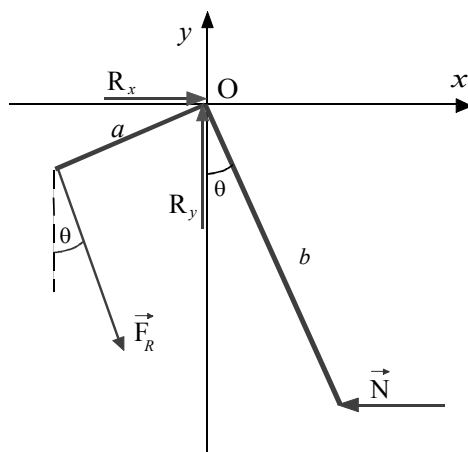
2. ¿Dónde se debe colocar el bloque P para que el alargamiento del alambre de aluminio sea igual a la compresión de la varilla de acero?. La barra horizontal no tiene peso (ver la figura), con $E_{ac} = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $A_{ac} = 2 \text{ cm}^2$; $E_{al} = 0.7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $A_{al} = 1 \text{ cm}^2$, y $P = 10000 \text{ N}$.



Solución.

1. $k=5000 \text{ N/m}$, $x_0=0.1 \text{ m}$, $a=3\text{m}$, $b=7\text{m}$, $\theta=30^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio, se debe cumplir:



D.C.L. para la escuadra

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_x + F_R \sin \theta - N = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_y - F_R \cos \theta = 0 \quad (2)$$

Respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow F_R a - N(b \cos \theta) = 0 \quad (3)$$

Además:

$$F_R = kx_0 \quad (4)$$

De la ec. (4):

$$F_R = (5000 \text{ N/m})(0.1 \text{ m}) \quad \boxed{F_R = 500 \text{ N}}$$

a) De la ec. (3):

$$N = \frac{a}{b \cos \theta} F_R = \frac{3 \text{ m}}{(7 \text{ m}) \cos 30^\circ} (500 \text{ N}), \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 247.43 \text{ N}}$$

b) De la ec. (1):

$$R_x = N - F_R \sin \theta$$

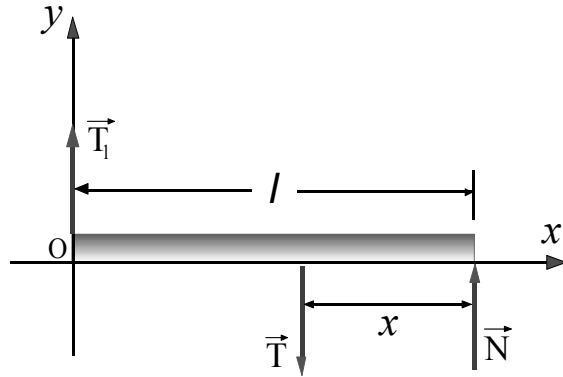
$$R_x = 247.43 \text{ N} - (500 \text{ N}) \sin 30^\circ \Rightarrow \boxed{R_x = -2.57 \text{ N}}$$

De la ec. (2):

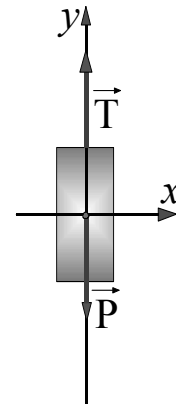
$$R_y = F_R \cos \theta = (500 \text{ N}) \cos 30^\circ \Rightarrow \boxed{R_y = 433.01 \text{ N}}$$

Ya que el valor de **la reacción en la dirección-x**, en la articulación, resultó con signo negativo; debe interpretarse como que **se eligió incorrectamente la dirección** en el diagrama de cuerpo libre para la fuerza de la articulación.

2. $P=10000 \text{ N}$, $l=2 \text{ m}$, $L_1=1 \text{ m}$, $A_1=A_{al.}=1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E_1=E_{al.}=0.7 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $L_2=2 \text{ m}$, $A_2=A_{ac.}=2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E_2=E_{ac.}=2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.
Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio, se tiene:



D.C.L. para la barra



D.C.L. para el bloque

Para la **barra**:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow T_1 + N - T = 0 \quad (1)$$

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0}$$

$$\Rightarrow Nl - T(l - x) = 0 \quad (2)$$

Para el **bloque P**:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow T - P = 0 \quad (3)$$

Para la deformación del alambre:

$$\frac{T_1}{A_1} = E_1 \frac{\Delta L_1}{L_1} \quad \Rightarrow \quad \Delta L_1 = \frac{T_1 L_1}{A_1 E_1} \quad (4)$$

Para la deformación de la varilla:

$$\frac{N}{A_2} = E_2 \frac{\Delta L_2}{L_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta L_2 = \frac{NL_2}{A_2 E_2} \quad (5)$$

Se quiere que $\Delta L_1 = \Delta L_2$, por lo tanto, de (4) y (5):

$$\Delta L_1 = \frac{T_1 L_1}{A_1 E_1} = \frac{N L_2}{A_2 E_2} = \Delta L_2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{A_1 E_1 L_2}{A_2 E_2 L_1} N}$$

$$T_1 = \frac{(1 \times 10^{-4} m^2)(0.7 \times 10^{11} N/m^2)(2m)}{(2 \times 10^{-4} m^2)(2 \times 10^{11} N/m^2)(1m)} N$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = (0.35) N} \quad (6)$$

De la ec. (3):

$$\boxed{T = P = 10000 \text{ N}}$$

De la ec. (1) y (6):

$$(0.35) N + N - T = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{T}{1.35} = \frac{10000}{1.35}$$

$$\boxed{N = 7407.4 \text{ N}}$$

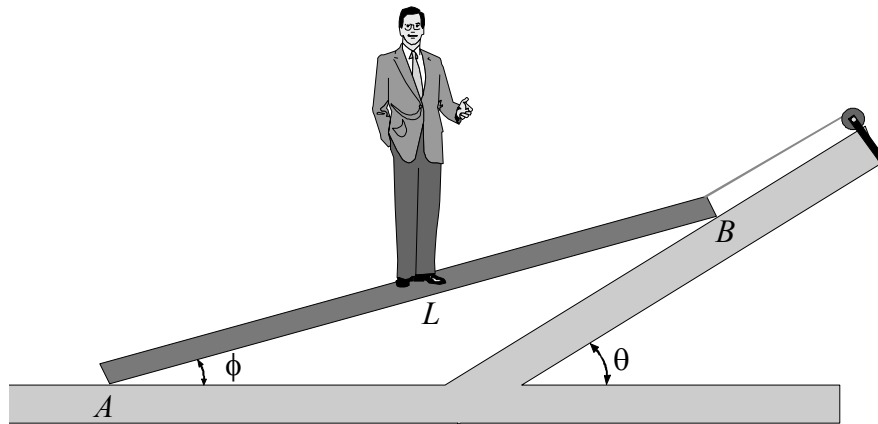
De la ec. (2):

$$x = l - \frac{M}{T} = \left[1 - \frac{N}{T} \right] l = \left[1 - \frac{(7407.4 \text{ N})}{10000 \text{ N}} \right] (2m)$$

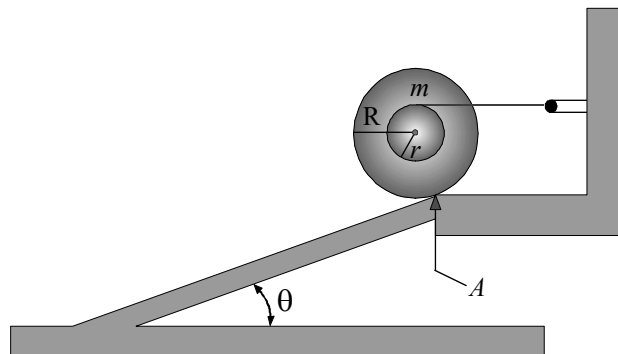
$$\boxed{x = 0.5185 \text{ m}}$$

Versión 4.

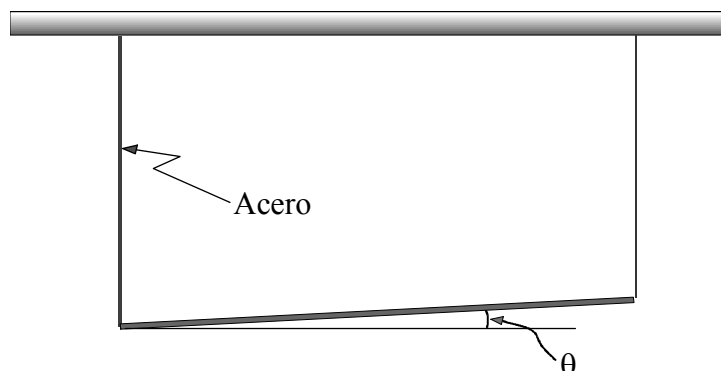
1. Un hombre tiene peso W y se encuentra parado en el centro de un tablón. Si los planos A y B son lisos, determinar la tensión en la cuerda en términos de W y θ .



2. El carrete tiene una masa de 20 kg. Si se enrolla cuerda alrededor de su núcleo interno y se amarra a la pared, y el coeficiente de fricción estática en A tiene un valor de 0.15, determine si el carrete permanece en equilibrio al soltarlo (justificar la respuesta).

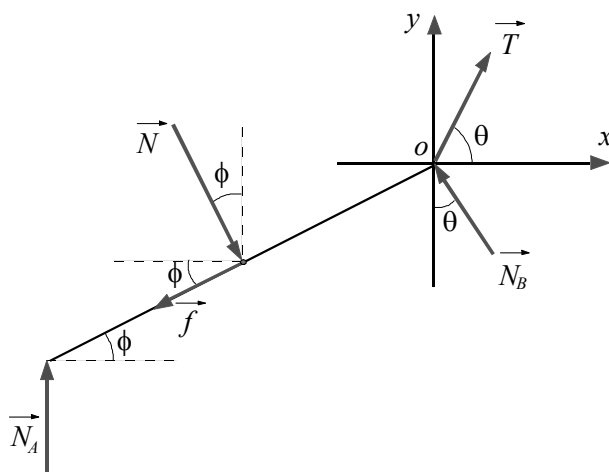


3. Una barra uniforme de 4.7 kg de masa y 1.3 m de longitud está suspendida de los extremos de dos alambres verticales. Un alambre es de acero y tiene un diámetro de 1.2 mm el otro alambre tiene un diámetro de 0.84 mm. Antes de unirlos a la barra, los alambres eran de la misma longitud de 1.7m. Encontrar el módulo de elasticidad E del otro alambre, si el ángulo θ es de 0.074° , $E_{\text{acero}} = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$.

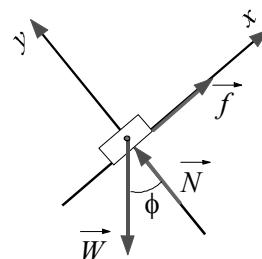


Solución.

Respecto del S.R. mostrado en las figuras, para el equilibrio se tiene:



D.C.L. para el tablón



D.C.L. para el cuerpo W

Para el **tablón**:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow N \sen\phi - f \cos\phi - N_B \sen\theta + T \cos\theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_A + N_B \cos\theta + T \sen\theta - N \cos\phi - f \sen\phi = 0 \quad (2)$$

Respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow N \left(\frac{L}{2} \right) - N_A (L \cos\phi) = 0 \quad (3)$$

Para el **cuerpo W**:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f - W \sen\phi = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - W \cos\phi = 0 \quad (5)$$

De la ec. (5), se tiene:

$$N = W \cos\phi \quad (6)$$

De la ec. (3), tenemos:

$$N_A = \frac{W}{2} \quad (7)$$

De la ec. (4), se tiene:

$$f = W \sen\phi$$

Al sustituir estas tres últimas expresiones en la ec. (2), se encuentra:

$$N_B = \frac{1}{\cos\theta} \left[W \cos^2\phi + W \sen^2\phi - \frac{W}{2} - T \sen\theta \right] = \frac{1}{\cos\theta} \left[\frac{W}{2} - T \sen\theta \right]$$

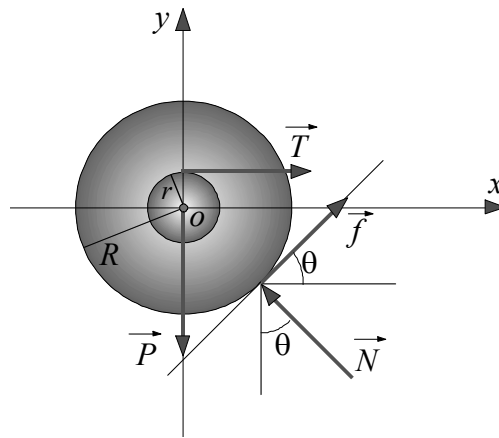
y de la ec. (1), encontramos:

$$W \sin \phi \cos \phi - W \sin \phi \cos \phi - \left[\frac{W}{2} - T \sin \theta \right] \tan \theta + T \cos \theta = 0$$

$$T = \frac{W \tan \theta \cos \theta}{2} = \frac{W \sin \theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{2} W \sin \theta}$$

2. $R = 0.2\text{m}$, $r = 0.1\text{m}$, $\theta = 30^\circ$, $\mu = 0.15$, $m = 20\text{kg}$.

Respecto del S.R. mostrado en la figura, para el equilibrio del carrete, se tiene:



D.C.L. para el carrete

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T + f \cos \theta - N \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad f \sin \theta + N \cos \theta - mg = 0 \quad (2)$$

Respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad f R - T r = 0 \quad (3)$$

De la ec. (3), se tiene:

$$T = \frac{R}{r} f \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{0.2}{0.1} f = 2f \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2f}$$

De la ec. (1), se tiene:

$$2f + f \cos \theta - N \sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = \frac{2 + \cos \theta}{\sin \theta} f}$$

De la ec. (2), tenemos:

$$f \operatorname{sen} \theta + f \left(\frac{2 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) \cos \theta = mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \frac{mg}{\frac{2 + \cos \theta}{\tan \theta} + \operatorname{sen} \theta}}$$

Por lo tanto, numéricamente se tiene:

$$f = \frac{(20 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{\frac{2 + \cos 30^\circ}{\tan 30^\circ} + \operatorname{sen} 30^\circ} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = 35.87 \text{ N}}$$

Ahora, entonces:

$$N = \frac{2 + \cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} (35.87 \text{ N}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 205.6 \text{ N}}$$

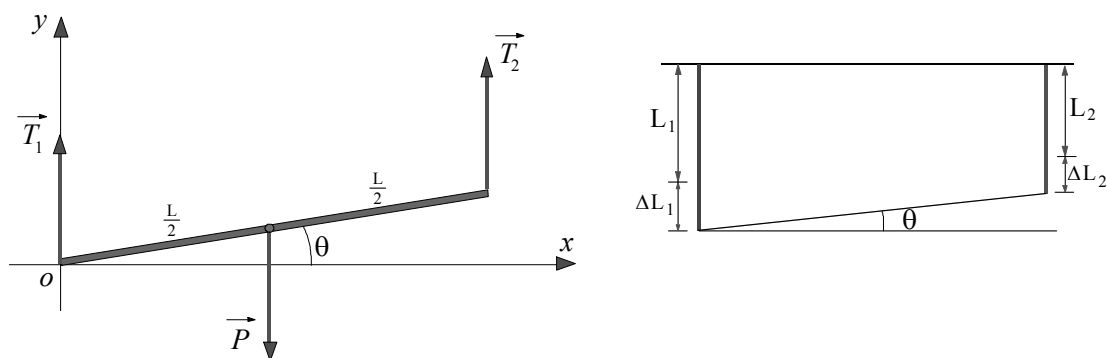
Por otro lado, sabemos que:

$$f_{\max} = \mu N = (0.15)(205.6 \text{ N}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{\max} = 30.84 \text{ N}}$$

El valor de f en condiciones de equilibrio es tal que: $f > f_{\max}$, por lo tanto **el carrete No mantiene el equilibrio.**

3. $m = 4.7 \text{ kg}$, $L = 1.3 \text{ m}$, $L_1 = L_2 = 1.7 \text{ m}$, $E_1 = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $d_1 = 1.2 \times 10^{-3} \text{ m}$, $d_2 = 8.4 \times 10^{-4} \text{ m}$, $\theta = 0.074^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado en la figura, para el equilibrio de la barra, se tiene:



D.C.L. para la barra

Para la **barra**:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_2 - mg = 0 \quad (1)$$

Respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad T_2 L \cos \theta - \frac{1}{2} mg L \cos \theta = 0 \quad (2)$$

De la ec. (2), se tiene:

$$T_2 = \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}(4.7\text{kg})(9.8\text{m/s}^2) \Rightarrow \boxed{T_2 = 23.03\text{N}}$$

De la ec. (1), se tiene:

$$T_1 = mg - T_2 = mg - \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}mg \Rightarrow \boxed{T_1 = 23.03\text{N}}$$

Por otro lado, se debe cumplir:

$$\Delta L_1 - \Delta L_2 = L \sin \theta = (1.3\text{m}) \sin(0.074^\circ) = 1.679 \times 10^{-3}\text{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta L_1 - \Delta L_2 = 1.679 \times 10^{-3}\text{m}}$$

Ahora, como ΔL_1 y ΔL_2 son tales que deben cumplir las relaciones de la elasticidad, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{A_1} &= E_1 \frac{\Delta L_1}{L_1} \Rightarrow \Delta L_1 = \frac{T_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{T_1 L_1}{\frac{\pi}{4} d_1^2 E_1} = \frac{4 T_1 L_1}{\pi d_1^2 E_1} \\ \frac{T_2}{A_2} &= E_2 \frac{\Delta L_2}{L_2} \Rightarrow \Delta L_2 = \frac{T_2 L_2}{E_2 A_2} = \frac{T_2 L_2}{\frac{\pi}{4} d_2^2 E_2} = \frac{4 T_2 L_2}{\pi d_2^2 E_2} \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \Delta L_1 - \Delta L_2 &= \frac{4 T_1 L_1}{\pi d_1^2 E_1} - \frac{4 T_2 L_2}{\pi d_2^2 E_2} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{T_1 L_1}{d_1^2 E_1} - \frac{T_2 L_2}{d_2^2 E_2} \right) \\ \frac{4}{\pi} \left(\frac{T_1 L_1}{d_1^2 E_1} - \frac{T_2 L_2}{d_2^2 E_2} \right) &= 1.679 \times 10^{-3}\text{m} \Rightarrow \frac{4}{\pi} \frac{T_2 L_2}{d_2^2 E_2} = \frac{4}{\pi} \frac{T_1 L_1}{d_1^2 E_1} - 1.679 \times 10^{-3}\text{m} \end{aligned}$$

$$\boxed{E_2 = \frac{\frac{4}{\pi} \frac{T_2 L_2}{d_2^2}}{\frac{4}{\pi} \frac{T_1 L_1}{d_1^2 E_1} - 1.679 \times 10^{-3}\text{m}}}$$

$$E_2 = \frac{\frac{4}{\pi} \frac{(23.03\text{N})(1.7\text{m})}{(8.4 \times 10^{-4})^2}}{\frac{4}{\pi} \frac{(23.03\text{N})(1.7\text{m})}{(1.2 \times 10^{-3})^2 (2 \times 10^{11}\text{N/m}^2)} - 1.679 \times 10^{-3}\text{m}} \Rightarrow$$

$$\boxed{E_2 = -4.65 \times 10^{10}\text{N/m}^2}$$

Este resultado **No es posible**, es decir **es inadmisibile físicamente**, ya que no existen módulos elásticos negativos.

Por lo tanto, si se considera otro valor para el ángulo, por ejemplo, si θ es $\theta = 0.0074^\circ$, entonces:

$$\Delta L_1 - \Delta L_2 = L \sin \theta = (1.3\text{m}) \sin(0.0074^\circ) = 1.679 \times 10^{-4}\text{m}$$

por lo que , ahora el módulo elástico es:

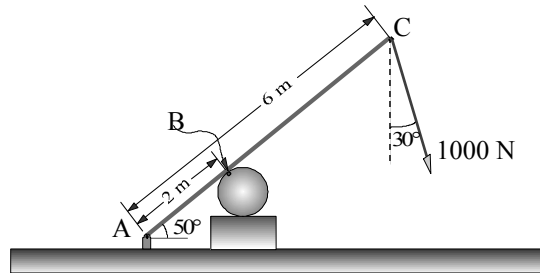
$$E_2 = \frac{\frac{4 (23.03\text{N})(1.7\text{m})}{\pi (8.4 \times 10^{-4})^2}}{\frac{4 (23.03\text{N})(1.7\text{m})}{\pi (1.2 \times 10^{-3})^2} - 1.679 \times 10^{-4}\text{m}}$$

$E_2 = 1.36 \times 10^{13} \text{N} / \text{m}^2$

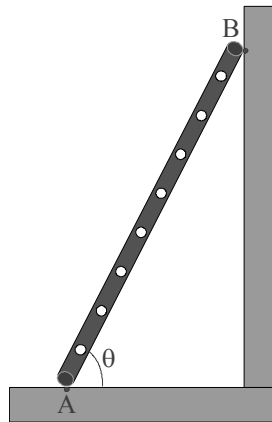
Resultado que ***Sí es físicamente admisible.***

Versión 5.

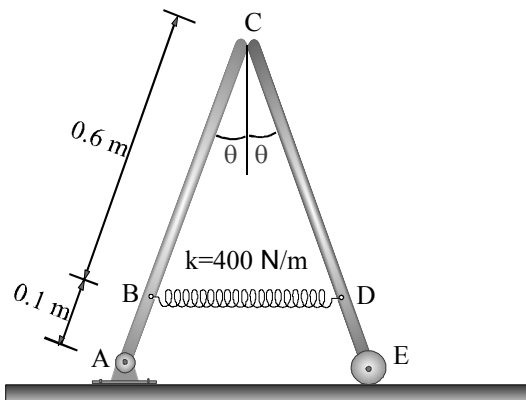
1. La varilla ABC está en equilibrio, se encuentra articulada en A, tiene contacto simple y liso en B y en el extremo C se le aplica una fuerza de 1000 N como se indica en la figura. Calcule las fuerzas de reacción en A y en B.



2. La escalera uniforme de peso W y longitud L descansa sobre la pared en B y el piso en A. Si el coeficiente de fricción estática tanto en la pared como en el piso, con la escalera es μ , determine el mínimo ángulo θ en que puede ser colocada la escalera contra la pared, sin que ésta resbale.



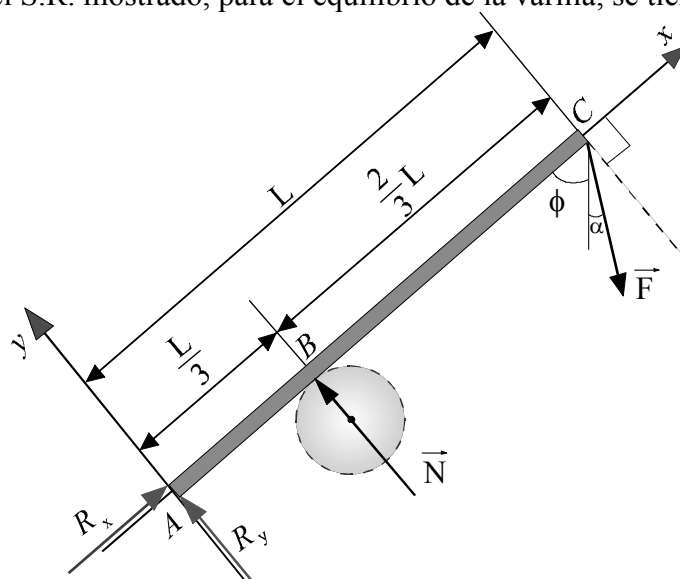
3. Un sistema de dos barras se encuentra sujeto por un resorte entre los puntos B y D, el resorte tiene una longitud sin estirar de 0.3 m. Determine la masa " m " de cada una de las barras, suponiendo que son iguales, y que el sistema está en equilibrio cuando $\theta = 15^\circ$. Los apoyos de estas barras son: Articulado para A y Simples para C y E.



Solución.

1. $F = 1000 \text{ N}$, $L = 6 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\phi = 40^\circ$.

Con respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la varilla, se tiene:



D.C.L. de la varilla

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x - F \cos(\phi + \alpha) = 0 \\ R_y + N - F \sin(\phi + \alpha) = 0 \end{cases}$$

Respecto del punto A:

$$\sum \vec{\tau}_A = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{3} N L - F \sin(\phi + \alpha) L = 0 \quad (3)$$

De la ec. (3), se tiene:

$$N = 3F \sin(\phi + \alpha) = 3(1000 \text{ N}) \sin 70^\circ$$

$$\boxed{N = 2819.077 \text{ N}}$$

De la ec. (1), tenemos:

$$R_x = F \cos(\phi + \alpha) = 1000 \text{ N} \cos 70^\circ$$

$$\boxed{R_x = 342.02 \text{ N}}$$

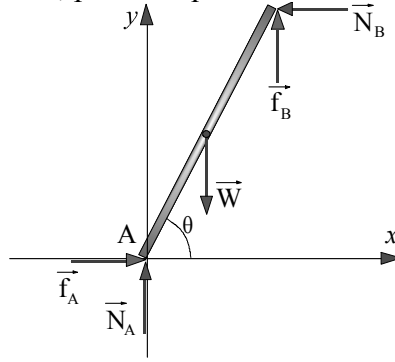
De la ec. (2), encontramos:

$$R_y = F \sin(\phi + \alpha) - N = 1000 \text{ N} \sin 70^\circ - 2819.077 \text{ N}$$

$$\boxed{R_y = -1879.385 \text{ N}}$$

Es decir R_y tiene sentido contrario al indicado en la figura.

2. Con respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la escalera, se tiene:



D.C.L. de la escalera

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_A - N_B = 0 \\ N_A + f_B - W = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Respecto del punto A:

$$\sum \vec{\tau}_A = \vec{0} \Rightarrow N_B L \sin \theta + f_B L \cos \theta - \frac{L}{2} W \cos \theta = 0 \quad (3)$$

El mínimo valor de θ debe ser tal que:

$$f_A = \mu N_A \quad (4)$$

y

$$f_B = \mu N_B \quad (5)$$

De las ecs. (1) y (4) se tiene:

$$N_B = \mu N_A \Rightarrow N_A = \frac{N_B}{\mu} \quad (1')$$

De las ecs. (2), (5), y (1'), tenemos:

$$\frac{N_B}{\mu} + \mu N_B - W = 0 \Rightarrow N_B = \frac{W}{\mu + \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{1 + \mu^2} W$$

De la ec. (3) encontramos:

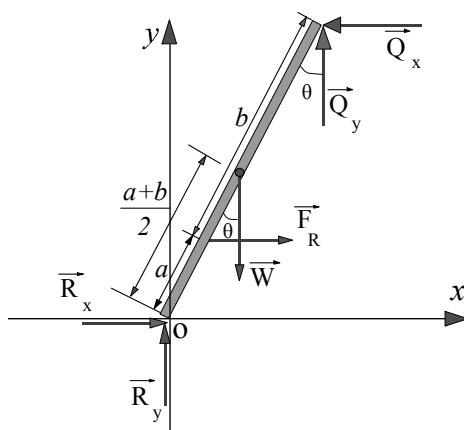
$$\begin{aligned} \frac{\mu}{1 + \mu^2} W L \sin \theta + \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} W L \cos \theta - \frac{1}{2} L W \cos \theta &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\mu}{1 + \mu^2} \sin \theta &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \right) \cos \theta = \frac{1 - \mu^2}{2(1 + \mu^2)} \cos \theta \Rightarrow \\ \sin \theta &= \left(\frac{1 - \mu^2}{2\mu} \right) \cos \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \left(\frac{1 - \mu^2}{2\mu} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el ángulo θ es:

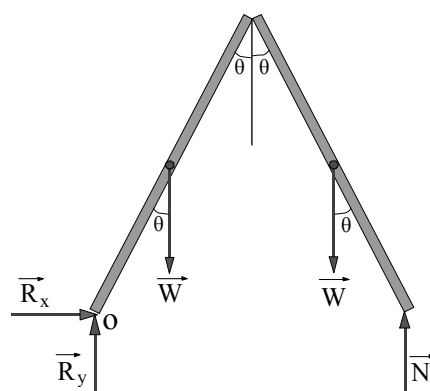
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \mu^2}{2\mu} \right)$$

3. $k=400 \text{ N/m}$, $\theta=15^\circ$, $L_0=0.3\text{m}$, $a=0.1\text{m}$, $b=0.6\text{m}$.

Respecto del S. de R. mostrado, para el equilibrio, se tiene:



D.C.L. Barra 1



D.C.L. de las dos barras

Para la barra 1:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} R_x + F_R - Q_x &= 0 \\ R_y + Q_y - W &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Con respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow$$

$$Q_x(a+b)\cos\theta + Q_y(a+b)\sin\theta - F_R a \cos\theta - \left(\frac{a+b}{2}\right)W\sin\theta = 0 \quad (3)$$

Para las dos barras:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} R_x &= 0 \\ R_y + N - 2W &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}$$

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow$$

$$[2(a+b)]N\sin\theta - \left(\frac{a+b}{2}\right)W\sin\theta - \left[\frac{3}{2}(a+b)\right]W\sin\theta = 0 \quad (6)$$

$$\left(2N - \frac{1}{2}W - \frac{3}{2}W\right)[(a+b)\sin\theta] = 0,$$

$$2N - 2W = 0 \Rightarrow \boxed{N = W}$$

Además:

$$F_R = k \Delta L = k(L_f - L_i) = k(2b \sin\theta - L_0)$$

$$F_R = \left(400 \frac{\text{N}}{\text{m}}\right) \left[2(0.6\text{m}) \sin 15^\circ - 0.3\text{m}\right] = 4.23 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad F_R = 4.23 \text{ N}$$

De las ecs. (1) y (4), se tiene:

$$Q_x = F_R \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_x = 4.23 \text{ N}}$$

De la ec. (3), tenemos:

$$Q_y = \frac{[F_R a - Q_x (a+b)] \cos \theta}{(a+b) \sin \theta} + \left(\frac{W}{2}\right)$$

$$Q_y = \frac{[(4.23 \text{ N})(0.1\text{m}) - (4.23 \text{ N})(0.7\text{m})] \cos 15^\circ}{(0.7\text{m}) \sin 15^\circ} + \frac{W}{2}$$

$$\boxed{Q_y = -13.53 \text{ N} + \frac{W}{2}}$$

De la ec. (2) se tiene:

$$R_y = W - Q_y,$$

Por lo tanto,

$$R_y = W - \left(\frac{W}{2} - 13.53 \text{ N}\right) = 13.53 \text{ N} + \frac{W}{2}$$

Pero además de la ec. (5), se tiene:

$$N = 2W - R_y \quad \Rightarrow \quad N = 2W - \frac{W}{2} - 13.53 \text{ N}. \quad (7)$$

Entonces de la ec. (6) y (7), tenemos:

$$W - 2W + \frac{W}{2} = -13.53 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}W = -(13.53 \text{ N}),$$

pero $W = mg$, entonces:

$$mg = 2(13.53 \text{ N}) = 27.06 \text{ N}$$

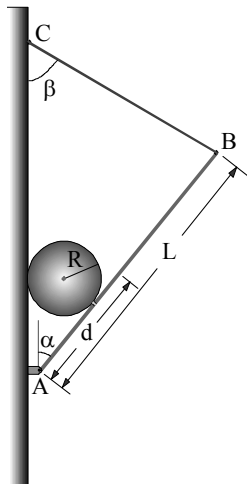
Por lo tanto la masa es:

$$m = \frac{27.06 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 2.76 \text{ kg}}.$$

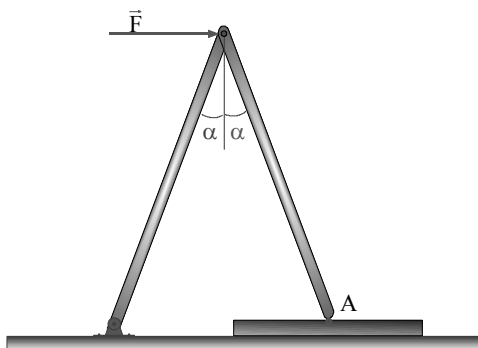
Versión 6.

1. La varilla AB está articulada en A, tiene contacto liso con la esfera de radio R y peso P y esta atada en B a la cuerda BC. Encontrar la fuerza que ejerce la articulación A en la varilla.

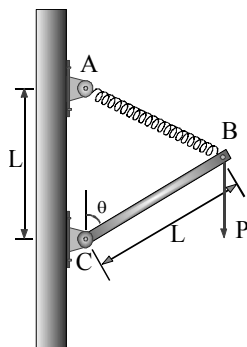
$P=20\text{ N}$, $R=0.5\text{ m}$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=50^\circ$.



2. El coeficiente de fricción estática entre la barra derecha y el suelo en A es de 0.6. Desprecie los pesos de las barras. Si $\alpha = 20^\circ$, ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida en el punto A?



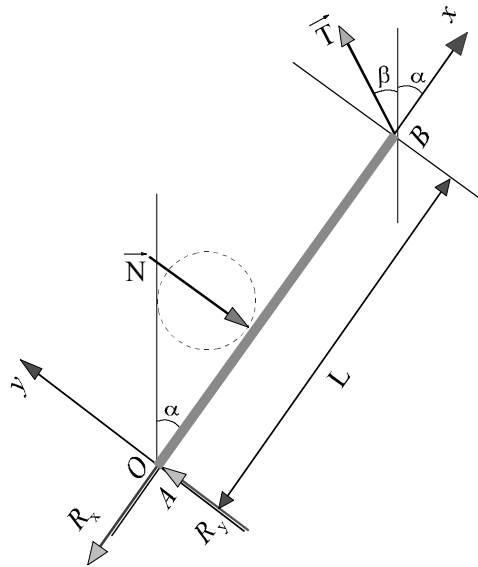
3. Se aplica en el extremo B de la barra BC una carga vertical P. La constante del resorte es k y se encuentra en su posición normal cuando $\theta=60^\circ$.
- a) Despreciando el peso de la barra, exprese el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio en términos de P, k y L.



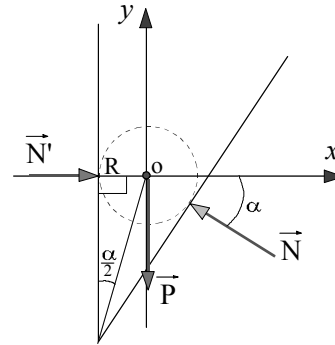
Solución.

1. $P = 20 \text{ N}$, $R = 0.5 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 50^\circ$.

Con respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio, se tiene:



D.C.L. para la varilla



D.C.L. para la esfera

Para la varilla:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -R_x + T \cos(\alpha + \beta) &= 0 \\ R_y - N + T \sin(\alpha + \beta) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Con respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow -Nd + [T \sin(\alpha + \beta)]L = 0 \quad (3)$$

Para la esfera:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} N' - N \cos \alpha &= 0 \\ N \sin \alpha - P &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}$$

Además se tiene:

$$d = \frac{R}{\tan(\frac{\alpha}{2})} = \frac{0.5}{\tan 15^\circ} = 1.86 \text{ m} \Rightarrow \boxed{d = 1.86 \text{ m}}$$

Obsérvese que el problema no se puede resolver si no se conoce L , por lo tanto consideremos que $L = 2.5 \text{ m}$.

De la ec. (5), tenemos:

$$N = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{20 \text{ N}}{\sin 30^\circ} \quad \boxed{N = 40 \text{ N}}$$

De la ec. (3), se tiene:

$$T = \frac{Nd}{L \sin(\alpha + \beta)} = \frac{(40\text{N})(1.86\text{m})}{(2.5\text{m}) \sin 80^\circ}$$

$$\boxed{T = 30.21\text{N}}$$

De la ec. (1), se tiene:

$$R_x = T \cos(\alpha + \beta) = (30.21\text{N}) \cos 80^\circ$$

$$\boxed{R_x = 5.24\text{N}}$$

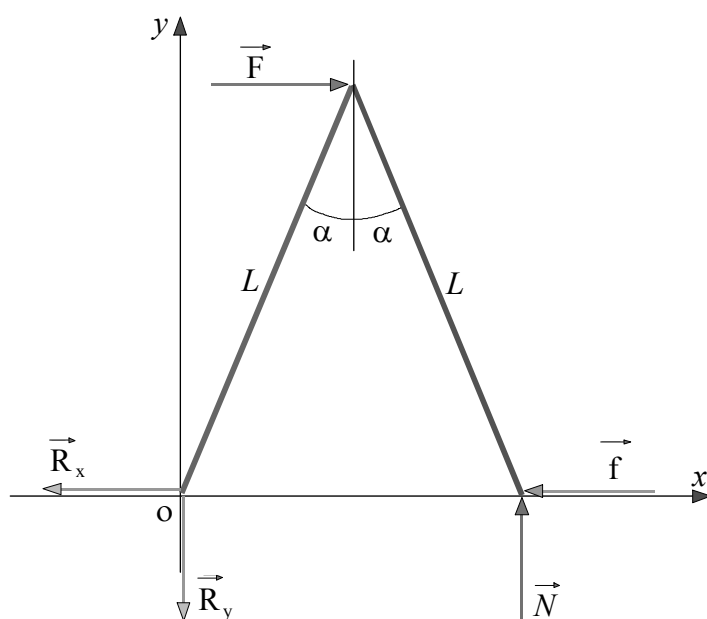
De la ec. (2), se tiene:

$$R_y = N - T \sin(\alpha + \beta) = 40\text{N} - (30.21\text{N}) \sin 80^\circ$$

$$\boxed{R_y = 10.24\text{N}}$$

2. $\mu = 0.6$, $\alpha = 20^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio, se tiene:



D.C.L. de las dos barras

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} F - R_x - f &= 0 \\ N - R_y &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Con respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad N[2L \operatorname{sen} \alpha] - F[L \cos \alpha] = 0 \quad (3)$$

Suponiendo que la estructura está a punto de resbalar en el punto A:

$$f = \mu N \quad (4)$$

Observar que *el problema no se puede resolver si no se conoce F*, por lo que consideraremos $F = 500 \text{ N}$.

De la ec. (3) se tiene:

$$N = F \left(\frac{\cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right) = F \left(\frac{1}{2 \tan \alpha} \right) = 500 \text{ N} \left(\frac{1}{2 \tan 20^\circ} \right)$$

$$\boxed{N = 686.86 \text{ N}}$$

De la ec. (4), se tiene:

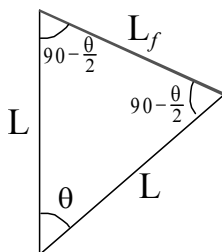
$$f = (0.6)(686.86 \text{ N}) = 412.12 \text{ N}$$

$$\boxed{f = 412.12 \text{ N}}$$

3. Dado que la posición no deformada del resorte es cuando $\theta=60^\circ$, entonces la longitud no deformada del resorte es L (cuando $\theta=60^\circ$, el triángulo ABC es equilátero).

En la situación de equilibrio, estando el resorte deformado se tiene un triángulo isósceles y

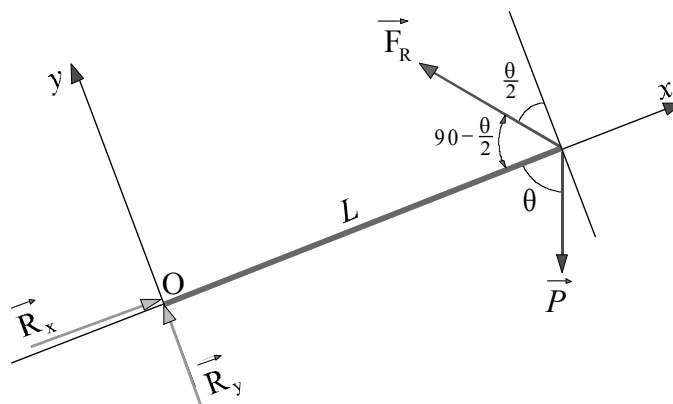
$$L_f = \sqrt{2L^2(1 - \cos \theta)} \text{ y dado que } \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{2},$$



entonces

$$L_f = \sqrt{4L^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2L \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la barra, se tiene:



D.C.L. para la barra

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} R_x - F_R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - P \cos \theta = 0 \end{array} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} R_y + F_R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - P \sin \theta = 0 \end{array} \quad (2)$$

Con respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow \left[F_R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] L - (P \sin \theta) L = 0 \quad (3)$$

Además:

$$F_R = k(L_f - L) = k \left[2L \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - L \right] = kL \left[2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right] \quad (4)$$

De la ec. (3), se tiene:

$$kL \left[\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - P \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$kL \left[\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] = P \sin\theta, \quad \Rightarrow$$

$$2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{P}{kL} \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta - \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{P}{kL} \sin\theta$$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sin\theta - \frac{P}{kL} \sin\theta = \left(1 - \frac{P}{kL}\right) \sin\theta.$$

Transformamos esta expresión en una ecuación cuadrática para el $\cos\theta$.

$$\frac{1+\cos\theta}{2} = \left(1 - \frac{P}{kL}\right)^2 \sin^2\theta \quad \Rightarrow \quad 1+\cos\theta = 2\left(1 - \frac{P}{kL}\right)^2 (1-\cos^2\theta)$$

$$\therefore 2\left(1 - \frac{P}{kL}\right)^2 \cos^2\theta + \cos\theta + \left[1 - 2\left(1 - \frac{P}{kL}\right)^2\right] = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, se tiene:

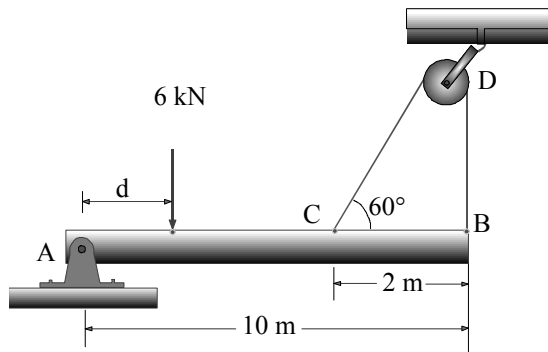
$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8\left(1 - \frac{P}{kL}\right)^2 \left(1 - 2\left(1 - \frac{P}{kL}\right)^2\right)}}{4\left(1 - \frac{P}{kL}\right)^2}$$

Finalmente, la función trigonométrica inversa del coseno, $\arccos$ nos da:

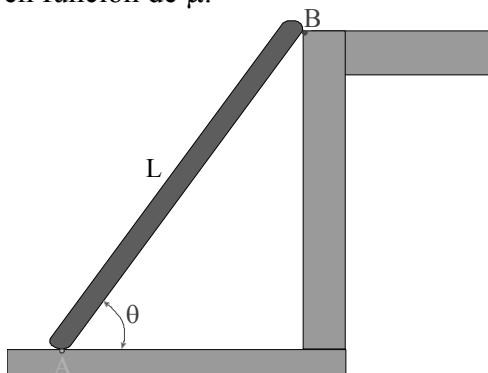
$$\theta = \arccos \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8\left(1 - \frac{P}{kL}\right)^2 \left(1 - 2\left(1 - \frac{P}{kL}\right)^2\right)}}{4\left(1 - \frac{P}{kL}\right)^2} \right\}.$$

Versión 7.

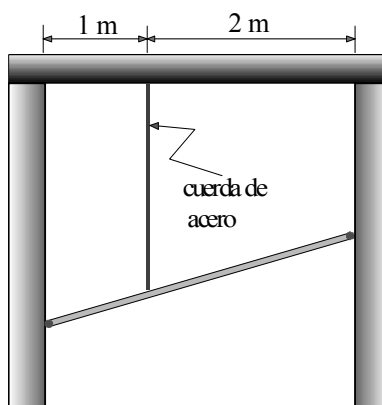
1. La viga uniforme AB de 100 kg que se muestra, se apoya en una articulación en A, y se sostiene en B y C, mediante un cable que pasa por una polea sin fricción en D. Si el cable soporta una tensión máxima de 800 N antes de la ruptura, determine la distancia máxima, $d_{\text{máx}}$, a la que puede aplicarse una fuerza de 6 kN sobre la viga.



2. La barra uniforme que tiene peso W y longitud L está apoyada en sus extremos A y B, donde el coeficiente de fricción estática es μ . Si la barra está a punto de resbalar, determinar el ángulo θ en función de μ .



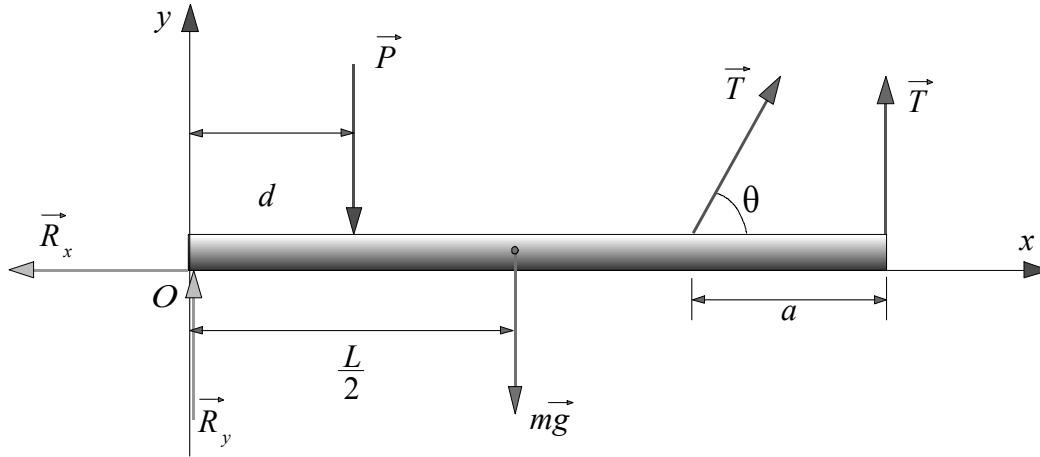
3. La barra homogénea de la figura tiene una longitud de 4 m y un peso de 40 kN, y está suspendida mediante un cable entre dos paredes lisas. Determinar: a) las reacciones ejercidas por las paredes sobre la barra, b) calcule la elongación del cable de acero si $A = 1 \text{ cm}^2$ y el módulo de elasticidad $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ y $L_0 = 2 \text{ m}$.



Solución.

1. $P = 6000 \text{ N}$, $T_{\text{máx}} = 800 \text{ N}$, $L = 10 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$, $\theta = 60^\circ$, $m = 100 \text{ kg}$.

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la viga, se tiene:



D.C.L. para la viga

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} T \cos \theta - R_x &= 0 \\ T \sin \theta + T + R_y - P - mg &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Con respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow$$

$$T \sin \theta (L - a) + TL - Pd - \frac{1}{2} mgL = 0 \quad (3)$$

De la ec. (3), se tiene:

$$d = \frac{1}{P} \left[((L - a) \sin \theta + L) T - \frac{1}{2} mgL \right]$$

El **máximo valor de d** se obtiene **cuando T es máxima**, es decir,

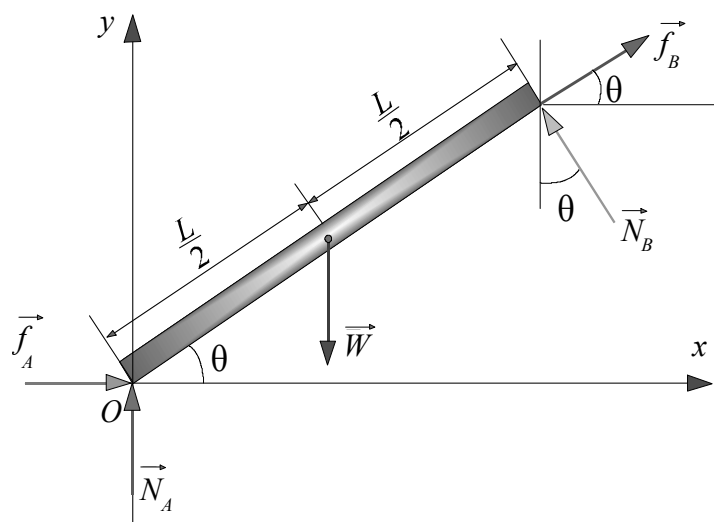
$$d_{\text{máx}} = \frac{1}{P} \left[((L - a) \sin \theta + L) T_{\text{máx}} - \frac{1}{2} mgL \right]$$

Por lo tanto:

$$d_{\text{máx}} = \frac{1}{6000 \text{ N}} \left[((8 \text{ m}) \sin 60^\circ + 10 \text{ m}) 800 \text{ N} - \frac{1}{2} (100 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ m}) \right]$$

$$\boxed{d_{\text{máx}} = 1.44 \text{ m}}$$

2. Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la barra, se tiene:



D.C.L. para la barra

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} f_A + f_B \cos \theta - N_B \sin \theta &= 0 \quad (1) \\ N_A + N_B \cos \theta + f_B \sin \theta - W &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Con respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow N_B L - \frac{1}{2} W L \cos \theta = 0 \quad (3)$$

Además:

$$f_A = \mu N_A \quad (4)$$

$$f_B = \mu N_B \quad (5)$$

De las ecs. (1), (4) y (5), se tiene:

$$\mu N_A + \mu N_B \cos \theta - N_B \sin \theta = 0 \Rightarrow N_A = \left(\frac{\sin \theta}{\mu} - \cos \theta \right) N_B \quad (1')$$

De las ecs. (1'), (2) y (5), se tiene:

$$\left(\frac{\sin \theta}{\mu} - \cos \theta \right) N_B + N_B \cos \theta + \mu N_B \sin \theta = W \Rightarrow$$

$$W = \left(\frac{1}{\mu} + \mu \right) N_B \sin \theta \Rightarrow$$

$$N_B = \frac{W}{\left(\frac{1}{\mu} + \mu \right) \sin \theta} \quad (2')$$

De las ecs. (2') y (3), se encuentra:

$$\frac{WL}{\left(\frac{1}{\mu} + \mu\right) \operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{2} WL \cos \theta \quad \Rightarrow$$

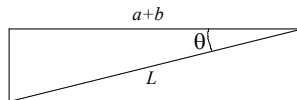
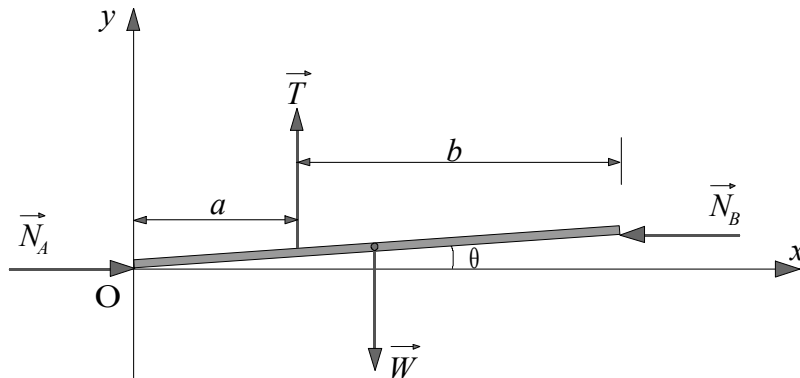
$$\operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{2}{\left(\frac{1}{\mu} + \mu\right)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta) = \left(\frac{2\mu}{1 + \mu^2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$2\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{4\mu}{1 + \mu^2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{4\mu}{1 + \mu^2}\right)}$$

3. $W=40000 \text{ N}$, $L=4\text{m}$, $L_0=2\text{m}$, $A=1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E=2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $a=1\text{m}$, $b=2\text{m}$.
Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la barra, se tiene:



D.C.L. para la barra

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N_A - N_B &= 0 & (1) \\ T - W &= 0 & (2) \end{aligned}$$

Con respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad Ta - \frac{1}{2}WL\cos\theta + N_B L\sin\theta = 0 \quad (3)$$

donde θ está dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{a+b}{L}\right)$$

es decir,

$$\theta = \arccos\left(\frac{3m}{4m}\right) = 41.4^\circ$$

De la ec. (2), se tiene:

$$T = W = 40000\text{N}$$

a) De la ec. (3), tenemos:

$$N_B = \frac{W}{L\sin\theta} \left(\frac{1}{2}L\cos\theta - a \right)$$
$$N_B = \frac{(40000\text{N})}{(4m)(\sin 41.4^\circ)} ((2m)\cos 41.4^\circ - 1m)$$
$$\boxed{N_B = 7560.73\text{N}}$$

De la ec. (1), tenemos:

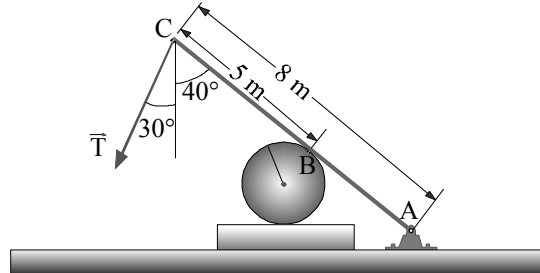
$$N_A = N_B \quad \Rightarrow$$
$$\boxed{N_A = 7560.73\text{N}}$$

b) entonces, el alargamiento del cable ΔL es tal que:

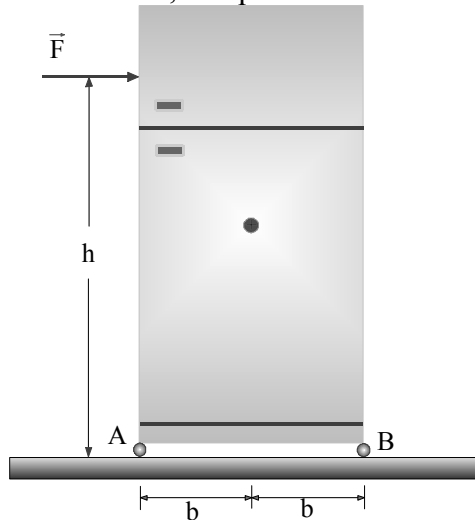
$$\frac{T}{A} = E \frac{\Delta L}{L_o}$$
$$\Delta L = \frac{T L_o}{E A}$$
$$\Delta L = \frac{40000\text{N}(2m)}{(1 \times 10^{-4} m^2)(2 \times 10^{11} \text{N}/m^2)}$$
$$\boxed{\Delta L = 4 \times 10^{-3} m}$$

Versión 8.

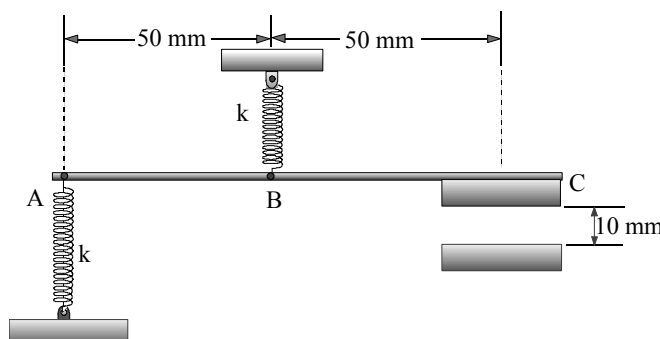
1. La varilla ABC está en equilibrio, se encuentra articulada en A, simplemente apoyada en B con un contacto liso sobre la esfera. Determine las reacciones de los apoyos sobre dicha varilla. $T=400\text{ N}$.



2. El refrigerador tiene una masa de 160 kg. Las distancias son: $h = 150\text{ cm}$, $b=35\text{ cm}$. El coeficiente de fricción estática en A y B es de 0.24. Encontrar la fuerza F máxima que se puede aplicar en la posición indicada, sin que se deslice el refrigerador.



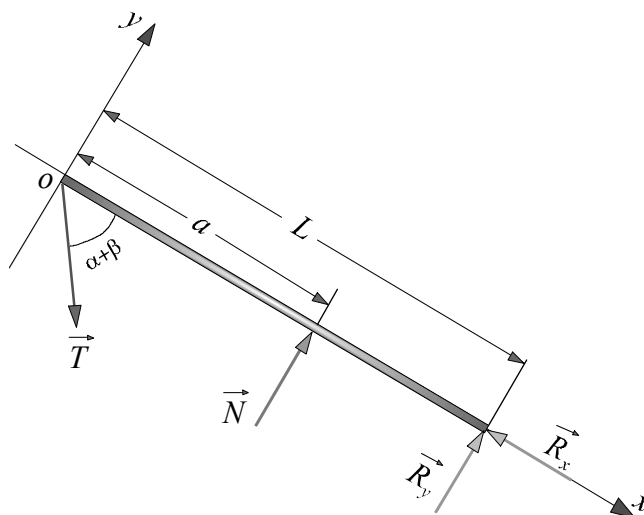
3. La tira de metal rígida y de peso insignificante es utilizada como parte de un interruptor electromagnético. Si los resortes en A y B tienen una constante de rigidez $k = 5\text{ N/m}$, y la tira está horizontal originalmente con los resortes in extendidos, determine la fuerza vertical mínima que se necesita para cerrar la separación en C.



Solución.

1. $T=400\text{ N}$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=40^\circ$, $L=8\text{ m}$, $a=5\text{ m}$.

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la varilla, se tiene:



D.C.L. para la varilla

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} T \cos(\alpha + \beta) - R_x &= 0 \\ N + R_y - T \sin(\alpha + \beta) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow N a + R_y L = 0 \quad (3)$$

De la ec. (3), se tiene:

$$N = -\left(\frac{L}{a}\right) R_y \quad (3')$$

De la ec. (1), tenemos:

$$R_x = T \cos(\alpha + \beta) = (400\text{ N}) \cos 70^\circ = 136.8\text{ N}$$

$$\boxed{R_x = 136.8\text{ N}}$$

De las ecs. (2) y (3'), se tiene:

$$R_y - \left(\frac{L}{a}\right) R_y = T \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow R_y = \frac{T \sin(\alpha + \beta)}{1 - \frac{L}{a}} = \frac{(400\text{ N}) \sin 70^\circ}{1 - \frac{8\text{ m}}{5\text{ m}}}$$

$$\boxed{R_y = -626.46\text{ N}}$$

Es decir, el sentido de R_y es contrario al indicado en la figura.

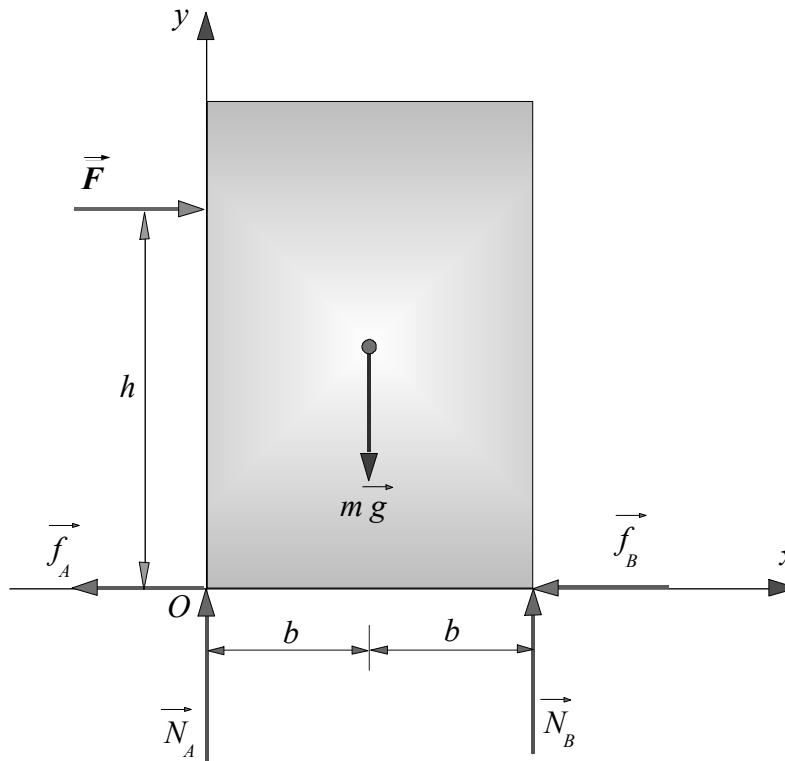
De la ec. (3'), se tiene:

$$N = -\left(\frac{8m}{5m}\right)(-626.46\text{N})$$

$$\boxed{N = 1002.33\text{N}}$$

2. $m=160\text{ kg}$, $h=1.5\text{ m}$, $b=0.35\text{ m}$, $\mu=0.24$.

Respecto del S. R. mostrado, para el equilibrio del refrigerador, se tiene:



D.C.L. para el refrigerador

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} F - f_A - f_B &= 0 \\ N_A + N_B - mg &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow N_B(2b) - mgb - Fh = 0 \quad (3)$$

Se tienen dos casos extremos:

I Supongamos que el valor máximo de $F=F_{\max}$ se tiene cuando:

$$f_A = \mu N_A \quad (4)$$

$$f_B = \mu N_B \quad (5)$$

Entonces, de las ecs. (1), (4) y (5), se tiene:

$$F_{m\acute{a}x} = \mu N_A + \mu N_B \quad \Rightarrow \quad N_A = \frac{F_{m\acute{a}x}}{\mu} - N_B \quad (6)$$

De las ecs. (2) y (6), se tiene:

$$\frac{F_{m\acute{a}x}}{\mu} - N_B + N_B - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{m\acute{a}x} = \mu mg}$$

$$F_{m\acute{a}x} = (0.24)(160kg)(9.8 m/s^2) = 376.32N$$

$$\boxed{F_{m\acute{a}x} = 376.32N}$$

De la ec. (3) se tiene:

$$N_B = \frac{mgb + Fh}{2b} = \frac{1}{0.7m} \left[(0.35m)(160kg)(9.8m/s^2) + (376.32N)(1.5m) \right]$$

$$\boxed{N_B = 1590.4N}$$

Por lo tanto de las ecs. (2) o (6), se tiene:

$$N_A = mg - N_B = (160kg)(9.8m/s^2) - 1590.4N = -22.4N$$

Lo cual no es posible, por lo tanto este caso no es admisible físicamente.

II. Supongamos que $F=F_{m\acute{a}x}$, cuando el refrigerador está a punto de girar alrededor del punto B, por lo tanto:

$$N_A = 0 \quad \Rightarrow \quad f_A = 0 \quad (7)$$

$$f_{B\ m\acute{a}x} = \mu N_B \quad (8)$$

En este caso, se tiene que:

$$(1) \quad \Rightarrow \quad F_{m\acute{a}x} - f_B = 0 \quad (1')$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad N_B - mg = 0 \quad (2')$$

$$(3) \quad \Rightarrow \quad N_B(2b) - mgb - F_{m\acute{a}x}h = 0 \quad (3')$$

Por lo tanto:

De la ec. (2'), tenemos:

$$N_B = mg = (160kg)(9.8m/s^2)$$

$$\boxed{N_B = 1568N}$$

De la ec. (3'), se tiene:

$$\begin{aligned} N_B(2b) - mgb - F_{m\acute{a}x}h & \Rightarrow \\ 2mgb - mgb - F_{m\acute{a}x}h = 0 & \Rightarrow \quad mgb = F_{m\acute{a}x}h \end{aligned}$$

$$F_{m\acute{a}x} = \frac{mgb}{h} \Rightarrow F_{m\acute{a}x} = \frac{(160kg)(9.8m/s^2)(0.35m)}{1.5m}$$

$$F_{m\acute{a}x} = 365.86N$$

De la ec. (1'), se tiene:

$$f_B = F_{m\acute{a}x}$$

$$f_B = 365.86N$$

De la ec. (8), tenemos:

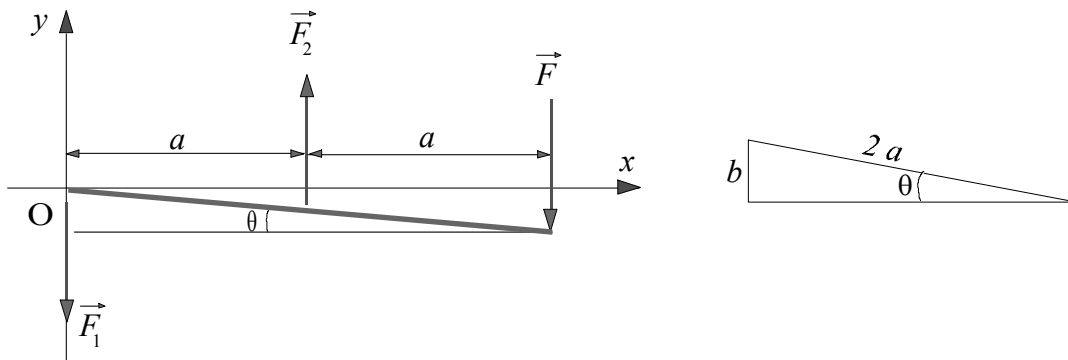
$$f_{B\ m\acute{a}x} = \mu N_B = (0.24)(1568N)$$

$$f_{B\ m\acute{a}x} = 376.32N$$

Por lo tanto, dado que $f_{B\ m\acute{a}x} > f_B$, concluimos que el refrigerador empieza a girar alrededor del punto B antes de resbalar sobre el piso.

3. $k = 5\text{ N/m}$, $a = 0.05\text{ m}$, $b = 0.01\text{ m}$.

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la tira de metal, se tiene:



D.C.L. Tira de metal rígida

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_1 + F_2 - F = 0 \quad (1)$$

Respecto del punto O:

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{0} \Rightarrow F_2(a \cos \theta) - F(2a \cos \theta) = 0 \quad (2)$$

De la ec. (2), se tiene:

$$F = \frac{F_2}{2} \quad (2')$$

El estiramiento del resorte A es:

$$x_1 = b$$

Por lo tanto:

$$F_1 = k x_1 = (5\text{N}/m)(0.01m)$$

$$\boxed{F_1 = 0.05\text{N}}$$

De la ec. (1), tenemos:

$$F_2 = F + F_1 \tag{1'}$$

Por lo tanto de las ecs. (1') y (2'), se tiene:

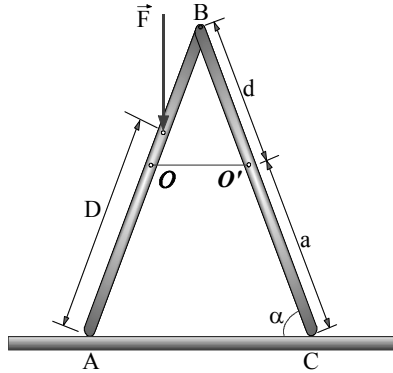
$$F = \frac{F_1 + F_2}{2} \Rightarrow$$

$$F = F_1 \Rightarrow$$

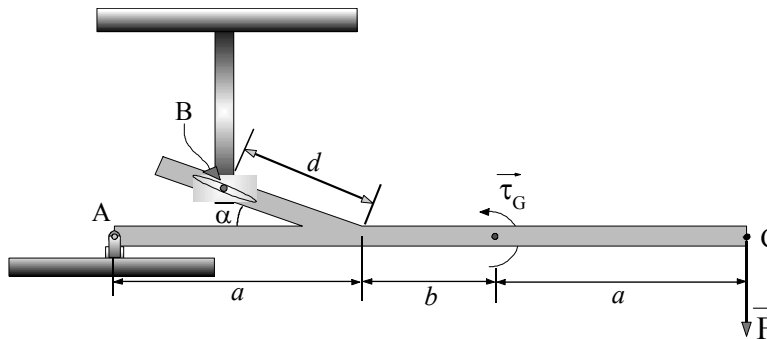
$$\boxed{F = 0.05\text{N}}$$

Versión 9.

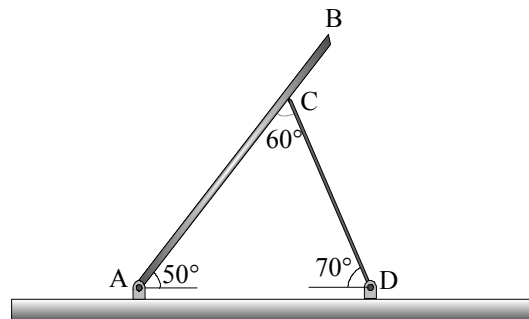
- La escalera AOBO'C está en equilibrio sobre una superficie horizontal lisa. OO' es una cuerda que permite que las partes de la escalera formen un ángulo con la horizontal. Escriba las ecuaciones de equilibrio para la parte BO'C de la escalera. Considere que cada brazo de la escalera tiene masa m .



- La barra ABC está en equilibrio, se encuentra articulada en A, tiene contacto simple y liso en B y en el extremo C se le aplica una fuerza F , de magnitud 5 kN, y una torca τ_G , de magnitud 4kN-m, como se indica en la figura. Calcule las fuerzas de reacción en A y en B. Donde $a=25$ cm, $b=10$ cm, $d=15$ cm, y $\alpha=35^\circ$.

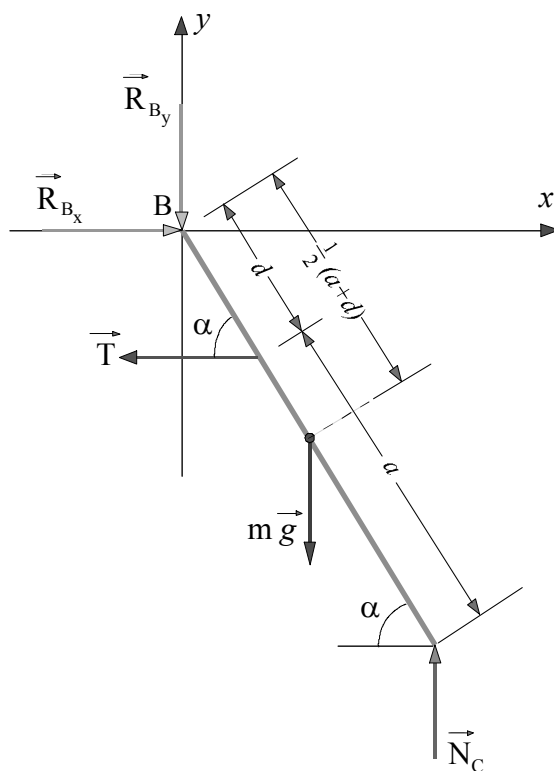


- La varilla AB, articulada en A, y la varilla CD, articulada en D, están simplemente apoyadas en C. Ignorar cualquier causa de fricción. Las varillas están en equilibrio y la longitud de la varilla CD es L y su masa m está uniformemente distribuida. Establezca las ecuaciones de equilibrio para la varilla CD.



Solución.

1. Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de BO'C tenemos:



D.C.L. Brazo derecho de la escalera

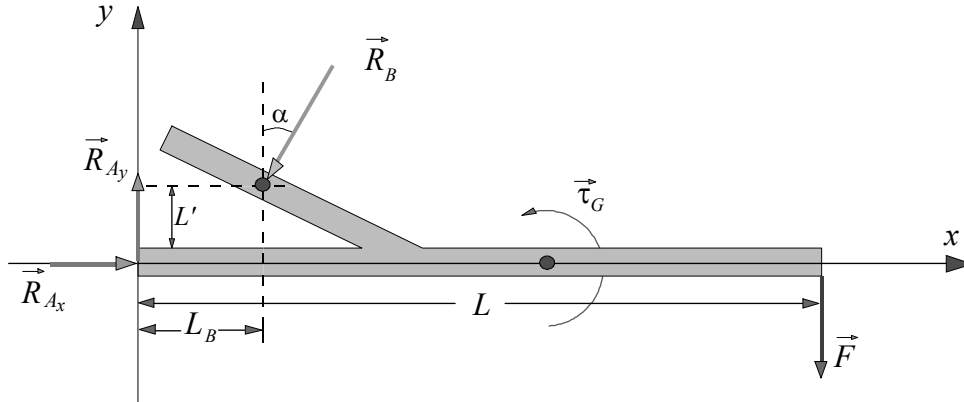
$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} R_{B_x} - T &= 0 \\ -R_{B_y} - mg + N_C &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Respecto del punto B:

$$\sum \vec{\tau}_B = \vec{0} \Rightarrow N_C (a+d) \cos \alpha - T d \sin \alpha - \frac{1}{2} m g (a+d) \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

2. $F=5 \text{ kN}$, $\tau_G=4 \text{ kN}\cdot\text{m}$, $\alpha=35^\circ$, $L=0.6\text{m}$, $d=0.15\text{m}$, $a=0.25\text{m}$, $b=0.1\text{m}$.
Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la barra ABC tenemos:



D.C.L. de la barra

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{Ax} - R_B \sin \alpha = 0 \\ R_{Ay} - R_B \cos \alpha - F = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Respecto del punto A:

$$\sum \vec{\tau}_A = \vec{0} \Rightarrow \tau_G - F L + R_B L' \sin \alpha - R_B L_B \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Además se tiene que:

$$L' = d \sin \alpha, \quad L_B = a - d \cos \alpha \quad (4)$$

Sustituyendo las ecs. (4) en (3), se tiene:

$$\tau_G - F L + R_B [d (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - a \cos \alpha] = 0$$

de donde, usando la identidad trigonométrica $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, se encuentra

$$R_B = \frac{F L - \tau_G}{d - a \cos \alpha}$$

$$R_B = \frac{(5 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) - 4 \text{ kNm}}{(0.15 \text{ m}) - (0.25 \text{ m}) \cos 35^\circ} \Rightarrow R_B = 18.25 \text{ kN}$$

De la ec. (1) se tiene:

$$R_{Ax} = R_B \sin \alpha \Rightarrow R_{Ax} = (18.25 \text{ kN}) \sin 35^\circ = 10.47 \text{ kN}$$

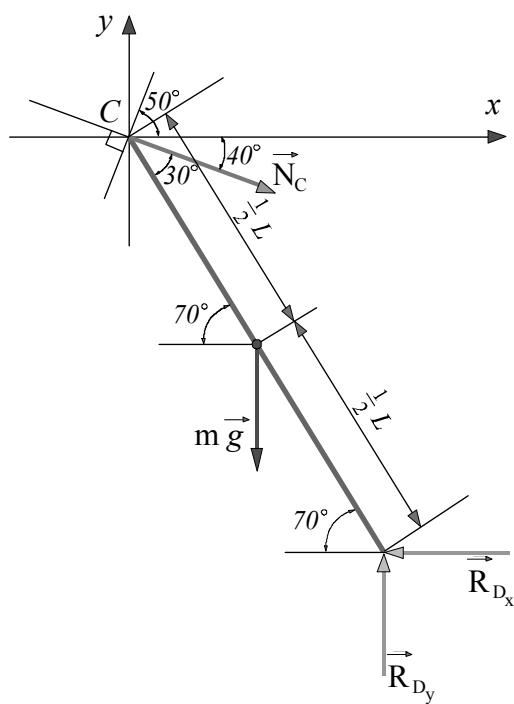
$$R_{Ax} = 10.47 \text{ kN}$$

De la ec. (2), se tiene:

$$R_{Ay} = F + R_B \cos \alpha \Rightarrow R_{Ay} = 5 \text{ kN} + (18.25 \text{ kN}) \cos 35^\circ$$

$$R_{Ay} = 19.95 \text{ kN}$$

3. Respecto al S.R. mostrado, para el equilibrio de la varilla CD tenemos:



D.C.L. de la varilla

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$-R_{D_x} + N_C \cos 40^\circ = 0 \quad (1)$$

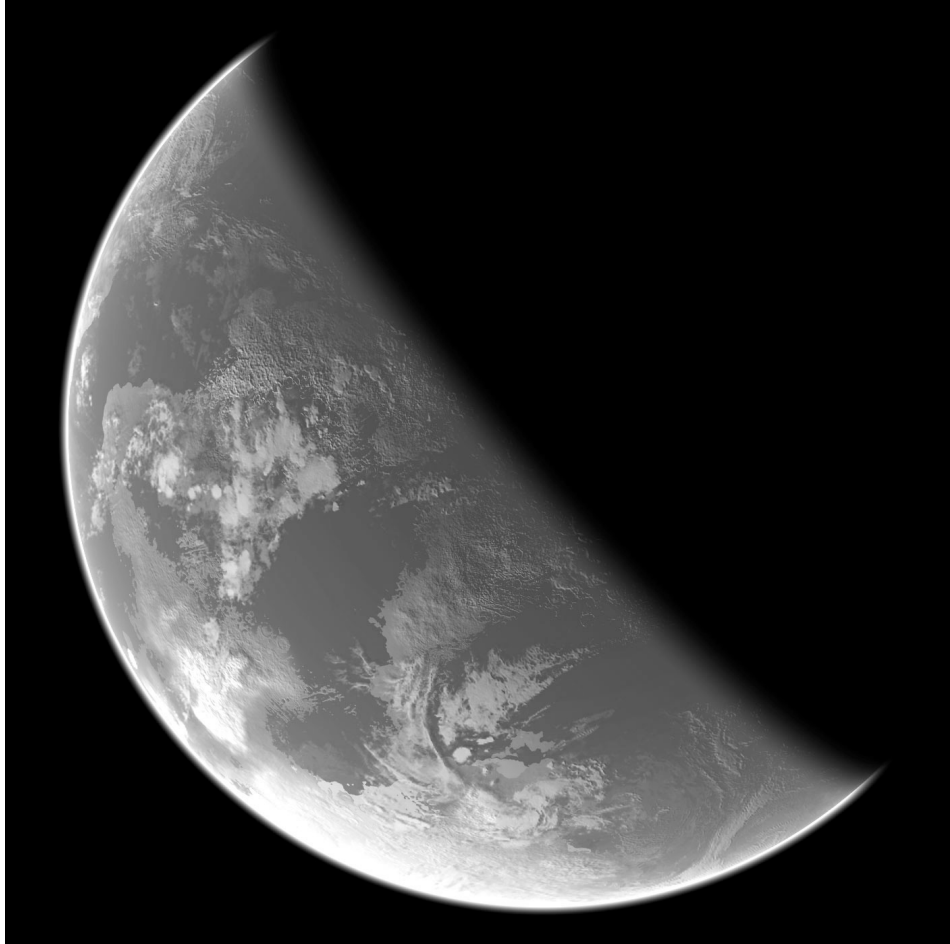
$$R_{D_y} - N_C \sin 40^\circ - mg = 0 \quad (2)$$

Respecto del punto C:

$$\sum \vec{\tau}_C = \vec{0} \quad \Rightarrow$$

$$R_{D_y} L \cos 70^\circ - R_{D_x} L \sin 70^\circ - \frac{1}{2} mg L \cos 70^\circ = 0 \quad (3)$$

Tercera Parte



UNIDAD V

FUERZA Y CAMPO

GRAVITACIONALES

Objetivos

Se pretende que los alumnos:

- a) Entiendan la propiedad gravitacional de los cuerpos materiales.
- b) Conozcan la interacción gravitacional entre cuerpos materiales
- c) Se familiaricen, en forma introductoria, con el concepto de campo vectorial.

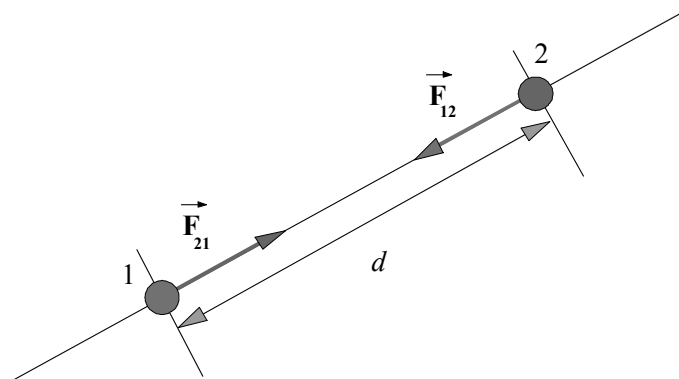
Contenido

- 1. Ley de la Gravitación Universal.
- 2. Principio de Superposición.
- 3. Campo Gravitacional.

1. Ley de la Gravitación Universal.

Experimentalmente se observa que los cuerpos materiales interactúan con fuerzas de atracción, que presentan las siguientes características:

Consideremos dos cuerpos puntuales m_1 y m_2 , colocados en reposo, respecto de un S.R. inercial dado y separados una distancia d . Se observa que m_1 ejerce **sobre** m_2 una fuerza $\vec{F}_{12}$ cuya dirección es a lo largo de la recta que pasa por las partículas, su sentido es tal que m_1 atrae a m_2 y su magnitud es inversamente proporcional a la distancia d elevada al cuadrado.



$$|\vec{F}_{12}| \propto \frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

De la misma forma, m_2 ejerce una fuerza $\vec{F}_{21}$ **sobre** m_1 tal que:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

En estas condiciones, se dice que m_1 y m_2 **interactúan** con fuerzas gravitacionales.

Definición de masa gravitacional.

La GRAVITACION es una propiedad Universal de toda clase de materia, es decir todos los cuerpos materiales la experimentan. Cuando 2 cuerpos materiales experimentan una fuerza dada por:

$$|\vec{F}_{12}| \propto \frac{m_1 m_2}{d^2},$$

se dice que las masas m_1 y m_2 son sus *masas gravitacionales*, estando definidas mediante esta fuerza. Por otro lado, la *masa inercial* estaría definida para estos cuerpos materiales mediante los *cambios* experimentados en los *movimientos de dichos cuerpos*. Por lo tanto se puede considerar que **la masa gravitacional es proporcional a la masa inercial**, es decir,

$$m_{\text{Gravitacional}} \propto m_{\text{Inercial}},$$

entonces la unidad de medida asociada a ambos tipos de masas es, en el S.I., el kilogramo, por lo tanto:

$$m_{\text{Gravitacional}} = K m_{\text{Inercial}},$$

donde, K = Constante de proporcionalidad **Adimensional**.

Experimentalmente se observa que:

- a) K es la misma para TODOS los cuerpos y
- b) $K=1$.

Por lo tanto, resulta indistinto hablar de masa inercial y gravitacional, es decir:

$$m_{\text{Gravitacional}} = m_{\text{Inercial}}.$$

La diferencia entre masa inercial y masa gravitacional radica en que una está definida en términos del movimiento (*Inercial*) y la otra en términos de una fuerza (*Gravitacional*).

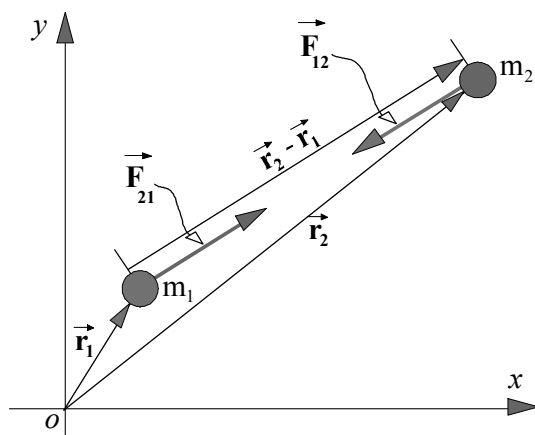
Dadas las masas m_1 y m_2 de dos cuerpos puntuales colocados en reposo a la distancia d , la constante de proporcionalidad entre la magnitud de las fuerzas de interacción gravitacional con las masas m_1 y m_2 y con la distancia d , se obtiene experimentalmente y para el S.I. de unidades, se encuentra que tiene el valor:

$$G = 6.6 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2.$$

A G se le llama la **constante de Gravitación Universal**. De tal forma que:

$$|\vec{F}_{12}| = G \frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

En general, si m_1 y m_2 son las masas de dos cuerpos puntuales colocados en las posiciones $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ respecto de un S.R. inercial dado, las fuerzas de interacción gravitacional están dadas por:



$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|},$$

en donde $\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ representa a un vector unitario en la dirección del vector desplazamiento

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1$. El signo menos en esta ecuación indica que $\vec{F}_{12}$ apunta en sentido opuesto al del vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, es decir que la **fuerza gravitacional es atractiva**.

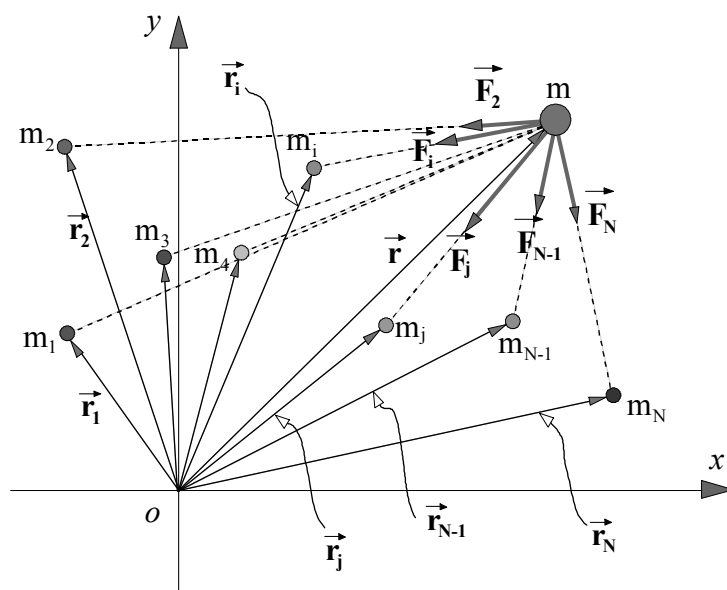
A esta relación se le denomina la **Ley de la Gravitación Universal de Newton**,

y

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

2. Principio de Superposición.

Sean $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ las posiciones de N cuerpos puntuales respecto de un S.R. inercial dado, cuyas masas son $m_1, m_2, \dots, m_N$. Sea $\vec{r}$ la posición de otro cuerpo puntual de masa m . Experimentalmente se observa que la fuerza gravitacional que se ejerce sobre m está dada por:



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

donde:

$$\vec{F}_i = -G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \text{ con } i = 1, 2, \dots, N.$$

Es decir:

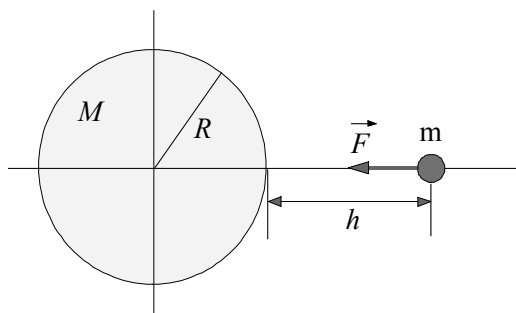
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = - \sum_{i=1}^N \left[G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right].$$

A este resultado se le llama **El Principio de Superposición**.

Por aplicación del Principio de Superposición y de la Ley de Gravitación Universal, se puede calcular la fuerza gravitacional de interacción **entre dos cuerpos de geometría arbitraria**.

Para cuerpos de simetría esférica, se encuentra que la fuerza gravitacional que ejercen sobre un cuerpo puntual es la misma que le ejercería un cuerpo puntual de la misma masa del cuerpo esférico, colocada en su centro.

Por ejemplo, la fuerza que un cuerpo esférico, de masa M y radio R , ejerce sobre un cuerpo puntual m colocado a una distancia h de su superficie tiene magnitud:

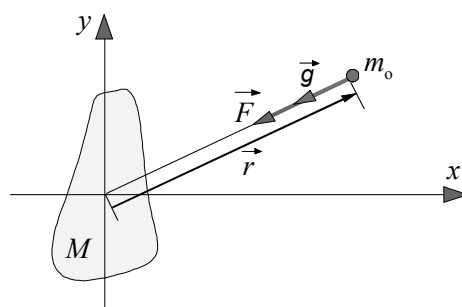


$$F = G \frac{Mm}{(R+h)^2},$$

cuya dirección y sentido están dirigidos radialmente hacia el centro de M

3. Campo Gravitacional.

Consideremos un cuerpo de masa M y un cuerpo puntual de masa m_0 (tal que $m_0 \ll M$), colocados en reposo con respecto a un S.R. inercial dado y sea $\vec{r}$ la posición de m_0 . Si $\vec{F}(\vec{r})$ es la fuerza gravitacional que M ejerce sobre m_0 , se define el **campo gravitacional**, $\vec{g}(\vec{r})$, producido por M en el punto $\vec{r}$ como:

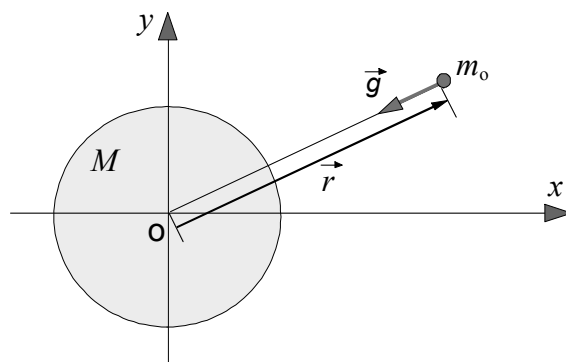


$$\vec{g}(\vec{r}) \equiv \lim_{m_0 \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{F}}{m_0} \right).$$

De tal forma que la fuerza que M ejerce sobre cualquier otro cuerpo puntual colocado en $\vec{r}$ está dado por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m_0 \vec{g}(\vec{r}).$$

Por ejemplo si M es un cuerpo esférico cuyo centro coincide con el origen del S.R., entonces:



$$\vec{F} = -G \frac{M m_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

en donde $r = |\vec{r}|$, por lo tanto:

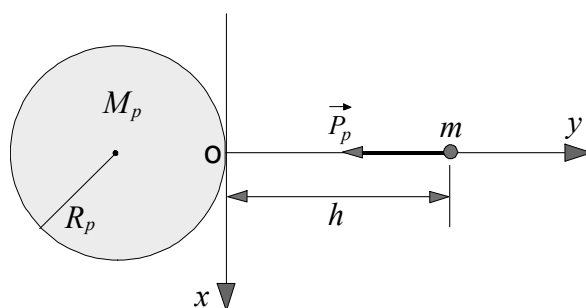
$$\vec{g}(\vec{r}) = \lim_{m_0 \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{F}}{m_0} \right) \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

En particular si el cuerpo esférico es un planeta de masa M_p y radio R_p , a

$$\boxed{\vec{g}(\vec{R}_p) = -G \frac{M_p}{R_p^2} \hat{R}},$$

se le llama el campo de gravedad (gravitacional) del planeta.

La fuerza que M_p ejerce sobre un cuerpo puntual m , colocado a una distancia h de su superficie, tiene una magnitud dada por:



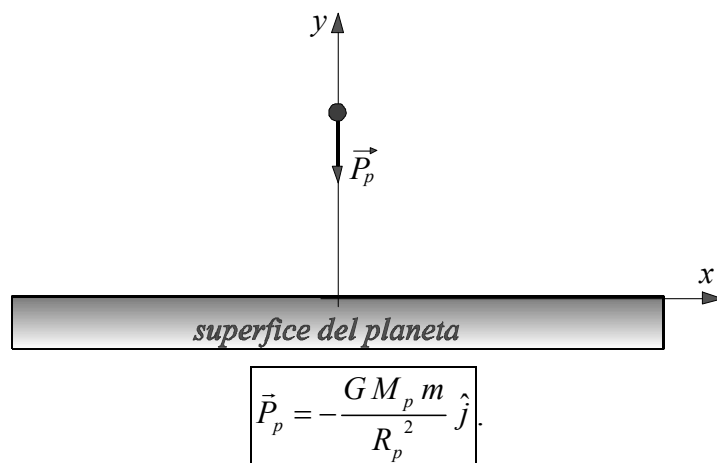
$$P_p = \frac{G M_p m}{(R_p + h)^2},$$

cuya dirección y sentido es radial hacia el centro del planeta.

A la fuerza $\vec{P}_p$, se le llama el peso de m en el planeta M_p . En el caso en que $R_p \gg h$, se tiene que:

$$P_p = \frac{G M_p m}{(R_p + h)^2} \approx \frac{G M_p m}{R_p^2},$$

siendo su dirección radial hacia el centro del planeta, y coincide con la vertical hacia la superficie del planeta. En un sistema de referencia como el ilustrado en la figura, se tiene:



Si el planeta es la tierra, (considerada esférica):

$$M_p \equiv M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad R_p \equiv R_T = 6.4 \times 10^6 \text{ m}.$$

por lo tanto, el campo de gravedad terrestre, resulta ser:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2} = (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2) \frac{(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.4 \times 10^6 \text{ m})} = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{g = 9.8 \text{ m/s}^2},$$

se le llama la aceleración de la gravedad terrestre, y a la fuerza

$$\boxed{\vec{W} = -m g \hat{j}},$$

se le llama el peso del cuerpo de masa m .



UNIDAD VI

FUERZA Y CAMPO

ELECTRICOS

Objetivos

Se pretende que los alumnos:

- a) Entiendan el concepto de carga eléctrica.
- b) Conozcan la interacción eléctrica entre cuerpos cargados eléctricamente.
- c) Refuercen su entendimiento sobre el concepto de campo vectorial.

Contenido

- 1. Ley de Coulomb.
- 2. Principio de Superposición.
- 3. Campo Eléctrico.

1. Ley de Coulomb.

Experimentalmente se observa que por medio de procesos físicos o químicos (de frotación o ionización) los cuerpos materiales adquieren la propiedad de interaccionar con fuerzas que pueden ser de atracción o de repulsión. En estas condiciones se dice que los cuerpos están electrizados y que interactúan mediante fuerzas eléctricas.

Definición de carga eléctrica.

La carga eléctrica es el parámetro físico que se usa para cuantificar la propiedad de electrización de los cuerpos, sus propiedades son:

- a) La carga eléctrica es una cantidad escalar cuya unidad de medida en el S.I. de unidades es el Coulomb, que se define como:

$$[q] = \text{Coulomb} = C = \frac{\text{Ampere}}{s} = \frac{A}{s}.$$

Su valor numérico se establece de tal forma que la magnitud de la fuerza de interacción eléctrica, entre dos cuerpos puntuales, sea directamente proporcional al producto de sus cargas.

- b) Experimentalmente se observa la existencia de dos tipos de carga, llamadas **positiva** y **negativa**, de tal manera que dos cuerpos cargados **con el mismo tipo de carga se repelen** y dos **con cargas distintas se atraen**.
- c) La carga eléctrica está cuantizada, es decir, experimentalmente se observa que existe una cantidad mínima de carga, la cual se corresponde con la cantidad de carga que tiene el electrón, cuya magnitud es:

$$|e| = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

Al tipo de carga que posee el electrón se le considera negativa y, en contraparte, la mínima cantidad de carga positiva se identifica con la carga del protón.

De tal forma que **cualquier cantidad de carga, siempre es un número entero múltiplo de esa cantidad mínima**, es decir:

$$|q| = N|e|, \quad \text{con } N \text{ un número entero.}$$

- d) En los sistemas físicos aislados, la carga eléctrica es constante, es decir, se conserva.

Ley de Coulomb.

Experimentalmente se observa que dos cuerpos puntuales con cargas q_1 y q_2 , colocados en reposo a una distancia d (uno respecto al otro), observados desde un S.R. inercial dado, se ejercen fuerzas tales que:

La fuerza que q_1 ejerce a q_2 , $\vec{F}_{12}$, es tal que su magnitud es,

$$F_{12} \propto \frac{q_1 q_2}{d^2},$$

La fuerza que q_2 ejerce a q_1 , $\vec{F}_{21}$, es tal que:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

La dirección de las fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ coincide con la recta que pasa por q_1 y q_2 . El sentido de las fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ es tal que:

Si q_1 y q_2 son del **mismo signo**, *se repelen*.

Si q_1 y q_2 son de **signos contrarios**, *se atraen*.

La constante de proporcionalidad entre la magnitud de la fuerza de interacción, las cargas y la distancia entre las partículas, se obtiene experimentalmente y su valor en el S.I. de unidades es:

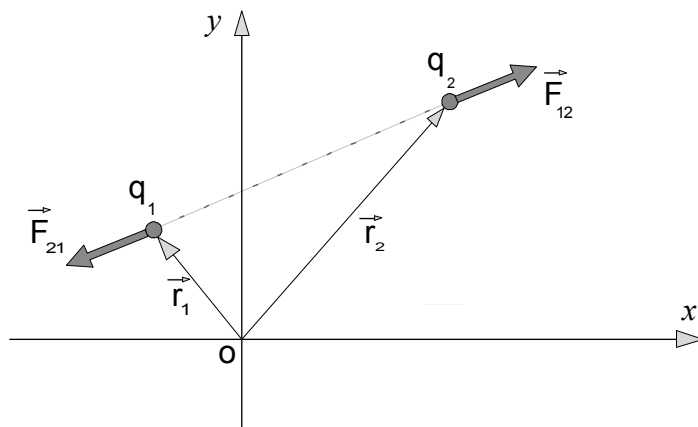
$$K = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2,$$

De tal manera que:

$$F_{12} = K \frac{q_1 q_2}{d^2}.$$

A K se le llama la constante de Coulomb.

En general, si $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ son las posiciones de dos cargas puntuales q_1 y q_2 respecto de un S.R. inercial dado, entonces las fuerzas de interacción eléctrica están dadas por:



$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|},$$

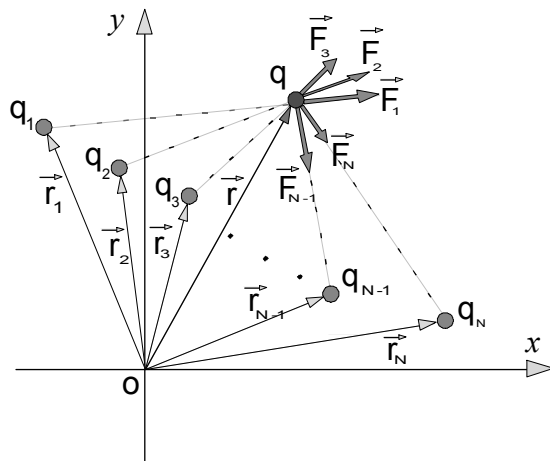
y

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Al resultado anterior se le denomina la **Ley Coulomb**.

2. Principio de Superposición.

Sean $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ las posiciones de N cargas puntuales respecto de un S.R. inercial dado, cuyas cargas son $q_1, q_2, \dots, q_N$. Sea $\vec{r}$ la posición de otra carga puntual q . Experimentalmente se observa que la fuerza eléctrica que las N cargas eléctricas ejercen sobre q está dada por:



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

donde:

$$\vec{F}_i = K \frac{q_i q}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N.$$

Es decir:

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + K \frac{q_2 q}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \dots + K \frac{q_N q}{|\vec{r} - \vec{r}_N|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_N}{|\vec{r} - \vec{r}_N|},$$

ó

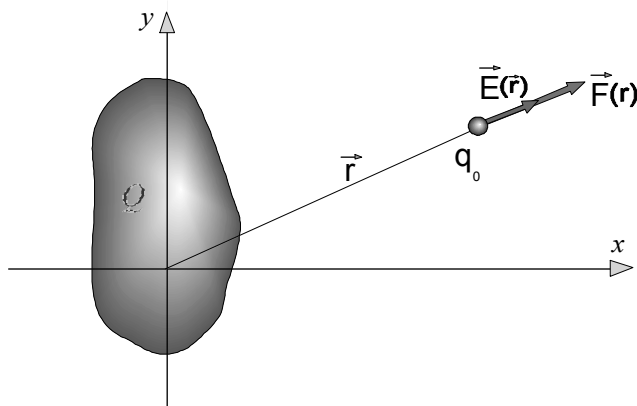
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \left[K \frac{q_i q}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right].$$

A este resultado se le llama **El Principio de Superposición**.

Mediante la aplicación de la Ley de Coulomb y del Principio de Superposición, en general, es posible calcular las fuerzas de interacción eléctrica que se ejercen entre sí **dos cuerpos cargados de geometría arbitraria** en reposo.

3. Campo Eléctrico.

Sea Q la carga de un cuerpo y q_0 una carga de prueba ($q_0 > 0$ y $|q_0| \ll |Q|$) colocada en reposo en el punto $\vec{r}$, respecto de un S.R. inercial dado. Si $\vec{F}(\vec{r})$ es la fuerza que Q ejerce sobre q_0 , se define el **campo eléctrico**, $\vec{E}(\vec{r})$, producido por Q en el punto $\vec{r}$ como:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0}.$$

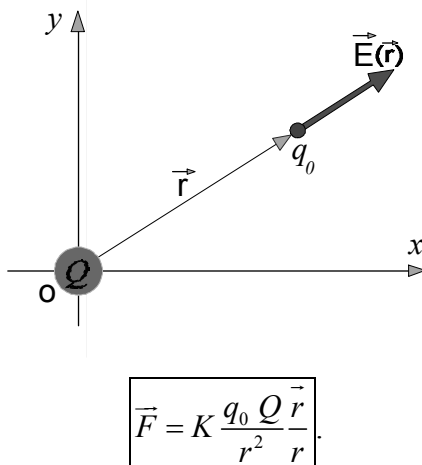
De tal forma que la fuerza $\vec{F}$ que Q ejerce sobre cualquiera otra carga puntual q_0 colocada en el punto $\vec{r}$, está dada por:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}(\vec{r}).$$

Ejemplos de campo eléctrico.

a) *Campo eléctrico producido por una carga puntual.*

Sea Q una carga puntual colocada en el origen de un S.R. inercial dado. La fuerza que Q ejerce sobre una carga de prueba q_0 colocada en el punto $\vec{r}$, está dada por:



Por lo tanto el campo eléctrico producido por Q en el punto $\vec{r}$, está dado como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{q_0} \left[K \frac{q_0 Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}}.$$

Obsérvese que el campo eléctrico producido por la carga puntual Q tiene **simetría esférica**, es decir:

Su magnitud

$$E = K \frac{Q}{r^2},$$

es la misma para todos los puntos colocados a la misma distancia r desde Q y su dirección es radial a Q .

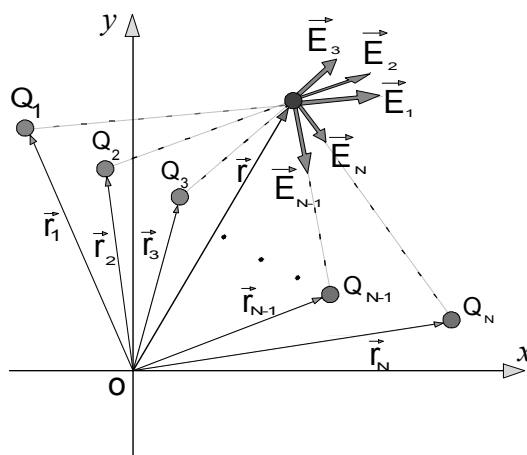
El sentido del campo lo determina la carga Q : **Si Q es positiva**, el sentido de $\vec{E}$ es **saliendo de Q** , **si es negativa**, el sentido de $\vec{E}$ es **hacia Q** .

b) *Campo eléctrico producido por un conjunto de cargas puntuales.*

Sean $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ las posiciones de N cargas puntuales $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$, sobre una carga de prueba q_0 , colocada en el punto $\vec{r}$, las N cargas le ejercen una fuerza resultante, $\vec{F}$, dada por:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \left[K \frac{Q_i q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right] = q_0 \sum_{i=1}^N \left[K \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right],$$

Entonces el campo eléctrico producido por las N cargas puntuales en el punto $\vec{r}$, está dado por:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^N \left[K \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right],$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{Q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + K \frac{Q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \dots + K \frac{Q_N}{|\vec{r} - \vec{r}_N|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_N}{|\vec{r} - \vec{r}_N|},$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + \dots + \vec{E}_N(\vec{r}) \Rightarrow$$

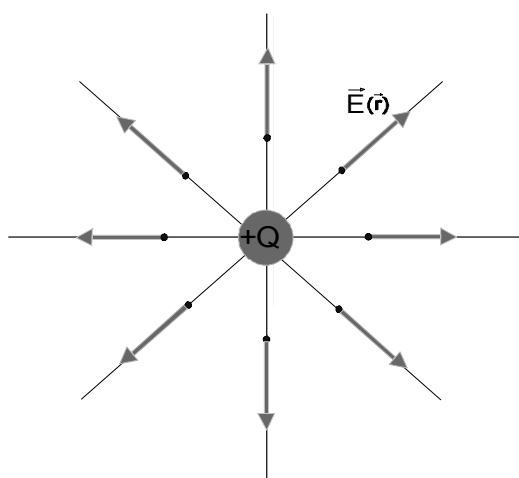
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r})}.$$

Líneas de Fuerza de un Campo Vectorial.

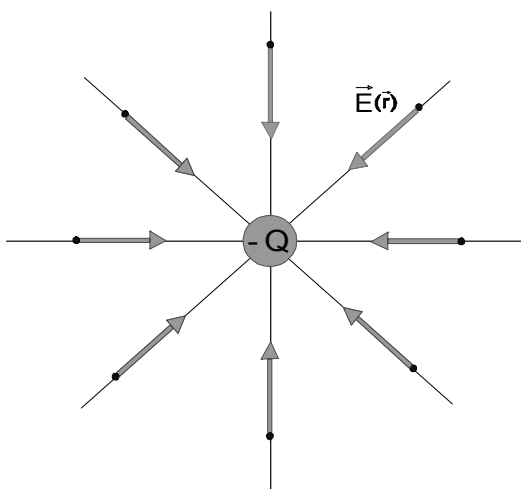
Dado un campo vectorial en el espacio (como ejemplo el campo gravitacional o el campo eléctrico), se definen las líneas de fuerza, como las curvas en ese espacio, tales que, en cada punto el vector de campo es tangente a la curva; el sentido de cada curva coincide, en cada punto, con el sentido del campo.

Las líneas de fuerza se usan para hacer una representación gráfica del campo vectorial en el espacio, y se dibujan de tal forma que, la densidad de líneas, por unidad de superficie del diagrama, sea proporcional a la magnitud del campo en cada región del espacio.

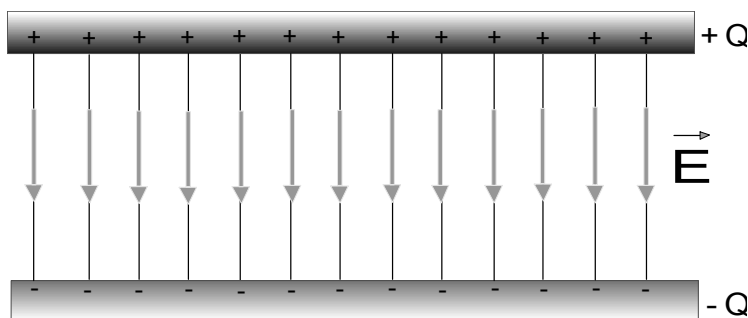
Ejemplos de Líneas de Fuerza.



Campo eléctrico producido por una carga puntual **Positiva (+)**



Campo eléctrico producido por una carga puntual **Negativa (-)**



Campo eléctrico uniforme producido por un condensador de placas planas y paralelas.



UNIDAD VII

FUERZA Y CAMPO

MAGNÉTICOS

Objetivos

Se pretende que los alumnos:

- a) Entiendan la definición empírica de campo magnético, en base a su conocimiento de campo vectorial.
- b) Conozcan la definición de corriente eléctrica y su interacción con el campo magnético.
- c) Aprendan que la corriente eléctrica es la fuente del campo magnético.
- d) Conozca la interacción magnética entre conductores de corriente eléctrica

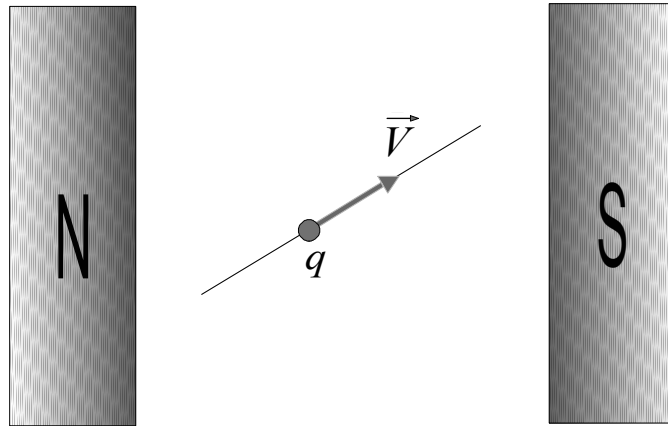
Contenido

- 1. Campo Magnético.
- 2. Fuerza que un Campo Magnético Ejerce sobre un Conductor por el que circula una Corriente Eléctrica.
- 3. Ley de Ampere. Campo Magnético producido por una Conductor Rectilíneo por el que Circula una Corriente Eléctrica.
- 4. Fuerza que se Ejercen dos Conductores Rectilíneos y Paralelos en los que Circulan Corrientes Eléctricas.

1. Campo Magnético.

Experimentalmente se observa que, en el espacio que rodea a un imán o a un conductor en el que circula corriente eléctrica, sobre una partícula cargada se ejerce una fuerza con características específicas, la cual desaparece al retirar el imán o el conductor mencionados. Las características de dicha fuerza observadas experimentalmente, son las siguientes:

Consideremos una partícula de carga positiva q que se mueve, con velocidad $\vec{V}$ respecto de un S.R. inercial dado, en el espacio entre los polos de un imán de herradura. La fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre q es tal que:



- $\vec{F} = \vec{0}$ cuando: $q = 0$ ó $\vec{V} = \vec{0}$.
- Aún cuando $q \neq 0$, $\vec{V} \neq \vec{0}$, existe una dirección de $\vec{V}$ para la cual $\vec{F} = \vec{0}$.
- En los casos en que $\vec{F} \neq \vec{0}$, se observa que:

$$|\vec{F}| \propto |q|, \quad |\vec{F}| \propto |\vec{V}| \quad \text{y} \quad \vec{F} \perp \vec{V}.$$

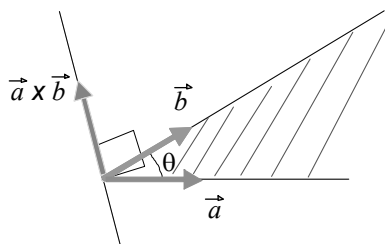
También se observa que si se invierte el signo de q o el sentido de $\vec{V}$, el sentido de $\vec{F}$ se invierte.

En la situación descrita, se dice que sobre q actúa una fuerza magnética, $\vec{F}$ debida a un campo magnético, de inducción $\vec{B}$, producido en el espacio por el imán o por el conductor en el que circula corriente eléctrica. El campo $\vec{B}$, se define tal que:

$$\vec{F} = q \vec{V} \times \vec{B}.$$

NOTA: Producto Vectorial o Producto Cruz.

Dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ de $\square^3$, se define el producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, denotado como $\vec{a} \times \vec{b}$, como el vector de $\square^3$ tal que:



- Su magnitud está dada por: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$,
Donde θ es el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$
- La dirección de $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
- El sentido de $\vec{a} \times \vec{b}$ queda determinado por la regla de la mano derecha.

De esta forma, se observa que: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

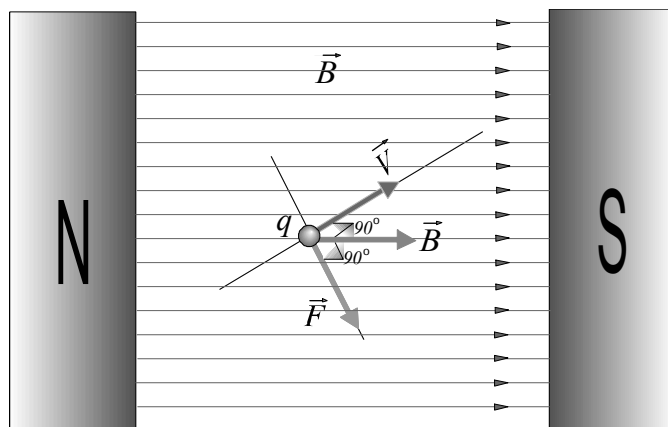
Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están dados en componentes cartesianas, respecto de un S.R. dado, es decir:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k},$$

Entonces:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}.$$

De la definición de $\vec{B}$ se observa que:



a)

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} q = 0 & (\text{partícula sin carga}) \\ \vec{v} = 0 & (\text{partícula en reposo}) \\ \vec{B} = 0 & (\text{no hay imán ni conductor}) \\ \vec{v} \parallel \vec{B} & (q \text{ se mueve a lo largo del campo } \vec{B}) \end{cases}$$

- b) $\vec{F} \perp \vec{V}$ y $\vec{F} \perp \vec{B}$.
- c) El sentido de $\vec{F}$ queda determinado por la regla de la mano derecha aplicada al producto $\vec{V} \times \vec{B}$. Si se invierte el signo de q , o el sentido de $\vec{V}$, entonces se invierte el sentido de $\vec{F}$.
- d) La magnitud de $\vec{F}$ está dada por:

$$F = q v B \sin \theta.$$

Donde θ es el ángulo formado por $\vec{V}$ y $\vec{B}$.

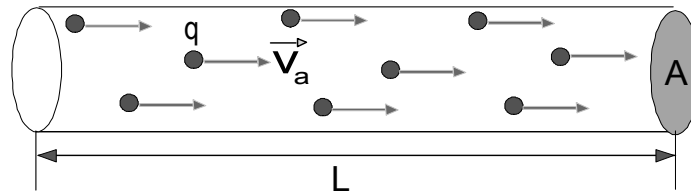
2. Fuerza que un Campo Magnético Ejerce sobre un Conductor en el que Circula Corriente Eléctrica.

Corriente Eléctrica.

Una corriente eléctrica queda constituida por un flujo de partículas cargadas en el espacio. Se observa que una corriente eléctrica se puede establecer en el vacío o en medios materiales. A los cuerpos materiales donde se puede generar una corriente eléctrica se les llama materiales conductores, en caso contrario se les denomina no conductores o aislantes.

Intensidad de Corriente Eléctrica.

Consideremos un conductor de longitud L y área de sección transversal A , en el que circula una corriente eléctrica producida por un flujo de partículas de carga positiva q , que se mueven con velocidad $\vec{V}_A$. Si $\vec{V}_A$ es constante, se dice que la corriente es continua, de otro modo, la corriente se le llama variable.



En el caso de la corriente continua, se define la intensidad de la corriente como la cantidad de carga que atraviesa el área de sección transversal por unidad de tiempo. Es decir, si Δq es la cantidad de carga que pasa por A en el tiempo Δt , la intensidad de la corriente I , está dada por:

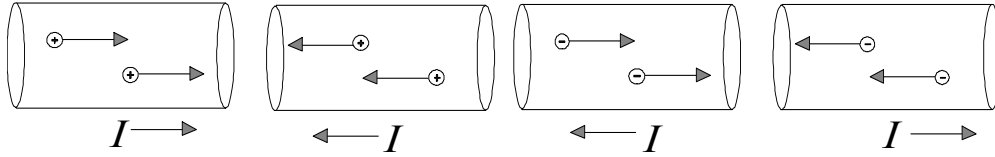
$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Observar que I es una cantidad escalar, en el S.I. de unidades, su unidad se le llama Ampere, es decir:

$$[I] = \text{Ampere} = A.$$

Dado que existen dos tipos de carga, una corriente se puede producir por el flujo de cargas positivas o negativas. Experimentalmente se observa que los efectos de una corriente

producida por el flujo de cargas positivas, es equivalente a la corriente producida por un flujo contrario, de cargas negativas. Por esto, a la intensidad de la corriente en un conductor, esquemáticamente se le asocia un sentido, que corresponde con el sentido del flujo de cargas positivas equivalente, de la siguiente forma:



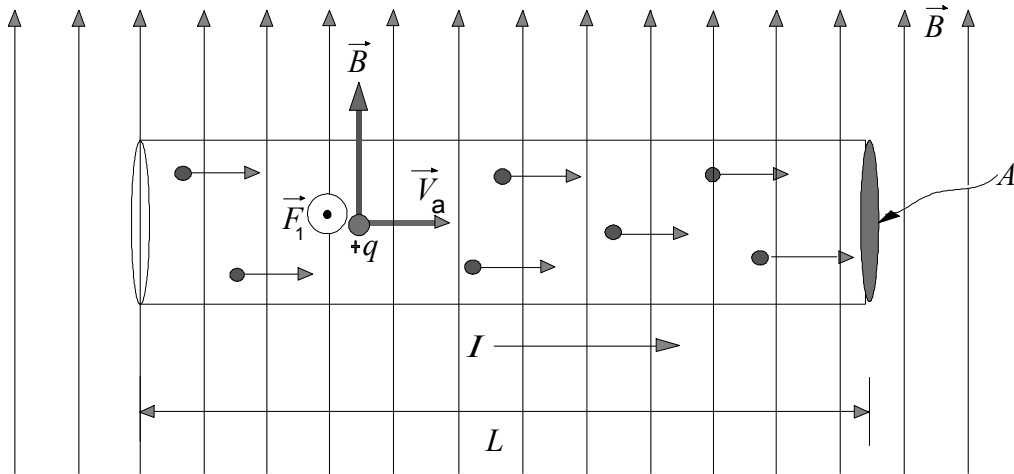
Consideremos un conductor de longitud L y área de sección transversal A , en el que circula una corriente de intensidad I , producida por el flujo de partículas de carga positiva $+q$, con velocidad $\vec{V}_A = cte$. Sea $\vec{B}$ un campo magnético en el espacio que rodea al conductor. Sobre cada carga q , se ejerce una fuerza $\vec{F}$, dada por:

$$\vec{F}_1 = q \vec{V}_A \times \vec{B}.$$

La fuerza total ejercida sobre el conductor es:

$$\vec{F} = \sum_P \vec{F}_1 = \sum_P [q \vec{V}_A \times \vec{B}] = \left[\sum_P q \right] (\vec{V}_A \times \vec{B}),$$

Donde la suma $\sum_P$ se realiza sobre todas las partículas móviles y cargadas contenidas en el conductor de longitud L . Si Δq es la carga total que fluye en el conductor, entonces:



$$\left[\sum_P q \right] = \Delta q.$$

Como las partículas se mueven con velocidad $\vec{V}_A$ a lo largo del conductor, en sentido de la corriente, el tiempo Δt que tarda Δq en pasar por A , es tal que:

$$\vec{V}_A = \frac{\vec{L}}{\Delta t}.$$

Donde $\vec{L}$ es tal que, $L = |\vec{L}|$, y su dirección y sentido son a lo largo del conductor en sentido de la corriente.

Por lo tanto:

$$\vec{F} = \Delta q \frac{\vec{L}}{\Delta t} \times \vec{B} = \left(\frac{\Delta q}{\Delta t} \right) \vec{L} \times \vec{B},$$

pero $I = \left(\frac{\Delta q}{\Delta t} \right)$; entonces,

$$\boxed{\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}}.$$

De la expresión anterior, se tiene $F = ILB \sin \theta$, donde θ es el ángulo entre $\vec{L}$ y $\vec{B}$; por lo tanto:

$$[B] = \frac{[F]}{[I][L]},$$

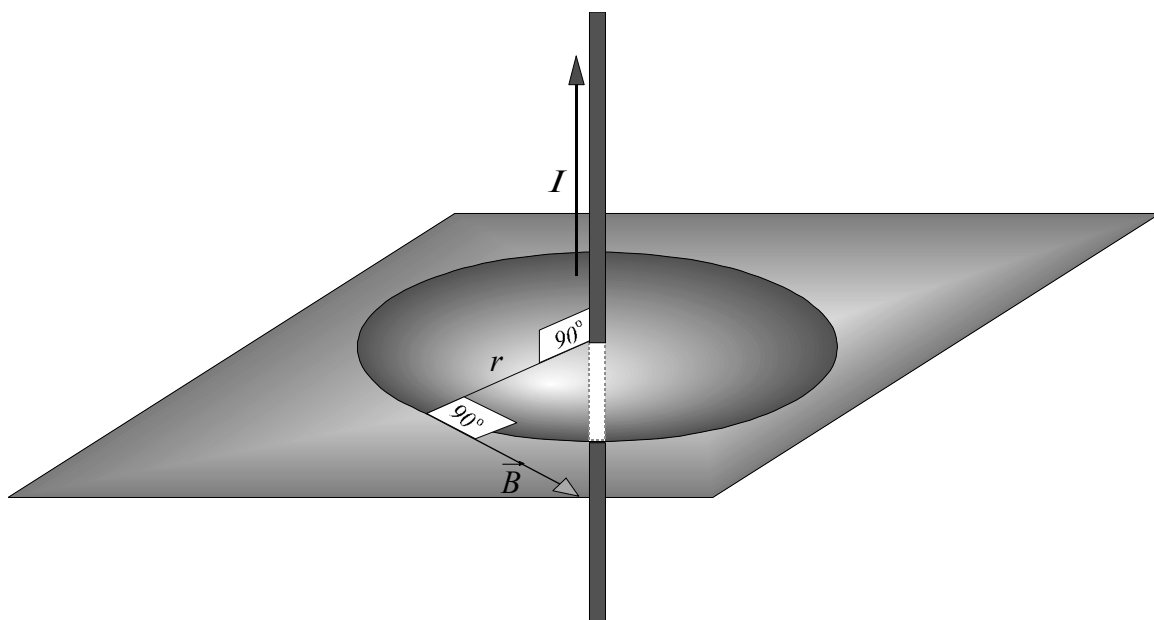
en el S.I. de unidades:

$$[B] = \frac{\text{Newton}}{\text{Ampere metro}} = \frac{\text{N}}{\text{A.m}} = \frac{\text{Weber}}{\text{metro}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \text{Tesla} = \text{T}.$$

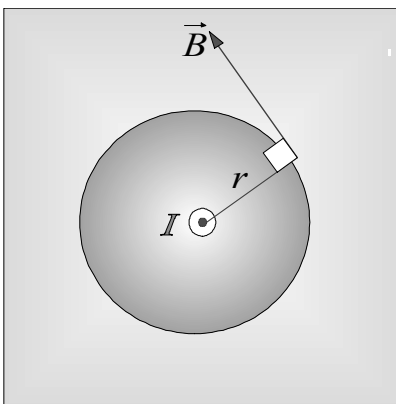
3. Ley de Ampere. Campo magnético producido por un conductor rectilíneo en el que circula una corriente eléctrica.

De los experimentos de Ampere, en los que encontró que dos conductores que transportan corrientes eléctricas interactúan con fuerzas atractivas o repulsivas, dependiendo de los sentidos relativos de las corrientes, se introdujo el concepto de campo magnético, creado por los conductores, y que les permite interactuar entre sí.

La ley de Biot-Savart permite calcular el campo magnético $\vec{B}$ que produce un conductor en el que circula corriente eléctrica. Posteriormente se demostró que ese campo magnético $\vec{B}$ cumple con una propiedad, que ahora se le llama la ley circuital de Ampere, que lo relaciona con la corriente que circula en el conductor. Aplicando la ley circuital de Ampere, se demuestra que el campo magnético $\vec{B}$, producido por un conductor rectilíneo e infinito en el que circula la corriente de intensidad I , en un punto colocado a la distancia r del conductor, tiene las siguientes propiedades:



- a) Su magnitud está dada por: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, donde μ_0 es una constante cuyo valor en el S.I. de unidades es: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Wb}{A \cdot m}$.
- b) Su dirección es tangente a la circunferencia de radio r centrada en el conductor, en el plano perpendicular al conductor.



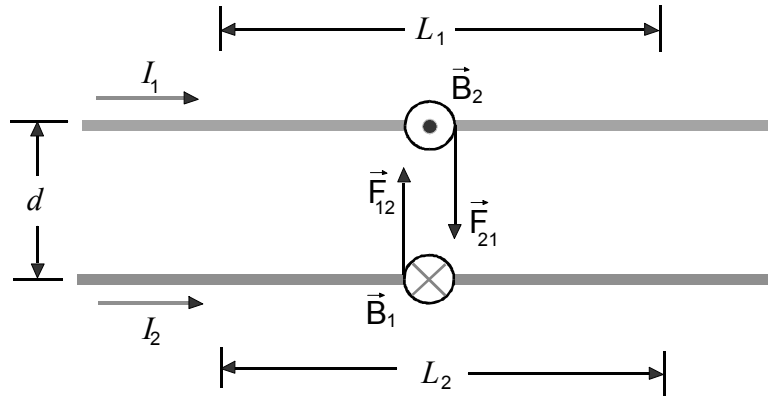
- a) Su dirección la determina la regla de la mano derecha.

Esta regla establece que:

“Se toma el conductor con la mano derecha, el dedo pulgar se dirige en la dirección de circulación de la corriente y los demás dedos de la mano indicarán la dirección de las líneas del campo magnético”.

4. Fuerzas que se Ejercen Dos Conductores Rectilíneos y Paralelos en los que Circulan Corrientes Eléctricas.

Consideremos dos conductores rectilíneos, infinitos y paralelos, en los que circulan las corrientes I_1 e I_2 , como se muestra en la figura.



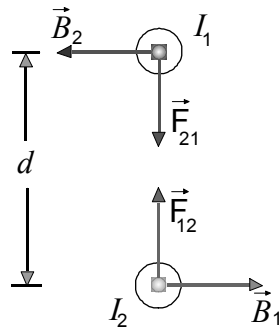
El campo magnético $\vec{B}_1$ producido por I_1 en los puntos donde se coloca I_2 , tiene magnitud dada por:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

La magnitud el campo magnético $\vec{B}_2$ producido por I_2 en los puntos donde se coloca I_1 es:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}.$$

La dirección y sentido de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ es como se muestra en la figura.



La fuerza que $\vec{B}_1$ ejerce sobre un tramo de longitud L_2 de I_2 es; de magnitud:

$$F_{12} = I_2 L_2 B_1 = I_2 L_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{F_{12}}{L_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}}.$$

La fuerza que $\vec{B}_2$ ejerce sobre un tramo de longitud L_1 de I_1 , tiene magnitud dada por:

$$F_{21} = I_1 L_1 B_2 = I_1 L_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{F_{21}}{L_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}}.$$

La dirección y sentido de $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ son como se muestran en la figura, por lo tanto:

$$\frac{\vec{F}_{12}}{L_2} = -\frac{\vec{F}_{21}}{L_1}.$$

Observar que si se invierte el sentido de alguna de las corrientes, el sentido de las fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ también se invierten.

Entonces se tiene que:

“Dos conductores rectilíneos, infinitos y paralelos, en los que circulan las corrientes I_1 e I_2 , interactúan con las fuerzas, por unidad de longitud, de magnitud igual a:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d},$$

Donde d es la separación entre los conductores. Las fuerzas de interacción son atractivas si las corrientes tienen el mismo sentido, y repulsivas en el otro caso.”

PROBLEMARIO

Objetivos

Se pretende que el alumno:

- a) Apliquen lo aprendido en las unidades V, VI, y VII en la solución de ejercicios similares a los planteados en el tercer examen parcial del curso.

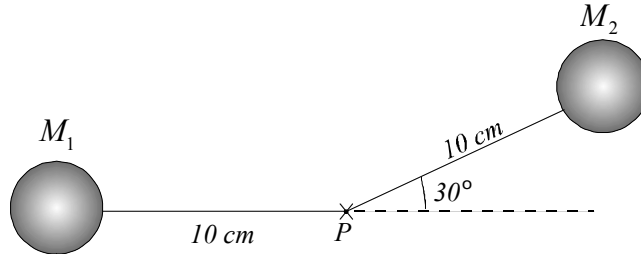
Contenido

Se presentan nueve versiones de ejercicios en la estructura típica del tercer examen parcial del curso.

Versión 1.

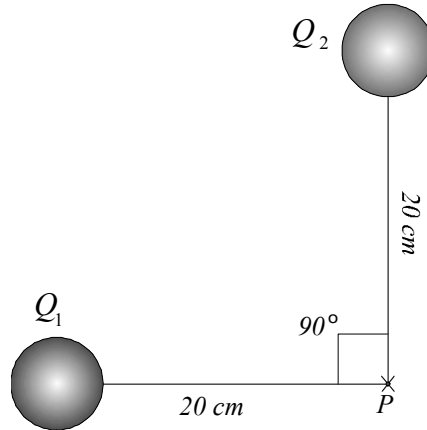
1. Las partículas de masas M_1 y M_2 están fijas. Calcular el campo gravitacional que éstas producen en el punto P .

$$M_1 = 300 \text{ kg}, M_2 = 400 \text{ kg}, G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2.$$



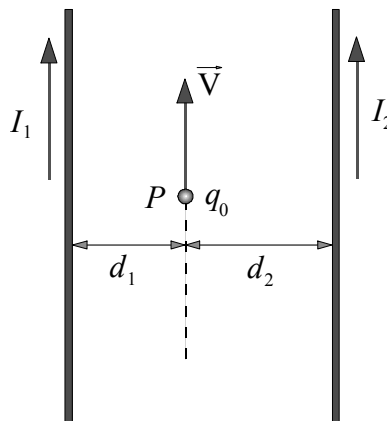
2. Las cargas eléctricas Q_1 y Q_2 son puntuales y están fijas. Determinar el campo eléctrico que éstas generan en el punto P .

$$Q_1 = 2 \times 10^{-6} \text{ C}, Q_2 = -3 \times 10^{-6} \text{ C}, K = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$$



3. La carga eléctrica q_0 se mueve paralelamente a los alambres conductores que transportan las corrientes I_1 e I_2 , como se muestra en la figura. Los alambres conductores y la carga q_0 se encuentran en el mismo plano. La rapidez de la carga eléctrica es V . Encontrar la fuerza magnética que actúa sobre la partícula de carga q_0 .

$$I_1 = 20 \text{ A}, I_2 = 20 \text{ A}, d_1 = 2 \text{ m}, d_2 = 5 \text{ m}, q_0 = 1 \times 10^{-7} \text{ C}, V = 2 \times 10^6 \text{ m/s}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}.$$

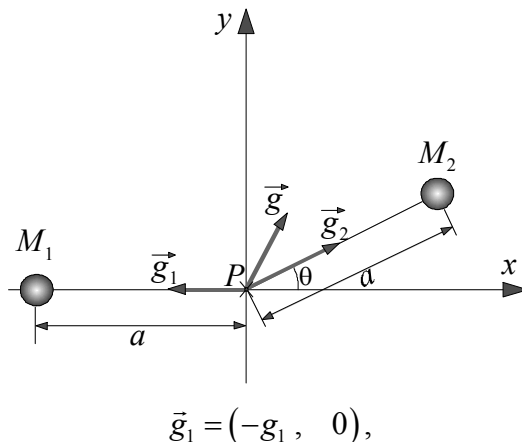


Solución.

1. $M_1 = 300\text{ kg}$, $M_2 = 400\text{ kg}$, $a = 0.1\text{ m}$, $\theta = 30^\circ$ $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$.

En el punto P el campo gravitacional está dado por: $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$.

Respecto del S.R. mostrado, tenemos:



$$\vec{g}_1 = (-g_1, 0),$$

donde,

$$g_1 = G \frac{M_1}{a^2} = (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2) \frac{300 \text{ kg}}{(0.1 \text{ m})^2} = 2 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

entonces:

$$\boxed{\vec{g}_1 = (-2 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2, 0)}$$

También

$$\vec{g}_2 = (g_2 \cos \theta, g_2 \sin \theta) = (g_2 \cos 30^\circ, g_2 \sin 30^\circ),$$

donde,

$$g_2 = G \frac{M_2}{a^2} = (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2) \frac{400 \text{ kg}}{(0.1 \text{ m})^2} = 2.66 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

entonces:

$$\vec{g}_2 = ((2.66 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2) \cos 30^\circ, (2.66 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2) \sin 30^\circ)$$

$$\boxed{\vec{g}_2 = (2.31 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2, 1.33 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2)}$$

Por lo tanto:

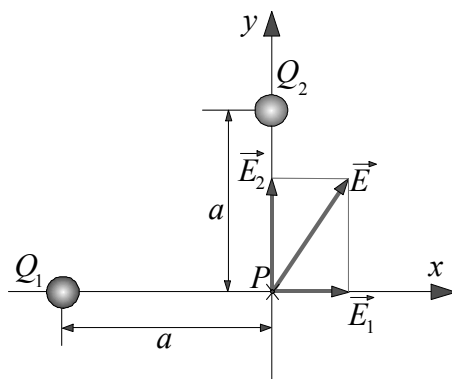
$$\vec{g} = \left(-2 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 0\right) + \left(2.31 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 1.33 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = \left(0.31 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 1.33 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

$$\boxed{\vec{g} = \left(0.31 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 1.33 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}$$

2. $Q_1=2\times 10^{-6}\text{ C}$, $Q_2=-3\times 10^{-6}\text{ C}$, $a=0.2\text{ m}$, $K=9\times 10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2$.

En el punto P el campo eléctrico está dado por: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Respecto del S.R. mostrado, tenemos:



$$\vec{E}_1 = (E_1, 0),$$

donde ,

$$E_1 = K \frac{Q_1}{a^2} = \left(9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2\right) \frac{2 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.2 \text{ m})^2} = 4.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}},$$

entonces:

$$\vec{E}_1 = \left(4.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, 0 \right)$$

También

$$\vec{E}_2 = (0, E_2),$$

donde,

$$E_2 = K \frac{|Q_2|}{a^2} = \left(9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2\right) \frac{3 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.2 \text{ m})^2} = 6.75 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}},$$

entonces:

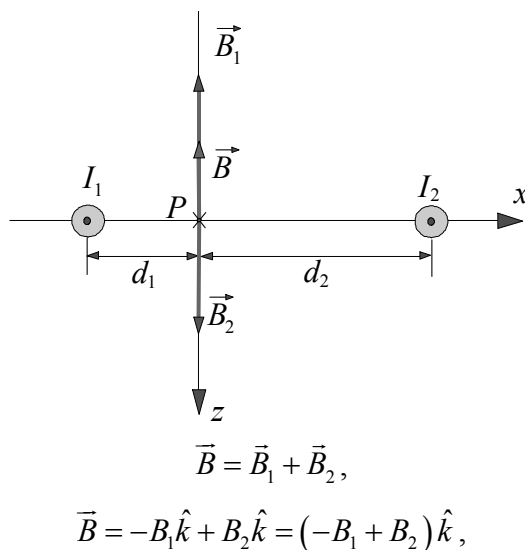
$$\vec{E}_2 = \left(0, 6.75 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$$

Por lo tanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(4.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, 0 \right) + \left(0, 6.75 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$$

$$\vec{E} = \left(4.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, 6.75 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$$

3. $I_1 = I_2 = 20 \text{ A}$, $d_1 = 2 \text{ m}$, $d_2 = 5 \text{ m}$, $q_0 = 1 \times 10^{-7} \text{ C}$, $V = 2 \times 10^6 \text{ m/s}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}$.
Respecto del S.R. mostrado, tenemos que en el punto P el campo magnético está dado por:



donde:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d_1} = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}) \frac{20 \text{ A}}{2\pi (2 \text{ m})} = 2 \times 10^{-6} \text{ T}$$

y

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d_2} = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}) \frac{20 \text{ A}}{2\pi (5 \text{ m})} = 8 \times 10^{-7} \text{ T}$$

entonces:

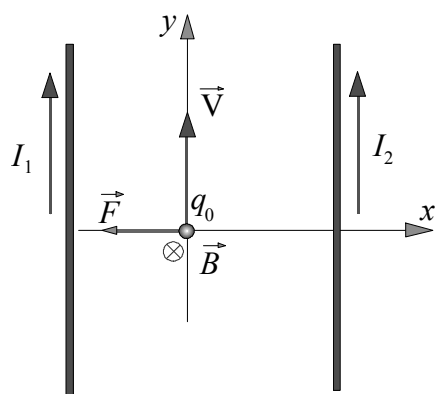
$$\vec{B} = (-2 \times 10^{-6} \text{ T} + 8 \times 10^{-7} \text{ T}) \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{B} = (-1.2 \times 10^{-6} \text{ T}) \hat{k}}$$

Por lo tanto la fuerza que actúa sobre q_0 está dada por:

$$\boxed{\vec{F} = q_0 \vec{V} \times \vec{B}}$$

En el S.R. mostrado, los ejes coordenados x , y , están indicados y el eje z es perpendicular saliente al plano de la figura, por lo que el campo magnético está dirigido a lo largo del eje z pero en dirección entrante al plano de la figura, entonces tenemos:



$$\vec{F} = -(q_0 \nabla B) \hat{i}$$

$$\vec{F} = - \left((1 \times 10^{-7} \text{ C}) \left(2 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (1.2 \times 10^{-6} \text{ T}) \right) \hat{i}$$

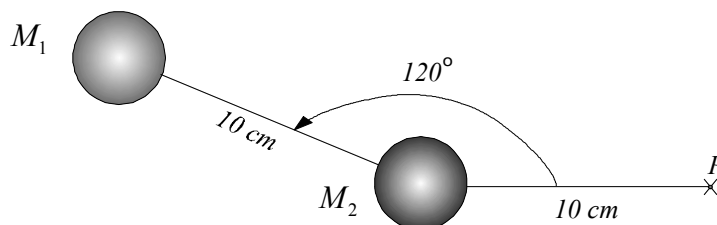
$$\boxed{\vec{F} = -(2.4 \times 10^{-7} \text{ N}) \hat{i}}$$

es decir, la fuerza experimentada por la carga q_0 está dirigida hacia las x negativas.

Versión 2.

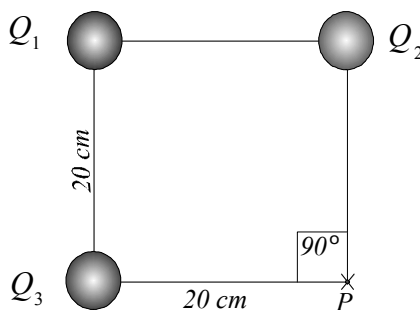
1. Las partículas de masas M_1 y M_2 están fijas. Calcular el campo gravitacional que éstas producen en el punto P .

$$M_1 = 300 \text{ kg}, M_2 = 400 \text{ kg}, G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2.$$



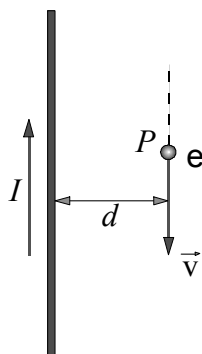
2. Las cargas eléctricas Q_1 , Q_2 y Q_3 son puntuales y están fijas. Determinar el campo eléctrico que éstas generan en el punto P .

$$Q_1 = 2 \times 10^{-6} \text{ C}, Q_2 = 4 \times 10^{-6} \text{ C}, Q_3 = -3 \times 10^{-6} \text{ C}, K = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$$



3. Un electrón e se mueve paralelamente a un alambre conductor, que transporta la corriente eléctrica I , como se muestra en la figura. La rapidez de la carga eléctrica es v . Encontrar la fuerza magnética que se ejerce sobre el electrón.

$$I = 20 \text{ A}, v = 2 \times 10^6 \text{ m/s}, d = 2 \text{ m}, e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}.$$

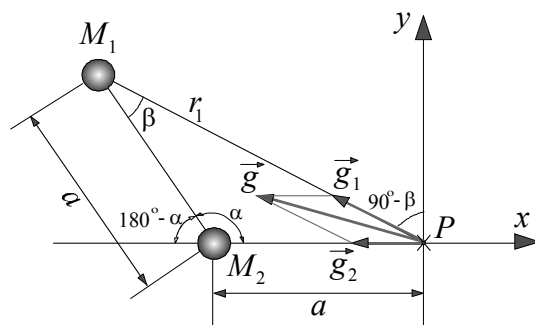


Solución.

$$1. \quad M_1 = 300 \text{ kg}, \quad M_2 = 400 \text{ kg}, \quad a = 0.1 \text{ m}, \quad \alpha = 120^\circ, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2.$$

En el punto P el campo gravitacional está dado por: $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$.

Respecto del S.R. mostrado, tenemos:



$$\vec{g}_1 = (-g_1 \text{sen}(90^\circ - \beta), \quad g_1 \cos(90^\circ - \beta)),$$

donde ,

$$\begin{aligned} g_1 &= G \frac{M_1}{r_1^2} = G \frac{M_1}{(a + a \cos(180^\circ - \alpha))^2 + (a \text{sen}(180^\circ - \alpha))^2} \\ &= G \frac{M_1}{a^2 \left[(1 + \cos(180^\circ - \alpha))^2 + \text{sen}^2(180^\circ - \alpha) \right]} \\ &= (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2) \frac{300 \text{ kg}}{(0.1 \text{ m})^2 \left[(1 + \cos 60^\circ)^2 + \text{sen}^2 60^\circ \right]} \\ &\quad \boxed{g_1 = 6.67 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \end{aligned}$$

Observar que:

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2}$$

$$\boxed{\beta = 30^\circ}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= (-6.67 \times 10^{-7} \text{sen}(90^\circ - 30^\circ) \text{ m/s}^2, \quad 6.67 \times 10^{-7} \cos(90^\circ - 30^\circ) \text{ m/s}^2) \\ \vec{g}_1 &= (-6.67 \times 10^{-7} (\text{sen} 60^\circ) \text{ m/s}^2, \quad 6.67 \times 10^{-7} (\cos 60^\circ) \text{ m/s}^2) \\ &\quad \boxed{\vec{g}_1 = (-5.77 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2, \quad 3.33 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2)} \end{aligned}$$

También, se tiene que:

$$\vec{g}_2 = (-g_2, 0),$$

donde,

$$g_2 = G \frac{M_2}{a^2} = (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2) \frac{400 \text{ kg}}{(0.1 \text{ m})^2} = 2.66 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2,$$

$$\boxed{g_2 = 2.66 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

entonces:

$$\vec{g}_2 = \left(-2.66 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 0 \right)$$

Por lo tanto, el campo resultante es:

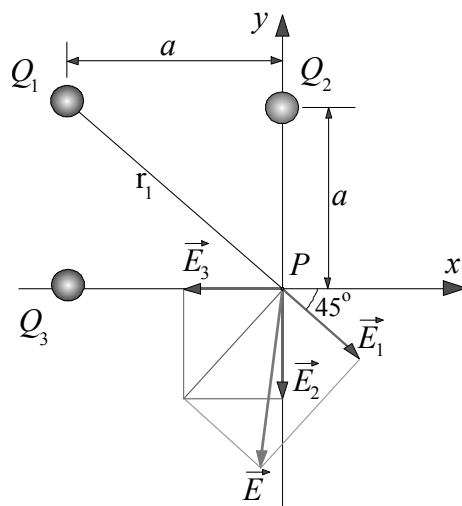
$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \left(-5.77 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 3.33 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + \left(-2.66 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 0 \right)$$

$$\boxed{\vec{g} = \left(-3.237 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 3.33 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}$$

2. $Q_1 = 2 \times 10^{-6} \text{ C}$, $Q_2 = 4 \times 10^{-6} \text{ C}$, $Q_3 = -3 \times 10^{-6} \text{ C}$, $a = 0.2 \text{ m}$, $K = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$.

En el punto P el campo eléctrico está dado por: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$.

Respecto del S.R. mostrado, se tiene:



$$\vec{E}_1 = (E_1 \cos 45^\circ, -E_1 \sin 45^\circ),$$

donde ,

$$E_1 = K \frac{Q_1}{r_1^2} = K \frac{Q_1}{a^2 + a^2} = K \frac{Q_1}{2a^2},$$

$$\boxed{E_1 = \frac{1}{2} \frac{KQ_1}{a^2}}$$

$$E_1 = \left(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2\right) \frac{2 \times 10^{-6} \text{ C}}{2(0.2 \text{ m})^2}$$

$$E_1 = 2.25 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

entonces:

$$\vec{E}_1 = \left(\left(2.25 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \cos 45^\circ, - \left(2.25 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \sin 45^\circ \right)$$

es decir:

$$\boxed{\vec{E}_1 = \left(1.59 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, -1.59 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)}$$

También

$$\vec{E}_2 = (0, -E_2),$$

donde,

$$E_2 = K \frac{Q_2}{a^2} = \left(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2\right) \frac{4 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.2 \text{ m})^2},$$

$$E_2 = 9 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

entonces:

$$\boxed{\vec{E}_2 = \left(0, -9 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)}$$

$$\vec{E}_3 = (-E_3, 0)$$

donde,

$$E_3 = K \frac{|Q_3|}{a^2} = \left(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2\right) \frac{3 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.2 \text{ m})^2} = 6.75 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}},$$

$$E_3 = 6.75 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\vec{E}_3 = \left(-6.75 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, 0 \right)$$

Por lo tanto:

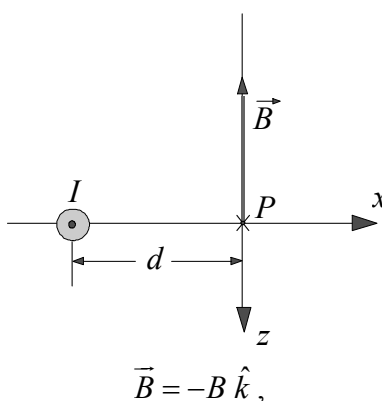
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$\vec{E} = \left(1.59 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, -1.59 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) + \left(0, -9 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) + \left(-6.75 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, 0 \right)$$

$$\vec{E} = \left(-5.16 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, -10.59 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$$

3. $I=20 \text{ A}$, $d=2 \text{ m}$, $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $v=2 \times 10^6 \text{ m/s}$, $\mu_0=4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}$.

Respecto del S.R. mostrado, tenemos que el campo magnético en el punto P está dado por:



donde:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi d} = \left(4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m} \right) \frac{20 \text{ A}}{2\pi (2 \text{ m})} = 2 \times 10^{-6} \text{ T}$$

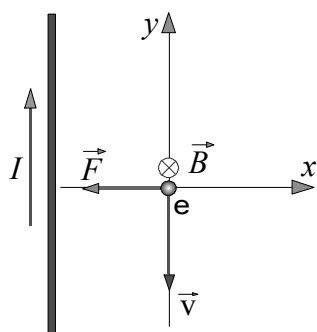
entonces:

$$\vec{B} = -2 \times 10^{-6} \text{ T } \hat{k}$$

Por lo tanto la fuerza que actúa sobre e está dada por:

$$\vec{F} = e \vec{v} \times \vec{B}$$

En el S.R. mostrado, los ejes coordenados x , y , están indicados y el eje z es perpendicular saliente al plano de la figura, por lo que el campo magnético está dirigido a lo largo del eje z pero en dirección entrante al plano de la figura, entonces tenemos:



$$\vec{F} = -(|e| v B) \hat{i}$$

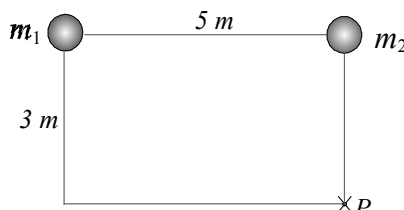
$$\vec{F} = -\left((1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) \left(2 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (2 \times 10^{-6} \text{ T}) \right) \hat{i}$$

$$\boxed{\vec{F} = -(6.4 \times 10^{-19} \text{ N}) \hat{i}}$$

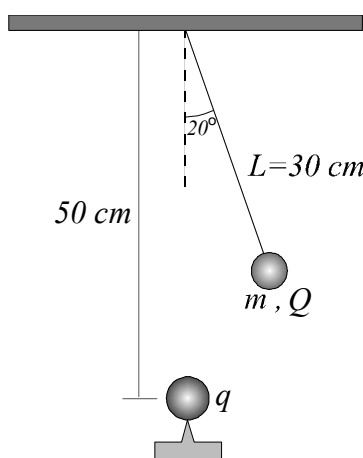
es decir, la fuerza experimentada por el electrón está dirigida hacia las x negativas.

Versión 3.

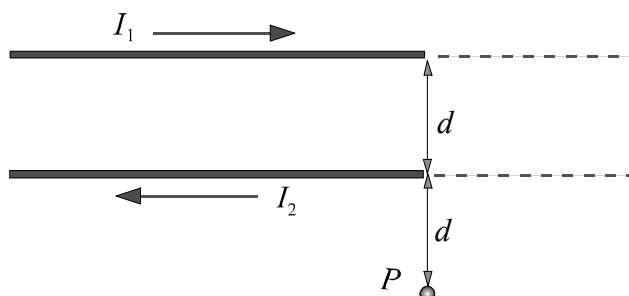
1. a) Encontrar el campo, (magnitud y dirección), resultante producido por las masas m_1 y m_2 en el punto P.
 b) Si colocamos una tercera masa $m=80$ kg en el punto P, calcular la fuerza gravitacional que sentiría, (magnitud y dirección).
 $m_1 = 100$ kg, $m_2 = 200$ kg, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$.



2. Un objeto de masa m y carga Q se cuelga de un hilo de longitud L . Si está en equilibrio en la posición mostrada, encontrar el valor de la masa m .
 $Q=1 \times 10^{-7} \text{ C}$, $q=1 \times 10^{-6} \text{ C}$, $K=9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$



3. a) Dos cables largos y paralelos transportan las corrientes indicadas. Calcular el campo magnético total en el punto P.
 b) Encontrar la posición de un punto R en el cual el campo magnético total sea de magnitud cero.
 $I_1=30 \text{ A}$, $I_2=20 \text{ A}$, $d=3 \text{ m}$, $\mu_0=4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}$.

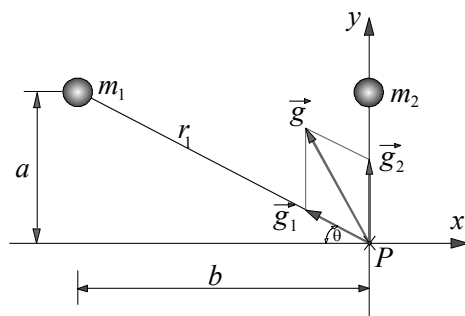


Solución.

1. $m_1 = 100 \text{ kg}$, $m_2 = 200 \text{ kg}$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 5 \text{ m}$, $m = 80 \text{ kg}$, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$.

En el punto P el campo gravitacional está dado por: $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$.

Respecto del S.R. mostrado, tenemos:



$$\vec{g}_1 = (-g_1 \cos \theta, g_1 \sin \theta),$$

donde ,

$$g_1 = G \frac{m_1}{r_1^2} = G \frac{m_1}{a^2 + b^2}$$

$$g_1 = (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2) \frac{100 \text{ kg}}{(3 \text{ m})^2 + (5 \text{ m})^2}$$

$$g_1 = 1.96 \times 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

y

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{a}{b}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{3 \text{ m}}{5 \text{ m}}\right) = 30.96^\circ$$

entonces:

$$\vec{g}_1 = \left(-\left(1.96 \times 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cos 30.96^\circ, \left(1.96 \times 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \sin 30.96^\circ \right)$$

$$\vec{g}_1 = \left(-1.68 \times 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 1.008 \times 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

También, se tiene que:

$$\vec{g}_2 = (0, g_2),$$

donde,

$$g_2 = G \frac{m_2}{a^2} = (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2) \frac{200 \text{ kg}}{(3 \text{ m})^2},$$

$$g_2 = 1.48 \times 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

entonces:

$$\vec{g}_2 = \left(0, \quad 1.48 \times 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

Por lo tanto, el campo resultante es:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \left(-1.68 \times 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad 1.008 \times 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + \left(0, \quad 1.48 \times 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\vec{g} = \left(-1.68 \times 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad 1.5808 \times 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right).$$

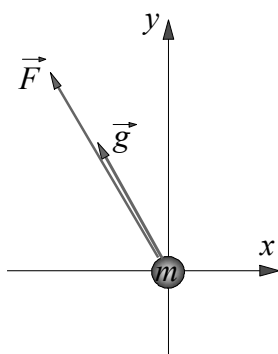
Ahora la fuerza gravitacional que actúa sobre m en el punto P, está dada por:

$$\vec{F} = m \vec{g}$$

Respecto al S.R. mostrado tenemos:

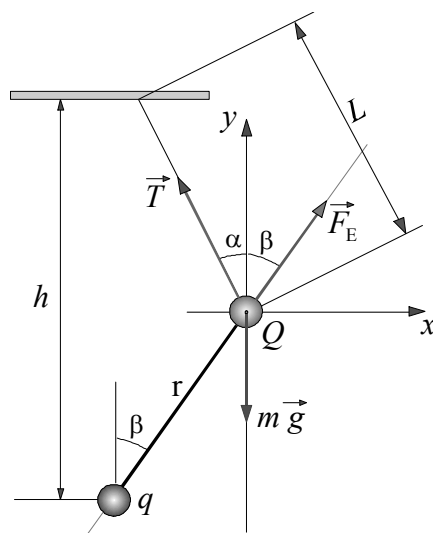
$$\vec{F} = m \vec{g} = (80 \text{ kg}) \left(-1.68 \times 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad 1.5808 \times 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\vec{F} = \left(-1.344 \times 10^{-8} \text{ N}, \quad 1.26 \times 10^{-7} \text{ N} \right)$$



2. $Q=1\times 10^{-7}\text{ C}$, $q=1\times 10^{-6}\text{ C}$, $K=9\times 10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2$, $h=0.5\text{ m}$, $L=0.3\text{ m}$, $\alpha=20^\circ$.

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de Q, tenemos:



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} F_E \sin \beta - T \sin \alpha &= 0 \\ F_E \cos \beta + T \cos \alpha - mg &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

donde:

$$F_E = K \frac{qQ}{r^2} = K \frac{qQ}{(L \sin \alpha)^2 + (h - L \cos \alpha)^2}$$

$$F_E = (9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \frac{(1 \times 10^{-6} \text{ C})(1 \times 10^{-7} \text{ C})}{((0.3 \text{ m}) \sin 20^\circ)^2 + (0.5 \text{ m} - (0.3 \text{ m}) \cos 20^\circ)^2}$$

$$\boxed{F_E = 1.54 \times 10^{-2} \text{ N}}$$

$$\beta = \text{Arctan} \left(\frac{L \sin \alpha}{h - L \cos \alpha} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{(0.3 \text{ m}) \sin 20^\circ}{(0.5 \text{ m}) - (0.3 \text{ m}) \cos 20^\circ} \right)$$

$$\beta = \text{Arctan} \left(\frac{0.102}{0.218} \right) = \text{Arctan}(0.467) \Rightarrow \boxed{\beta = 25.19^\circ}$$

De la ec. (1), se tiene:

$$T = F_E \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = (1.54 \times 10^{-2} \text{ N}) \left(\frac{\sin 25.19^\circ}{\sin 20^\circ} \right)$$

$$\boxed{T = 1.91 \times 10^{-2} \text{ N}}$$

De la ec. (2) se tiene:

$$m = \frac{1}{g} (F_E \cos \beta + T \cos \alpha) = \frac{1}{(9.8 \text{ m/s}^2)} \left((1.54 \times 10^{-2} \text{ N}) \cos 25.19^\circ + (1.91 \times 10^{-2} \text{ N}) \cos 20^\circ \right)$$

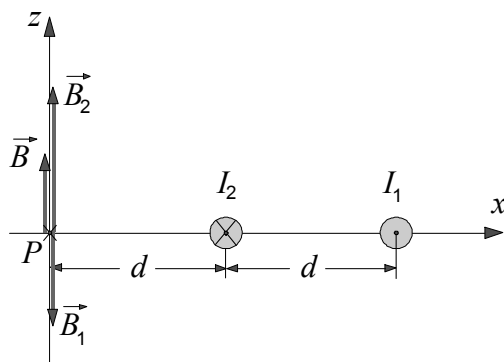
$$\boxed{m = 3.25 \times 10^{-3} \text{ kg}}$$

3. $I_1 = 30 \text{ A}$, $I_2 = 20 \text{ A}$, $d = 3 \text{ m}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}$.

a) El campo magnético en el punto P está dado por:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Respecto del S.R. mostrado, tenemos:



$$\vec{B} = -B_1 \hat{k} + B_2 \hat{k} = (-B_1 + B_2) \hat{k},$$

donde:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi(2d)} = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}) \frac{30 \text{ A}}{2\pi(2(3 \text{ m}))}$$

$$B_1 = 1 \times 10^{-6} \text{ T}$$

entonces:

$$\boxed{\vec{B}_1 = -B_1 \hat{k} = -(1 \times 10^{-6} \text{ T}) \hat{k}}$$

y

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d} = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}) \frac{20 \text{ A}}{2\pi(3 \text{ m})}$$

$$B_2 = 1.33 \times 10^{-6} \text{ T}$$

entonces:

$$\vec{B}_2 = B_2 \hat{k} = (1.33 \times 10^{-6} \text{ T}) \hat{k}$$

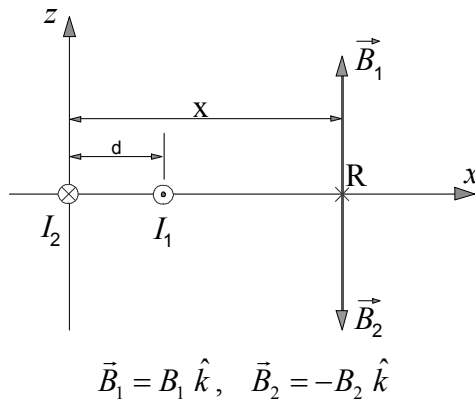
Por lo tanto:

$$\vec{B} = -B_1 \hat{k} + B_2 \hat{k} = (-1 \times 10^{-6} \text{ T} + 1.33 \times 10^{-6} \text{ T}) \hat{k} = (3.3 \times 10^{-7} \text{ T}) \hat{k}$$

$$\vec{B} = (3.3 \times 10^{-7} \text{ T}) \hat{k}$$

b) se quiere x tal que: $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0}$.

Respecto del S.R. mostrado:



entonces,

$$\vec{B} = B_1 \hat{k} - B_2 \hat{k} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2$$

donde

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi(x-d)}, \quad B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi x}.$$

Como $B_1 = B_2$, entonces se tiene:

$$\mu_0 \frac{I_1}{2\pi(x-d)} = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi x},$$

por lo tanto:

$$\frac{I_1}{(x-d)} = \frac{I_2}{x} \quad \Rightarrow \quad x I_1 = (x-d) I_2$$

$$x I_2 - x I_1 = I_2 d \quad \Rightarrow \quad x = \frac{I_2}{I_2 - I_1} d$$

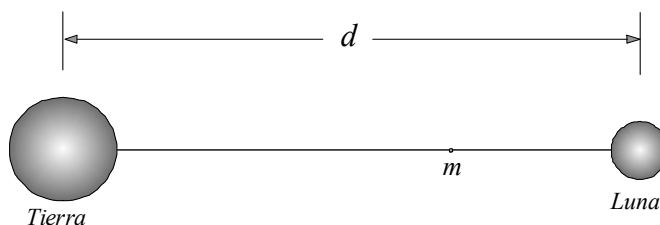
$$x = \frac{20 \text{ A}}{20 \text{ A} - 30 \text{ A}} (3 \text{ m}) \quad \boxed{x = -6 \text{ m}}.$$

El signo negativo, en este resultado, significa que la distancia está hacia la izquierda del S.R. mostrado en la figura.

Versión 4.

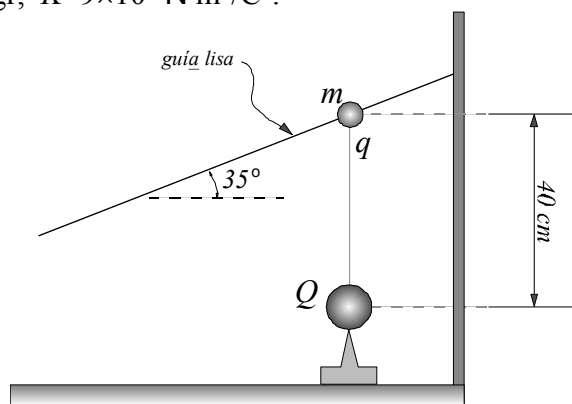
1. A que distancia de la tierra debe estar un cuerpo de masa m , para que la fuerza gravitacional sobre él sea cero? Considere que sobre él actúan solamente la tierra y la luna.

$$M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}, M_L = 7.36 \times 10^{22} \text{ kg}, d = 3.85 \times 10^8 \text{ m}, G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2.$$



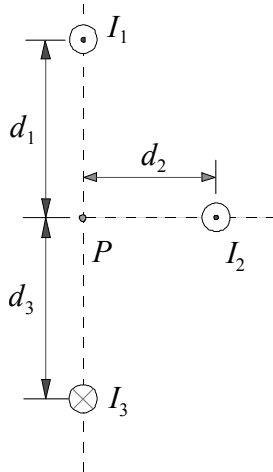
2. Un collarín de masa m y carga q , se encuentra en equilibrio en la posición indicada. Si la guía es lisa, y la carga Q está fija, encontrar el valor de esta última.

$$q = 2 \times 10^{-5} \text{ C}, m = 30 \text{ gr}, K = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2.$$



3. Tres conductores perpendiculares al plano de la página transportan las corrientes indicadas. Determinar el campo magnético total en el punto P (magnitud y dirección).

$$I_1 = 10 \text{ A}, I_2 = 20 \text{ A}, I_3 = 30 \text{ A}, d_1 = d_3 = 4 \text{ cm}, d_2 = 3 \text{ cm}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}.$$



Solución.

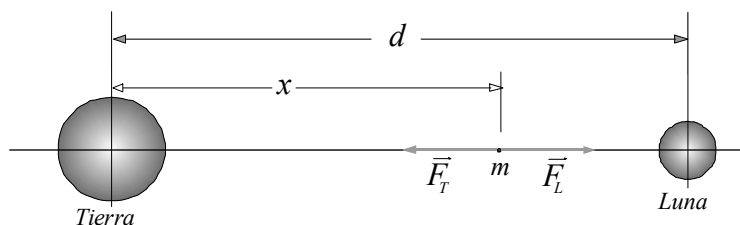
$$1. \quad M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad M_L = 7.36 \times 10^{22} \text{ kg}, \quad d = 3.85 \times 10^8 \text{ m}, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2.$$

El punto donde se debe colocar m , debe ser un punto sobre el segmento de recta definido por los centros de la tierra y la luna, a una distancia x del centro de la tierra, tal que:

$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_L = \vec{0},$$

es decir:

$$F_T = F_L,$$



donde

$$F_T = G \frac{m M_T}{x^2}, \quad F_L = G \frac{m M_L}{(d-x)^2}.$$

Entonces x debe ser tal que:

$$G \frac{m M_T}{x^2} = G \frac{m M_L}{(d-x)^2} \Rightarrow \frac{M_L}{(d-x)^2} = \frac{M_T}{x^2} \Rightarrow$$

$$x^2 \left(\frac{M_L}{M_T} \right) = (d-x)^2 \Rightarrow (d-x) = x \sqrt{\left(\frac{M_L}{M_T} \right)} \Rightarrow$$

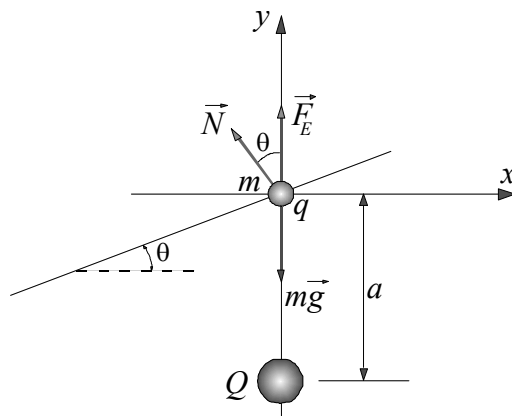
$$d = x \left(\sqrt{\left(\frac{M_L}{M_T} \right)} + 1 \right) \Rightarrow x = \frac{d}{\left(\sqrt{\left(\frac{M_L}{M_T} \right)} + 1 \right)} \Rightarrow$$

$$x = \frac{3.85 \times 10^8 \text{ m}}{\left(\sqrt{\left(\frac{7.36 \times 10^{22} \text{ kg}}{5.98 \times 10^{24} \text{ kg}} \right)} + 1 \right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 3.464 \times 10^8 \text{ m}}$$

2. $m=0.03 \text{ kg}$, $q=2\times 10^{-5} \text{ C}$, $a=0.4\text{m}$, $\theta=35^\circ$, $K=9\times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$.

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de m se tiene:



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} N \sin \theta &= 0 & (1) \\ F_E + N \cos \theta - mg &= 0 & (2) \end{aligned}$$

De la ec. (1) se tiene:

$$\boxed{N = 0}$$

De la ec. (2) se tiene:

$$\boxed{F_E = mg},$$

$$F_E = (0.03 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)$$

$$\boxed{F_E = 0.294 \text{ N}}$$

De la ley de Coulomb, tenemos:

$$F_E = K \frac{qQ}{a^2} \Rightarrow Q = \frac{F_E a^2}{K q}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{(0.294 \text{ N})(0.4 \text{ m})}{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2)(2 \times 10^{-5} \text{ C})}$$

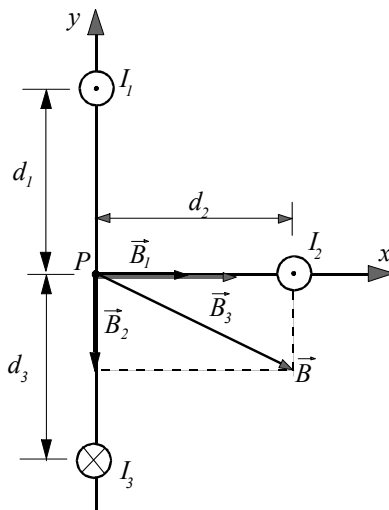
$$\boxed{Q = 2.613 \times 10^{-7} \text{ C}}$$

3. $I_1=10$ A, $I_2=20$ A, $I_3=30$ A, $d_1=d_3=0.04$ m, $d_2=0.03$ m, $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}$ Wb/A m.

En el punto P el campo magnético está dado por:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

Respecto del S.R. mostrado, tenemos:



$$\vec{B}_1 = (B_1, 0), \quad \vec{B}_2 = (0, -B_2), \quad \vec{B}_3 = (B_3, 0).$$

Donde:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d_1}, \quad B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d_2}, \quad B_3 = \mu_0 \frac{I_3}{2\pi d_3}.$$

$$B_1 = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}) \frac{10 \text{ A}}{2\pi (0.04 \text{ m})} = 5 \times 10^{-5} \text{ T},$$

$$B_2 = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}) \frac{20 \text{ A}}{2\pi (0.03 \text{ m})} = 1.33 \times 10^{-4} \text{ T},$$

$$B_3 = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}) \frac{30 \text{ A}}{2\pi (0.04 \text{ m})} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ T},$$

entonces:

$$\vec{B}_1 = (5 \times 10^{-5} \text{ T}, 0),$$

$$\vec{B}_2 = (0, -1.33 \times 10^{-4} \text{ T}),$$

$$\vec{B}_3 = (1.5 \times 10^{-4} \text{ T}, 0).$$

Por lo tanto el campo total es:

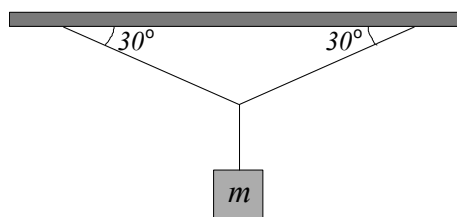
$$\vec{B} = (5 \times 10^{-5} \text{ T}, 0) + (0, -1.33 \times 10^{-4} \text{ T}) + (1.5 \times 10^{-4} \text{ T}, 0)$$

$$\boxed{\vec{B} = (2 \times 10^{-4} \text{ T}, -1.33 \times 10^{-4} \text{ T})}$$

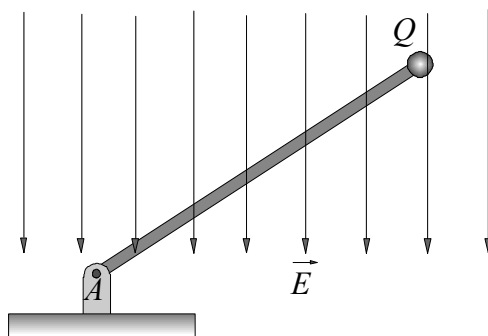
Versión 5.

1. En la superficie de un planeta de radio $R_p = 1 \times 10^4 \text{ km}$ dos hilos de igual longitud mantienen en equilibrio a una masa m de 100 kg, y cada uno de ellos soporta una tensión T de 100 N. Determine la masa M_p del planeta.

$$m = 100 \text{ kg}, R_p = 1 \times 10^4 \text{ km}, T = 100 \text{ N}, G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2.$$

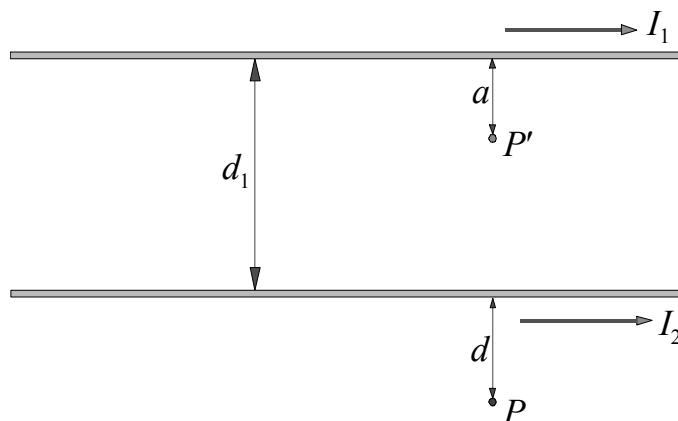


2. Una varilla uniforme de longitud L , tiene en su extremo incrustada una carga eléctrica Q , la cual se encuentra en un campo eléctrico uniforme de magnitud E , como se muestra en la figura. Si la varilla se encuentra en equilibrio, determine su peso y la reacción en el apoyo articulado A. $L = 10 \text{ m}$, $Q = -1 \times 10^{-8} \text{ C}$, $E = 1 \times 10^9 \text{ N/C}$, $K = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$.



3. Dos conductores rectos y paralelos transportan las corrientes indicadas en la figura.
- Determinar el campo magnético total $\vec{B}$ en el punto P (magnitud y dirección),
 - Determinar la distancia "a" sabiendo que el campo magnético en el punto P' es igual a cero.

$$I_1 = 4 \text{ A}, I_2 = 12 \text{ A}, d = 0.5 \text{ m}, d_1 = 1 \text{ m}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}.$$

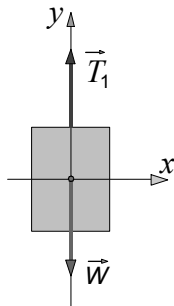


Solución.

$$1. \quad T = 100\text{ N}, m = 100\text{ kg}, R_p = 1 \times 10^7\text{ m}, \theta = 30^\circ, G = 6.67 \times 10^{-11}\text{ N m}^2 / \text{kg}^2.$$

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio, se tiene:

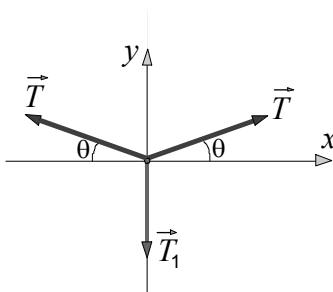
Para m:



D.C.L. Bloque

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad T_1 - W = 0 \quad (1)$$

Para el nudo:



D.C.L. Nudo

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} T \cos \theta - T \cos \theta &= 0 \\ T \sin \theta + T \sin \theta - T_1 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix}$$

De la ec. (3), se tiene:

$$T_1 = 2T \sin \theta = 2(100\text{ N}) \sin 30^\circ$$

$$\boxed{T_1 = 100\text{ N}}$$

De la ec. (1), se tiene:

$$T_1 = W$$

$$\boxed{W = 100\text{ N}}$$

Por la Ley de la Gravitación Universal se debe cumplir que:

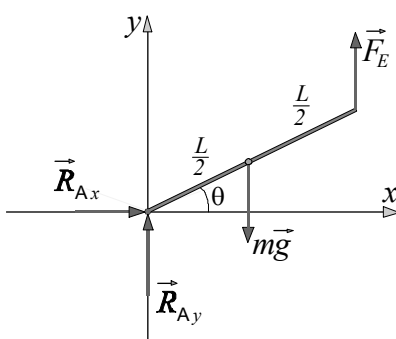
$$W = G \frac{m M_p}{R_p^2} \quad \Rightarrow \quad M_p = \frac{W R_p^2}{m G}$$

$$M_p = \frac{(100 \text{ N})(1 \times 10^7 \text{ m})^2}{(100 \text{ kg})(6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2)},$$

$$M_p = 1.499 \times 10^{24} \text{ kg}$$

2. $L = 10 \text{ m}$, $Q = -1 \times 10^{-8} \text{ C}$, $E = 1 \times 10^9 \text{ N/C}$.

Respecto del S.R. mostrado, para el equilibrio de la varilla, tenemos:



D.C.L. para la varilla

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} R_{Ax} &= 0 \\ R_{Ay} - mg + F_E &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Con respecto al punto A, se tiene:

$$\sum \vec{\tau}_A = \vec{0} \Rightarrow -\frac{1}{2}mgL\cos\theta + F_EL\cos\theta = 0 \quad (3)$$

Además la fuerza eléctrica que actúa sobre Q está dada por:

$$F_E = |Q|E = (1 \times 10^{-8} \text{ C})(1 \times 10^9 \text{ N/C})$$

$$F_E = 10 \text{ N}$$

De la ec. (3), tenemos:

$$-\frac{1}{2}mg + F_E = 0 \Rightarrow mg = 2F_E$$

$$mg = 2(10 \text{ N}) = 20 \text{ N} \Rightarrow mg = 20 \text{ N}$$

De la ec. (1), se tiene:

$$R_{Ax} = 0$$

De la ec. (2), se tiene:

$$R_{Ay} = mg - F_E$$

$$R_{Ay} = 20\text{N} - 10\text{N} = 10\text{N}$$

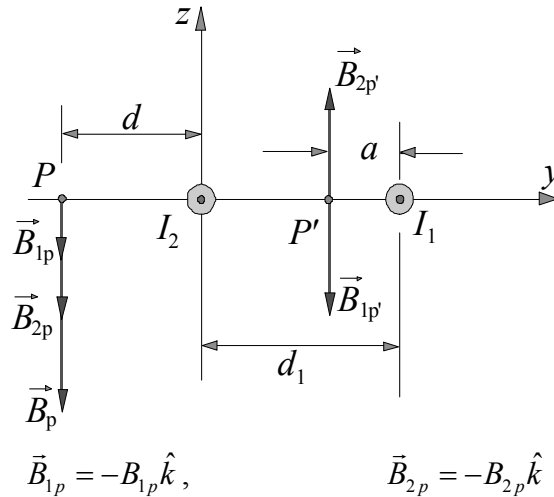
$$\boxed{R_{Ay} = 10\text{N}}$$

3. $I_1 = 4\text{ A}$, $I_2 = 12\text{ A}$, $d = 0.5\text{ m}$, $d_1 = 1\text{ m}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ Wb/A m}$.

a) El campo magnético en el punto P es:

$$\vec{B}_P = \vec{B}_{1P} + \vec{B}_{2P}$$

Respecto del S.R. mostrado (vista frontal a las corrientes), tenemos:



Donde

$$B_{1P} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi(d_1 + d)}, \quad B_{2P} = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi d}.$$

$$B_{1P} = (4\pi \times 10^{-7}\text{ Wb/A m}) \frac{4\text{ A}}{2\pi(1\text{ m} + 0.5\text{ m})}$$

$$B_{1P} = 5.33 \times 10^{-7}\text{ T}$$

$$B_{2P} = (4\pi \times 10^{-7}\text{ Wb/A m}) \frac{12\text{ A}}{2\pi(0.5\text{ m})}$$

$$B_{2P} = 4.8 \times 10^{-6}\text{ T}$$

Entonces:

$$\vec{B}_{1p} = -(5.33 \times 10^{-7} \text{ T}) \hat{k}$$

$$\vec{B}_{2p} = -(4.8 \times 10^{-6} \text{ T}) \hat{k}$$

Por lo tanto

$$\vec{B}_p = \vec{B}_{1p} + \vec{B}_{2p} = -(5.33 \times 10^{-7} \text{ T}) \hat{k} - (4.8 \times 10^{-6} \text{ T}) \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{B}_p = -(5.333 \times 10^{-6} \text{ T}) \hat{k}}$$

b) El campo magnético en el punto P', es:

$$\vec{B}_{p'} = \vec{B}_{1p'} + \vec{B}_{2p'} = \vec{0}$$

Respecto del S.R. mostrado, se tiene:

$$\vec{B}_{1p'} = -B_{1p'} \hat{k}, \quad \vec{B}_{2p'} = B_{2p'} \hat{k}.$$

Se quiere que:

$$-B_{1p'} \hat{k} + B_{2p'} \hat{k} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad B_{1p'} = B_{2p'}$$

donde:

$$B_{1p'} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a}, \quad B_{2p'} = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi (d_1 - a)}$$

Es decir:

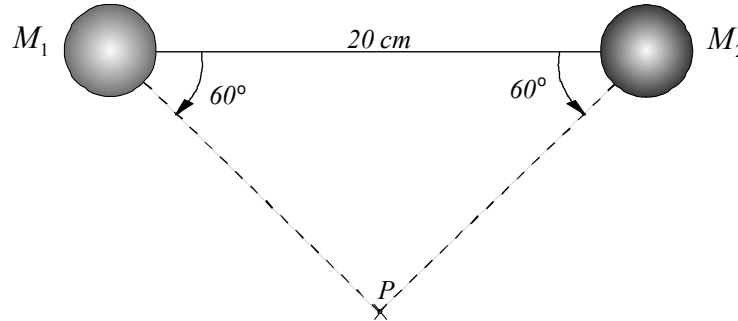
$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a} &= \mu_0 \frac{I_2}{2\pi (d_1 - a)} & \Rightarrow & \quad \frac{I_1}{a} = \frac{I_2}{(d_1 - a)} \\ I_1 (d_1 - a) &= a I_2 & \Rightarrow & \quad d_1 I_1 = a I_2 + a I_1 = a (I_1 + I_2) \\ a &= d_1 \frac{I_1}{(I_1 + I_2)} & \Rightarrow & \quad a = (1 \text{ m}) \frac{4 \text{ A}}{(4 \text{ A} + 12 \text{ A})} \end{aligned}$$

$$\boxed{a = 0.25 \text{ m}}$$

Versión 6.

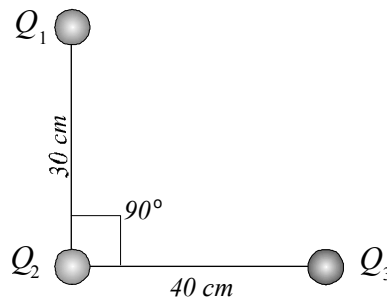
1. Las partículas de masas M_1 y M_2 están fijas. Calcular el campo gravitacional que éstas producen en el punto P .

$$M_1 = 300 \text{ kg} \quad M_2 = 400 \text{ kg}, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2.$$



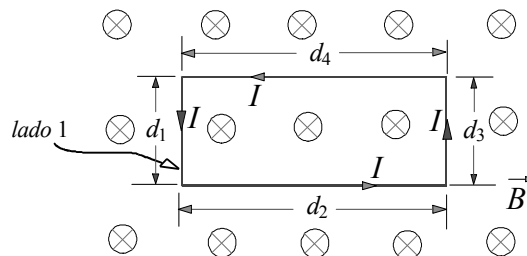
2. Las cargas eléctricas Q_1 , Q_2 y Q_3 son puntuales y están fijas. Determinar la fuerza electrostática que se ejerce sobre Q_2 .

$$Q_1 = 2 \times 10^{-6} \text{ C}, \quad Q_2 = -1 \times 10^{-7} \text{ C}, \quad Q_3 = 3 \times 10^{-6} \text{ C}, \quad K = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$$



3. La espira rectangular que porta la corriente I está inmersa en una región del espacio donde hay un campo magnético constante $\vec{B}$. El plano de la espira que coincide con la hoja de papel es perpendicular al campo magnético. El campo magnético se incrusta perpendicularmente a la hoja de papel. Encontrar la fuerza que ejerce el campo magnético sobre el lado 1 de la espira.

$$I = 25 \text{ A}, \quad B = 3 \text{ Wb/m}^2, \quad d_1 = d_3 = 2 \text{ m}, \quad d_2 = d_4 = 5 \text{ m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}.$$

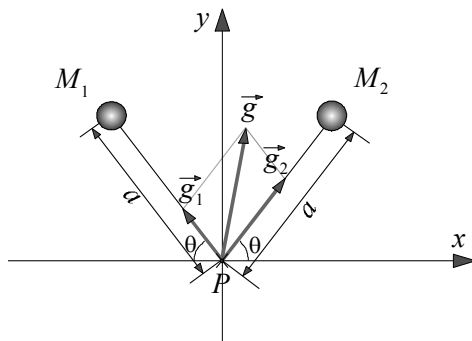


Solución.

1. $M_1 = 300 \text{ kg}$, $M_2 = 400 \text{ kg}$, $a = 0.2 \text{ m}$, $\theta = 60^\circ$, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$.

El campo gravitacional en el punto P , está dado por: $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$.

Respecto del S.R. mostrado, tenemos:



$$\vec{g}_1 = (-g_1 \cos \theta, g_1 \sin \theta),$$

donde,

$$g_1 = G \frac{M_1}{a^2} = (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2) \frac{300 \text{ kg}}{(0.2 \text{ m})^2} = 5 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

entonces:

$$\vec{g}_1 = \left(-(5 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2) \cos 60^\circ, (5 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2) \sin 60^\circ \right)$$

$$\boxed{\vec{g}_1 = (-2.5 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2, 4.33 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2)}$$

También

$$\vec{g}_2 = (g_2 \cos \theta, g_2 \sin \theta),$$

donde,

$$g_2 = G \frac{M_2}{a^2} = (6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2) \frac{400 \text{ kg}}{(0.2 \text{ m})^2} = 6.67 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

entonces:

$$\vec{g}_2 = \left((6.67 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2) \cos 60^\circ, (6.67 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2) \sin 60^\circ \right)$$

$$\boxed{\vec{g}_2 = (3.335 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2, 5.776 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2)}$$

Por lo tanto:

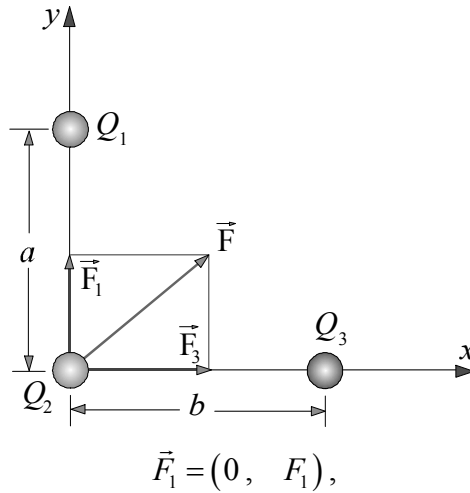
$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \left(-2.5 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 4.33 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + \left(3.335 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 5.776 \times 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\boxed{\vec{g} = \left(8.35 \times 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, 1.01 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}$$

2. $Q_1=2\times 10^{-6}\text{ C}$, $Q_2=-1\times 10^{-7}\text{ C}$, $Q_3=3\times 10^{-6}\text{ C}$, $a=0.3\text{ m}$, $b=0.4\text{ m}$, $K=9\times 10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2$.

La fuerza que actúa sobre Q_2 es: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Respecto del S.R. mostrado



Por la Ley de Coulomb, tenemos:

$$F_1 = K \frac{Q_1 |Q_2|}{a^2},$$

donde,

$$F_1 = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2 \frac{(2 \times 10^{-6} \text{ C})(1 \times 10^{-7} \text{ C})}{(0.3 \text{ m})^2},$$

$$F_1 = 0.02 \text{ N}$$

$$\boxed{\vec{F}_1 = (0, 0.02 \text{ N})}$$

También,

$$\vec{F}_3 = (F_3, 0)$$

$$F_3 = K \frac{Q_3 |Q_2|}{b^2},$$

donde,

$$F_3 = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2 \frac{(3 \times 10^{-6} \text{ C})(1 \times 10^{-7} \text{ C})}{(0.4 \text{ m})^2},$$

$$F_3 = 0.0168 \text{ N}$$

$$\boxed{\vec{F}_3 = (0.0168 \text{ N}, 0)}$$

Por lo tanto

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = (0, 0.02\text{N}) + (0.0168\text{N}, 0)$$

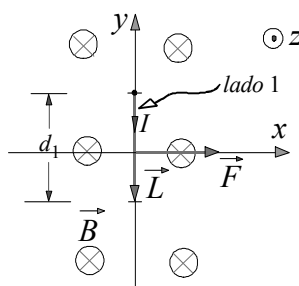
$$\boxed{\vec{F} = (0.0168\text{N}, 0.02\text{N})}$$

3. $I=25\text{ A}$, $B=3\text{ Wb/m}^2$, $d_1=d_3=2\text{ m}$, $d_2=d_4=5\text{ m}$, $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}\text{ Wb/A m}$.

La fuerza que actúa sobre el conductor I , está dada por:

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}.$$

Respecto del S.R. mostrado, tenemos que:



$$\vec{L} = -(d_1)\hat{j}, \quad \vec{B} = -(B)\hat{k},$$

por lo tanto:

$$\vec{L} \times \vec{B} = (d_1 B)(-\hat{j}) \times (-\hat{k}) = (d_1 B)\hat{i},$$

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B} = I d_1 B (-\hat{j}) \times (-\hat{k}) = (I d_1 B)\hat{i}$$

$$\boxed{\vec{F} = (I d_1 B)\hat{i}}$$

$$F = I d_1 B,$$

$$F = (25\text{ A})(2\text{ m})(3\text{ Wb/m}^2) = 150\text{N},$$

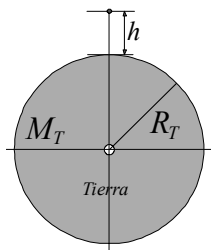
por lo tanto:

$$\boxed{\vec{F} = 150\text{N}\hat{i}}$$

Versión 7.

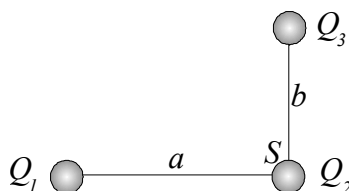
1. El peso de un cuerpo al nivel del mar es P_0 . • A qué altura sobre la superficie de la tierra, se reduce este peso a la mitad de su valor al nivel del mar?

$$M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}, R = 6.3 \times 10^6 \text{ m}, G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2.$$



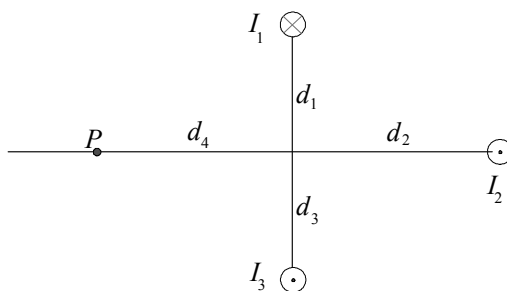
2. Tres cargas eléctricas Q_1 , Q_2 y Q_3 están fijadas en las posiciones indicadas. Calcular:
- El campo eléctrico en el punto S,
 - La fuerza electrostática sobre la carga colocada en el punto S.

$$Q_1 = 5 \times 10^{-6} \text{ C}, Q_2 = -2 Q_1, Q_3 = -3 Q_1, a = 0.4 \text{ m}, b = 0.3 \text{ m}, K = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2.$$



3. Tres conductores perpendiculares al plano llevan las corrientes indicadas. Determinar el campo magnético total $\vec{B}$ en el punto P.

$$I_1 = 10 \text{ A}, I_2 = 20 \text{ A}, I_3 = 30 \text{ A}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}, d_1 = d_3 = 0.03 \text{ m}, d_2 = d_4 = 0.04 \text{ m}.$$



Solución.

1. $M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R = 6.3 \times 10^6 \text{ m}$, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

La masa m del cuerpo es tal que:

$$P_0 = G \frac{mM_T}{R_T^2}$$

Se quiere h tal que el peso de m sea $P_0/2$.

Entonces:

$$\frac{1}{2} P_0 = G \frac{mM_T}{(R_T + h)^2}, \quad (1)$$

Sustituyendo el valor de P_0 , se tiene:

$$\frac{1}{2} P_0 = \frac{1}{2} \left(G \frac{mM_T}{R_T^2} \right), \quad (2)$$

igualando las ecs. (1) y (2), tenemos:

$$G \frac{mM_T}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{2} G \frac{mM_T}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{2R_T^2}$$

Por lo tanto:

$$(R_T + h)^2 = 2R_T^2 \quad \Rightarrow \quad R_T + h = \sqrt{2} R_T$$

$$\boxed{h = \sqrt{2} R_T - R_T = (\sqrt{2} - 1) R_T},$$

$$h = (\sqrt{2} - 1)(6.3 \times 10^6 \text{ m})$$

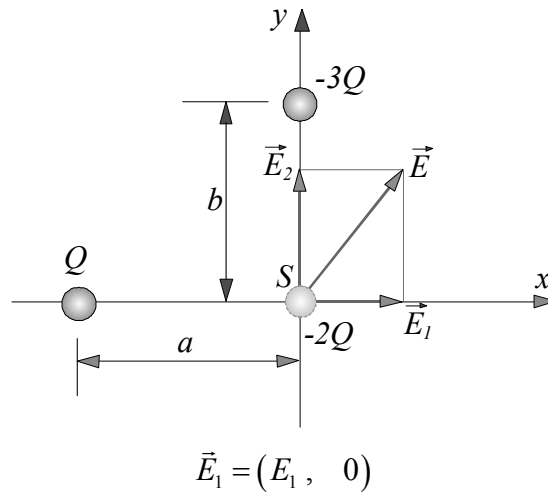
$$\boxed{h = 2.609 \times 10^6 \text{ m}}$$

2. $Q_1=Q=5\times 10^{-6}\text{ C}$, $Q_2=-2\text{ }Q$, $Q_3=-3\text{ }Q$, $a=0.4\text{ m}$, $b=0.3\text{ m}$, $K=9\times 10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2$.

El campo eléctrico en el punto S está dado por:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Respecto al S.R. mostrado y por la Ley de Coulomb, tenemos:



donde,

$$E_1 = K \frac{Q}{a^2} = (9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \frac{(5 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.4 \text{ m})^2},$$

$$E_1 = 2.812 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}},$$

entonces:

$$\boxed{\vec{E}_1 = \left(2.812 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, 0 \right)}$$

También:

$$\vec{E}_2 = (0, E_2),$$

$$E_2 = K \frac{3Q}{b^2} = (9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \frac{3(5 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.3 \text{ m})^2}$$

$$E_2 = 1.5 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

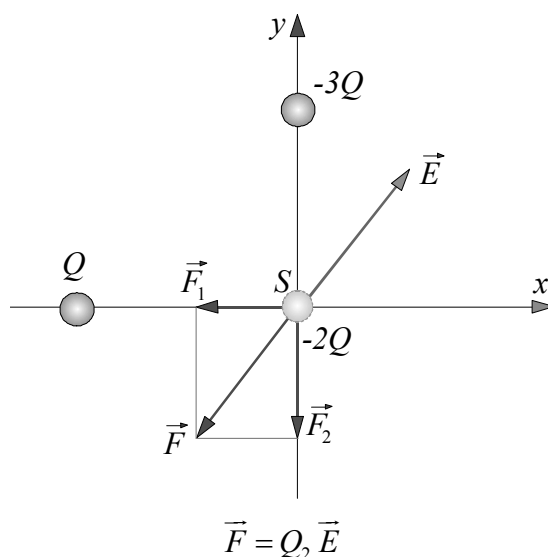
$$\vec{E}_2 = \left(0, \quad 1.5 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico total es:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(2.812 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, \quad 0 \right) + \left(0, \quad 1.5 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right),$$

$$\vec{E} = \left(2.812 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}, \quad 1.5 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right).$$

Entonces la fuerza que actúa sobre la carga Q_2 , localizada en S es:



$$\vec{F} = -2Q \vec{E} = -2(5 \times 10^{-6} \text{C}) \left[2.812 \times 10^5 \text{N/C}, \quad 1.5 \times 10^6 \text{N/C} \right]$$

$$\vec{F} = (-2.81 \text{N}, \quad -15 \text{N})$$

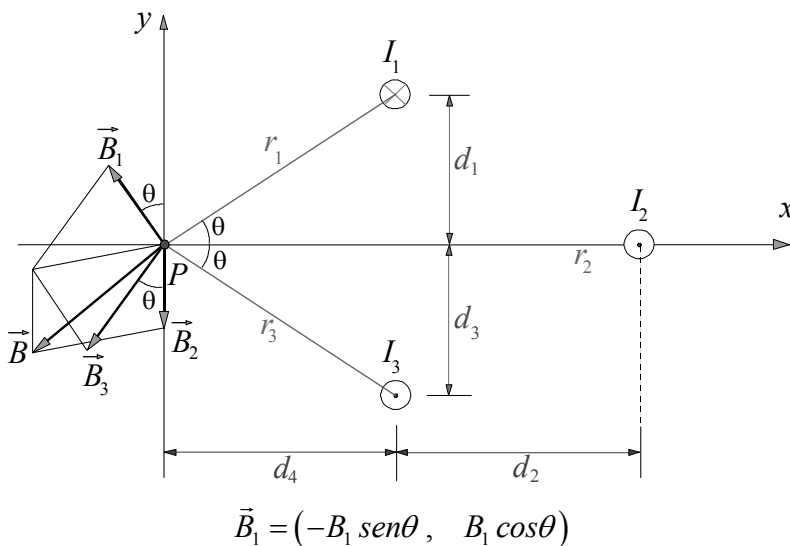
Es decir los vectores, de campo resultante y fuerza total, tienen direcciones opuestas, uno respecto al otro.

3. $I_1=10\text{A}$, $I_2=20\text{A}$, $I_3=30\text{A}$, $d_1=d_3=b=0.03\text{ m}$, $d_2=d_4=a=0.04\text{m}$, $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}\text{ Wb/A m}$.

El campo magnético en el punto P es:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

Respecto al S.R. mostrado, tenemos que:



donde:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$B_1 = 4 \times 10^{-5} \text{ T},$$

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) = \text{Arctan}(0.04),$$

$$\boxed{\theta = 36.86^\circ}$$

entonces:

$$\vec{B}_1 = (-4 \times 10^{-5} \text{ T sen}(36.86^\circ), 4 \times 10^{-5} \text{ T cos}(36.86^\circ)),$$

$$\boxed{\vec{B}_1 = (-2.399 \times 10^{-5} \text{ T}, 3.2 \times 10^{-5} \text{ T})}$$

También:

$$\vec{B}_2 = (0, -B_2),$$

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r_2} = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi (2a)}$$

$$B_2 = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}) \frac{20\text{A}}{2\pi (2 \times 0.04\text{m})}$$

$$B_2 = 5 \times 10^{-5} \text{ T},$$

$$\boxed{\vec{B}_2 = (0, -5 \times 10^{-5} \text{ T})}$$

Similarmente, tenemos:

$$\vec{B}_3 = (-B_3 \operatorname{sen} \theta, -B_3 \cos \theta)$$

donde:

$$B_3 = \mu_0 \frac{I_3}{2\pi r_3} = \mu_0 \frac{I_3}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$B_3 = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}) \frac{30 \text{ A}}{2\pi \sqrt{(0.04 \text{ m})^2 + (0.03 \text{ m})^2}},$$

$$B_3 = 1.2 \times 10^{-4} \text{ T},$$

entonces:

$$\vec{B}_3 = (-1.2 \times 10^{-4} \text{ T} \operatorname{sen}(36.86^\circ), -1.2 \times 10^{-4} \text{ T} \cos(36.86^\circ)),$$

$$\boxed{\vec{B}_3 = (-7.18 \times 10^{-5} \text{ T}, -9.601 \times 10^{-5} \text{ T})}$$

Por lo tanto:

$$\vec{B} = (-2.399 \times 10^{-5} \text{ T}, 3.2 \times 10^{-5} \text{ T}) + (0, -5 \times 10^{-5} \text{ T}) + (-7.198 \times 10^{-5} \text{ T}, -9.601 \times 10^{-5} \text{ T})$$

$$\boxed{\vec{B} = (-9.597 \times 10^{-5} \text{ T}, -11.401 \times 10^{-5} \text{ T})}$$

Versión 8.

1. Si la masa de la luna es $\frac{1}{81}$ veces la masa de la tierra, y su radio es $\frac{1}{4}$ del de la tierra, determinar:

- a) El peso de un cuerpo de 100 kg posado en la superficie lunar,
 b) Las distancias a las que debe situarse dicho cuerpo, para que la atracción de la tierra o de la luna sea de 1 Newton.

$$M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}, R_T = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2.$$

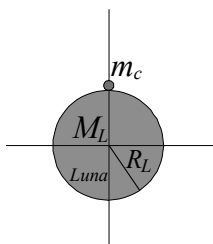


Figura 1

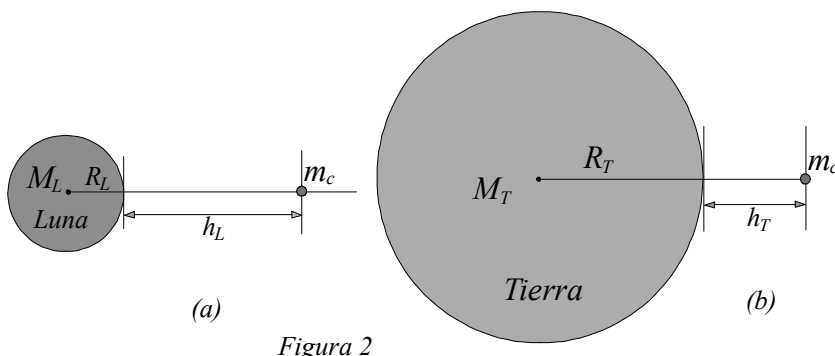
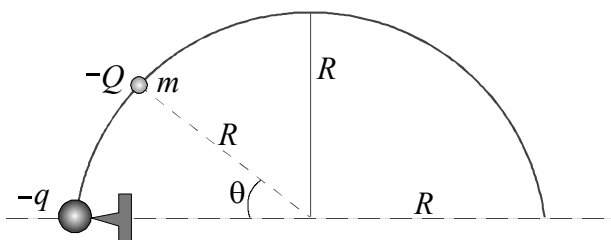
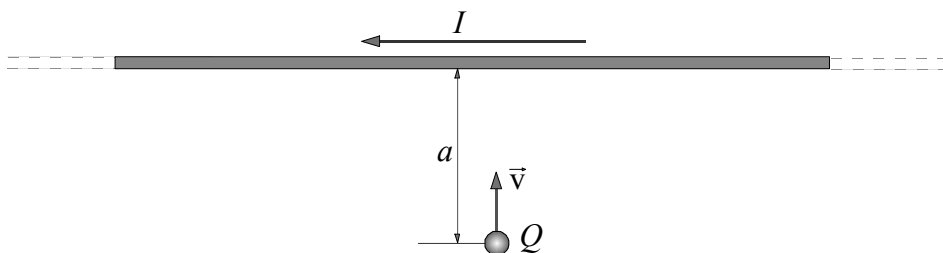


Figura 2

2. El collarín de masa m y carga eléctrica $-Q$, se encuentra en equilibrio en la posición indicada. Suponiendo que no hay fricción en la guía del collarín, determinar el valor de la carga $-Q$.
 $q = 6 \times 10^{-5} \text{ C}$, $R = 2 \text{ cm}$, $m = 0.3 \text{ kg}$, $\theta = 60^\circ$, $K = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$.



3. Determinar la fuerza “magnética” que experimenta la carga Q en las condiciones mostradas.
 $I = 2 \text{ A}$, $v = 3 \text{ m/s}$, $Q = 3 \times 10^{-6} \text{ C}$, $a = 30 \text{ cm}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}$.



Solución.

$$1. \quad M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad R_T = 6.4 \times 10^6 \text{ m}, \quad M_L = \frac{1}{81} M_T, \quad R_L = \frac{1}{4} R_T, \quad m_c = 100 \text{ kg},$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$$

a) El peso de m_c en la luna es (ver Fig. 1):

$$W_o = G \frac{m_c M_L}{R_L^2} = G \frac{m_c \left(\frac{1}{81} M_T \right)}{\left(\frac{1}{4} R_T \right)^2} = \frac{16}{81} \left(G \frac{m_c M_T}{R_T^2} \right),$$

$$W_o = \frac{16}{81} \left(6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2 \right) \frac{(100 \text{ kg})(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.4 \times 10^6 \text{ m})^2}$$

$$\boxed{W_o = 192.35 \text{ N}}$$

b) Se quiere h_L tal que, $F_L = 1 \text{ N}$; por lo cual (de la Fig. 2a) tenemos que:

$$F_L = G \frac{m_c M_L}{(R_L + h_L)^2} = G \frac{m_c \left(\frac{1}{81} M_T \right)}{\left(\frac{1}{4} R_T + h_L \right)^2},$$

$$\left(\frac{1}{4} R_T + h_L \right)^2 = \frac{G m_c M_T}{81 F_L} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} R_T + h_L = \sqrt{\frac{G m_c M_T}{81 F_L}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{h_L = \sqrt{\frac{G m_c M_T}{81 F_L}} - \frac{1}{4} R_T}$$

$$h_L = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(100 \text{ kg})}{81(1 \text{ N})}} - \frac{1}{4}(6.4 \times 10^6 \text{ m}),$$

$$\boxed{h_L = 2.059 \times 10^7 \text{ m}}$$

Se quiere h_T tal que, $F_T = 1 \text{ N}$; por lo cual (de la Fig. 2b) tenemos que:

$$F_T = G \frac{m_c M_T}{(R_T + h_T)^2} \quad \Rightarrow \quad R_T + h_T = \sqrt{\frac{G m_c M_T}{F_T}} \quad \Rightarrow$$

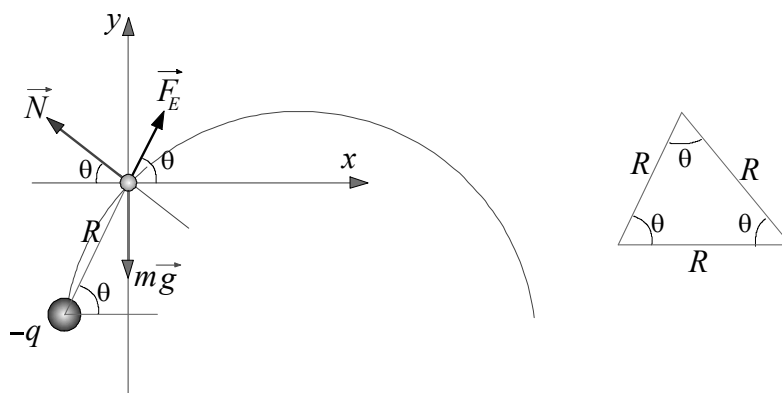
$$\boxed{h_T = \sqrt{\frac{G m_c M_T}{F_T}} - R_T},$$

$$h_T = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(100 \text{ kg})}{(1 \text{ N})}} - (6.4 \times 10^6 \text{ m}),$$

$$\boxed{h_T = 1.933 \times 10^8 \text{ m}}$$

2. $q=6\times 10^{-5}\text{ C}$, $R=0.02\text{ m}$, $m=0.3\text{ kg}$, $\theta=60^\circ$, $K=9\times 10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2$.

Respecto al S.R. mostrado, para el equilibrio de $-Q$, tenemos:



D.C.L. para $-Q$

Por la geometría de la situación, se forma un triángulo equilátero, como se muestra en la figura; por lo tanto para el equilibrio se cumple:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} F_E \cos \theta - N \cos \theta &= 0 \\ F_E \sin \theta + N \sin \theta - mg &= 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

De la ec. (1), se tiene:

$$F_E = N,$$

De la ec. (2), se encuentra:

$$2F_E \sin \theta = mg \Rightarrow F_E = \frac{mg}{2 \sin \theta}$$

$$F_E = \frac{(0.3\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{2 \sin(60^\circ)},$$

$$\boxed{F_E = 1.697\text{ N}}$$

Por otro lado, de la Ley de Coulomb, se tiene:

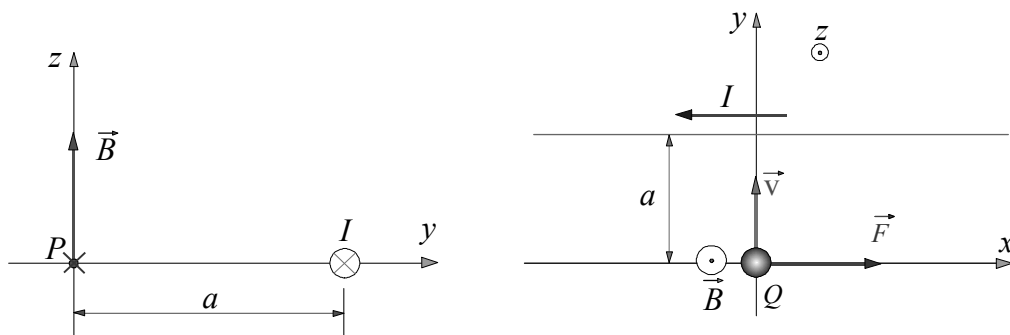
$$F_E = K \frac{|-q||-Q|}{R^2} \Rightarrow Q = \frac{F_E R^2}{K q}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{(1.697\text{ N})(0.02\text{ m})^2}{(9 \times 10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2)(6 \times 10^{-5}\text{ C})}$$

$$\boxed{Q = 1.257 \times 10^{-9}\text{ C}}$$

3. $I=2$ A, $v=3$ m/s, $Q=3\times 10^{-6}$ C, $a=0.3$ m, $\mu_0=4\pi\times 10^{-7}$ Wb/A m.

El campo magnético en el punto P es: $\vec{B} = B \hat{k}$.



Donde:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a},$$

$$B = \left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A m}} \right) \left(\frac{2\text{A}}{2\pi (0.3\text{m})} \right),$$

$$B = 1.333 \times 10^{-6} \text{ T},$$

$$\vec{B} = (1.333 \times 10^{-6} \text{ T}) \hat{k}$$

Por lo tanto, la fuerza magnética ejercida sobre Q está dada por:

$$\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B}$$

Respecto del S.R. mostrado, se tiene:

$$\vec{F} = (F, 0)$$

donde,

$$F = Q v B,$$

entonces:

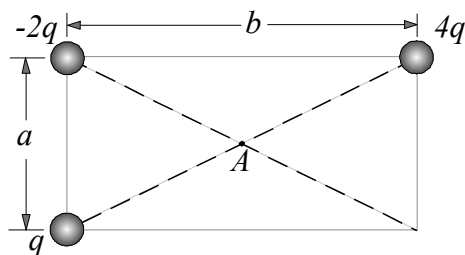
$$F = (3 \times 10^{-6} \text{ C}) (3 \text{ m/s}) (1.333 \times 10^{-6} \text{ T})$$

$$F = 1.1997 \times 10^{-11} \text{ N}$$

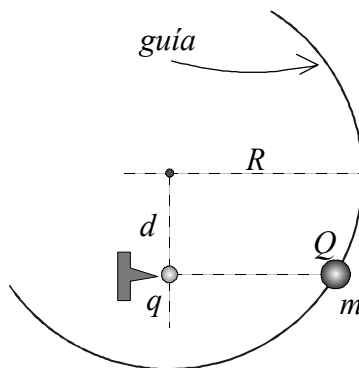
$$\vec{F} = (1.1997 \times 10^{-11} \text{ N}, 0)$$

Versión 9.

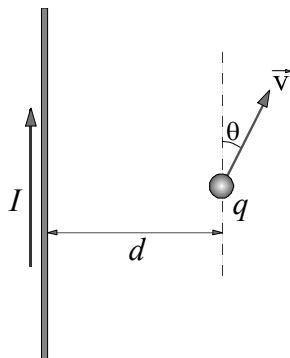
1. Considerando que el sistema de cargas está fijo, determinar:
 - a) El campo eléctrico en el punto A (magnitud y dirección).
 - b) La fuerza eléctrica que experimenta una carga adicional q' colocada en el punto A. $q = 3 \times 10^{-5} \text{ C}$, $q = 6 \times 10^{-3} \text{ C}$, $a = 20 \text{ cm}$, $b = 50 \text{ cm}$, $K = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$.



2. El collarín de masa m y carga eléctrica Q , se encuentra en equilibrio en la posición indicada. Suponiendo que no hay fricción en la guía del collarín, determinar el valor de la carga Q .
 $q = 3 \times 10^{-3} \text{ C}$, $R = 15 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$, $m = 0.1 \text{ kg}$, $K = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$.



3. Determinar la fuerza “magnética” que experimenta la carga q en las condiciones mostrada
 $I = 0.5 \text{ A}$, $v = 2 \text{ m/s}$, $q = 6 \times 10^{-5} \text{ C}$, $d = 3 \text{ cm}$, $\theta = 30^\circ$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A m}$.



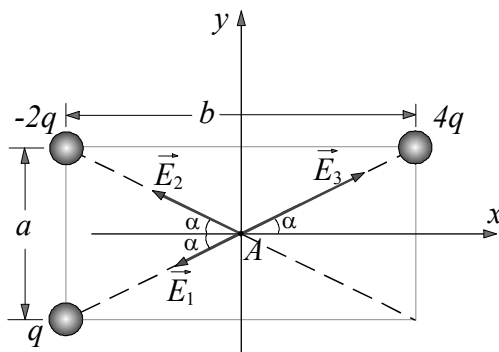
Solución.

1. $q = 3 \times 10^{-5} \text{ C}$, $q' = 6 \times 10^{-3} \text{ C}$, $a = 0.2 \text{ m}$, $b = 0.5 \text{ m}$, $K = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$

a) El campo eléctrico en el punto A, está dado por:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3,$$

Respecto del S.R. mostrado, tenemos:



$$\vec{E}_1 = (-E_1 \cos \alpha, -E_1 \sin \alpha)$$

$$\vec{E}_2 = (-E_2 \cos \alpha, E_2 \sin \alpha)$$

$$\vec{E}_3 = (E_3 \cos \alpha, E_3 \sin \alpha)$$

donde,

$$E_1 = K \frac{|4q|}{d^2} = K \frac{|4q|}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$E_1 = (9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \frac{(12 \times 10^{-5} \text{ C})}{(0.1 \text{ m})^2 + (0.25 \text{ m})^2}$$

$$E_1 = 1.48 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}},$$

de la misma forma, se tiene:

$$E_2 = K \frac{|-2q|}{d^2} = \frac{1}{2} E_1$$

$$E_2 = 7.4 \times 10^6 \text{ N/C}$$

y

$$E_3 = K \frac{|q|}{d^2} = \frac{1}{4} E_1$$

$$E_3 = 3.7 \times 10^6 \text{ N/C}.$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{a}{b} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{Arctan}(0.4) = 21.8^\circ$$

Así que:

$$\vec{E}_1 = \left(- (1.48 \times 10^7 \text{ N/C}) \cos 21.8^\circ, - (1.48 \times 10^7 \text{ N/C}) \sin 21.8^\circ \right)$$

$$\vec{E}_1 = \left(-1.37 \times 10^7 \text{ N/C}, -5.49 \times 10^6 \text{ N/C} \right)$$

$$\vec{E}_2 = \left(-6.85 \times 10^6 \text{ N/C}, 2.74 \times 10^6 \text{ N/C} \right)$$

$$\vec{E}_3 = \left(3.42 \times 10^6 \text{ N/C}, 1.37 \times 10^6 \text{ N/C} \right)$$

Por lo tanto, ya que el campo eléctrico en A es:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3,$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{E}_A = & \left(-1.37 \times 10^7 \text{ N/C}, -5.49 \times 10^6 \text{ N/C} \right) + \left(-6.85 \times 10^6 \text{ N/C}, 2.74 \times 10^6 \text{ N/C} \right) \\ & + \left(3.42 \times 10^6 \text{ N/C}, 1.37 \times 10^6 \text{ N/C} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E}_A = \left(-1.71 \times 10^7 \text{ N/C}, -1.38 \times 10^6 \text{ N/C} \right)}$$

b) La fuerza que experimenta la carga q' , que se coloca en A está dada por:

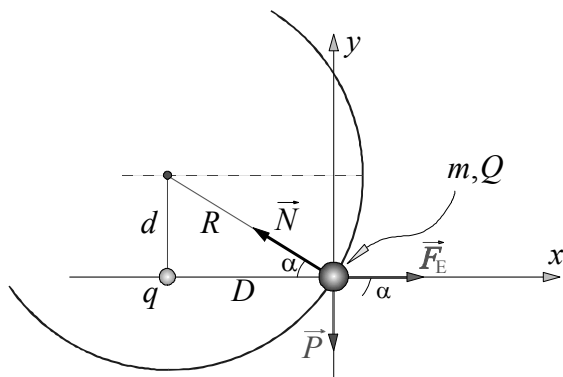
$$\vec{F} = q' \vec{E}_A$$

$$\vec{F} = \left(6 \times 10^{-3} \text{ C} \right) \left(-1.71 \times 10^7 \text{ N/C}, -1.38 \times 10^6 \text{ N/C} \right)$$

$$\boxed{\vec{F} = \left(-1.026 \times 10^5 \text{ N}, -8.28 \times 10^3 \text{ N} \right)}$$

2. $q=3\times 10^{-3}\text{ C}$, $R=0.15\text{ m}$, $d=0.1\text{ m}$, $m=0.1\text{ kg}$, $K=9\times 10^9\text{ N m}^2/\text{C}^2$.

Respecto al S.R. mostrado, para el equilibrio de m , se tiene:



$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_E - N \cos \alpha = 0 \\ N \sin \alpha - P = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

donde

$$P = mg \quad (3)$$

$$F_E = K \frac{qQ}{D^2} \quad (4)$$

además:

$$D^2 = R^2 - d^2$$

$$D^2 = (0.15\text{ m})^2 - (0.1\text{ m})^2 = 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

y

$$\alpha = \text{Arcsen}\left(\frac{d}{R}\right) = \text{Arcsen}\left(\frac{0.1\text{ m}}{0.15\text{ m}}\right) = 41.81^\circ$$

De la ec. (3), se tiene:

$$P = (0.1\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 0.98\text{ N},$$

De la ec. (2), se encuentra:

$$N = \frac{P}{\sin \alpha} \Rightarrow N = \frac{0.98\text{ N}}{\sin 41.81^\circ} = 1.47\text{ N}$$

De la ec. (1), se tiene:

$$F_E = N \cos \alpha \Rightarrow F_E = (1.47\text{ N}) \cos 41.81^\circ = 1.09\text{ N}$$

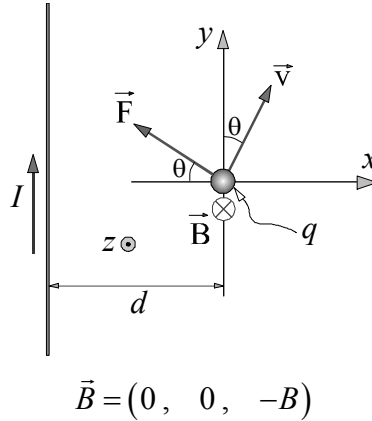
De la ec. (4), tenemos:

$$Q = \frac{F_E D^2}{Kq} = \frac{(1.09\text{ N})(1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2)}{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2)(3 \times 10^{-3} \text{ C})} \Rightarrow \boxed{Q = 5.046 \times 10^{-10} \text{ C}}$$

3. $I=0.5 \text{ A}$, $v=2 \text{ m/s}$, $q=6\times 10^{-5} \text{ C}$, $d=0.03 \text{ m}$, $\theta=30^\circ$, $\mu_0=4\pi\times 10^{-7} \text{ Wb/A m}$.

Sobre q actúa un campo magnético $\vec{B}$, producido por el conductor eléctrico como se muestra en la figura:

Respecto del S.R. mostrado, tenemos:



donde:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi d}$$

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \frac{(0.5 \text{ A})}{2\pi (0.03 \text{ m})} \Rightarrow B = 3.33 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$$\vec{B} = (0, 0, -3.33 \times 10^{-6} \text{ T})$$

La fuerza que $\vec{B}$ ejerce sobre q está dada por:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Por lo tanto:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = q (v \sin\theta, v \cos\theta, 0) \times (0, 0, -B)$$

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = (-q v B \cos\theta, q v B \sin\theta, 0)$$

$$\vec{F} = q v B (-\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\vec{F} = (6 \times 10^{-5} \text{ C})(2 \text{ m/s})(3.33 \times 10^{-6} \text{ T})(-\cos 30^\circ, \sin 30^\circ, 0)$$

$$\boxed{\vec{F} = (-3.46 \times 10^{-10} \text{ N}, 1.99 \times 10^{-10} \text{ N}, 0)}$$

BIBLIOGRAFIA

REFERENCIAS AL NIVEL DEL CURSO.

- a) FUERZA Y EQUILIBRIO
F. Medina N., J. Quintanilla M.
Ed. Div. de C.B.I. U.A.M. Azc. 2000.
- b) CAMPOS VECTORIALES Y TENSORIALES
Rodríguez S., H.S. Becerril H., N. Falcón H.
Ed. Div. de C.B.I. U.A.M. Azc. 2000.

REFERENCIAS A NIVEL MAS AVANZADO.

- a) MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS. **ESTATICA**
Beer-Johnston 6ª. Ed. 1998 Ed. Mc. Graw-Hill.
- b) MECANICA PARA INGENIEROS. ESTATICA
Russell C. Hibbeler 7ª. Ed. 1996 Ed. Prentice-Hall.
- c) MECANICA PARA INGENIERIA. ESTATICA
Bedford-Fowler 6ª. Ed. 1996 Ed. Addison-Wesley Iberoamericana U.S.A.

