# Integrales I

Dr. Arturo Cueto Hernández

January 29, 2008

**Resumen**

El propósito de este material es ayudar a los alumnos que cursan la materia de Cálculo Diferencial e Integral II a través de ejercicios con respuestas completas, autoevaluaciones consistentes en preguntas de opción multiple y de respuesta cerrada que se autocalifican.

# Contenido

# 1. Teoría Básica

Recordemos algunas definiciones básicas:

✏ Si en todos los puntos del intervalo $[a, b]$ se verifica la ecuación

$$F'(x) = f(x)$$

la función $F(x)$ se llama función primitiva de la función $f(x)$ sobre este intervalo.

✏ Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, la expresión $F(x) + c$ se llama integral indefinida de la función $f(x)$ y se denota por el símbolo $\int f(x)\,dx$.

Recordemos algunos hechos y resultados básicos:

☞ Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas de la función $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, su diferencia es una constante.

☞ La integral indefinida representa una familia de funciones

$$y = F(x) + c$$

☞ Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ tiene una función primitiva y, por tanto, integral indefinida.

☞ La derivada de una función elemental es siempre una función elemental, sin embargo la primitiva de una función elemental bien pudiera no ser expresada mediante un número finito de funciones elementales.

☞ La derivada de una integral indefinida es igual al integrando, es decir, si $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\left( \int f(x)\,dx \right)' = (F(x) + c)' = f(x)$$

☞ La diferencial de una integral indefinida es igual al elemento de integración

$$d\left( \int f(x)\,dx \right) = f(x)\,dx$$

☞ La integral indefinida de la diferencial de una función es igual a la suma de esta función y de una constante arbitraria

$$\int dF(x) = F(x) + c$$

☞ La integral indefinida de la suma algebraica de dos o un número finito de funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

☞ El factor constante se puede sacar fuera del signo de integral, es decir, si $a$ es una constante, entonces

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

☞ Si $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$ entonces

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$$

☞ Si $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$ entonces

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + c$$

☞ Si $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$ entonces

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

☞

# TABLA DE INTEGRALES

1.- $\int x^\alpha \, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$

2.- $\int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$

3.- $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$

4.- $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$

5.- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

6.- $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

7.- $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$

8.- $\int \cot x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c$

9.- $\int e^x \, dx = e^x + c$

10.- $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \; a \neq 1$

11.- $\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$

12.- $\int \dfrac{1}{a^2+x^2} \, dx = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + c$

13.- $\int \dfrac{1}{a^2-x^2} \, dx = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a+x}{a-x} \right| + c$

14.- $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + c$

15.- $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{a} + c$

16.- $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$

donde $c$ denota una constante arbitraria.

## 2. Ejercicios Completos

En esta sección daremos un conjunto de ejercicios completamente resueltos. La idea de como utilizar esta es la siguiente:

- El alumno deberá primero intentar resolver por cuenta propia el ejercicio en su cuaderno.
- Una vez realizado lo anterior, apuntando en la palabra EJERCICIO y oprimiendo el botón izquierdo del ratón podrá comparar lo que realizó con la respuesta dada.

**Nota:** el procedimiento puede no ser único.

Exercise 1. Calcule la integral $\int (2x^3 - 3\operatorname{sen} x + 5\sqrt{x}\,)\,dx$.

Exercise 2. Calcule la integral $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right)dx$.

Exercise 3. Calcule la integral $\int \frac{1}{x+3}\,dx$.

## 3. Ejercicios de Opción Multiple

En esta sección daremos un conjunto de ejercicios cuya respuesta está dada en un conjunto de posibles soluciones. La idea de como utilizar esta es la siguiente:

- El alumno deberá primero intentar resolver por cuenta propia el ejercicio en su cuaderno.
- Una vez realizado lo anterior, apuntando en la opción que el considere que es la correcta y oprimiendo el botón izquierdo del ratón su respuesta será automáticamente calificada como Incorrecta o Correcta.
- Cuando el alumno de con la respuesta correcta, en la ventana que aparece con la palabra Correcta al apuntar sobre el Ok y oprimiendo el botón izquierdo del ratón será llevado a una página donde se da el procedimiento de la solución.

Quiz

**1.** La integral $\displaystyle\int 5a^2x^6\,dx$ donde $a$ es una constante es:

(a) $\dfrac{5}{3}a^3x^7+c$ (b) $\dfrac{5}{7}a^2x^7+c$ (c) $\dfrac{5}{3}a^2x^7+c$ (d) $\dfrac{5}{3}a^3x^6+c$

**2.** La integral $\displaystyle\int (6x^2+8x+3)\,dx$ es:

(a) $2x^3+4x^2+3x+c$ (b) $6x^3+8x^2+3x+c$

(c) $12x^3+16x^2+3x+c$ (d) $3x^2+4x+3+c$

**3.** La integral $\int x(x+a)(x+b)\,dx$ donde $a$ y $b$ son constantes es:

(a) $4x^4 + \dfrac{a+b}{3}x^3 + \dfrac{ab}{2}x^2 + c$

(b) $\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{a+b}{3}x^3 + \dfrac{ab}{2}x^2 + c$

(c) $4x^4 + 3(a+b)x^3 + 2abx^2 + c$

(d) $\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{a+b}{3}x^2 + \dfrac{ab}{2}x + c$

# 4. Problemas en Formato de Autoevaluación

En esta sección daremos un conjunto de ejercicios que conforman pequeños exámenes que se autocalifican. La idea de como utilizar esta es la siguiente:

- El alumno deberá primero intentar resolver por cuenta propia los ejercicios en su cuaderno.
- Una vez realizado lo anterior, apuntando en la frase Inicio de la Evaluación y oprimiendo el botón izquierdo del ratón pasará a seleccionar la respuesta que considere correcta, una vez contestados todos los ejercicios deberá apuntar en la frase Fin de la Evaluación en ese momento se le indicara cuantos ejercicios han sido bien contestados.
- Apuntando en la palabra Correctas apareserá la frase Mis respuestas y oprimiendo el botón izquierdo del ratón sus respuestas serán calificadas, las respuestas incorrectas serán marcadas con una X y se indicará cual es la respuesta correcta con un círculo verde.
- Apuntando en la respuesta correcta y oprimiendo el botón izquierdo del ratón será llevado a una página donde se da el procedimiento de la solución.

Begin Quiz Responda cada uno de los siguientes ejercicios:

**1.** La integral $\int \frac{1}{x^2+7}\,dx$ es:

☐ $\frac{1}{7}\arctan\frac{x}{7}+c$ ☐ $7\arctan 7x+c$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{x}{\sqrt{7}}+c$

**2.** La integral $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$ es:

- [ ] $\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{2}} + \ln|x+\sqrt{x^2+2}| + c$
- [ ] $\ln|x+\sqrt{x^2+2}| - \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{2}} + c$
- [ ] $\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{2}} - \ln|x+\sqrt{x^2+2}| + c$

**3.** .5cm

**4.** La integral $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ es:

- [ ] $\tan x + x + c$
- [ ] $\tan x - x + c$
- [ ] $x - \tan x + c$

End Quiz | Score: | Correct

## Solutions to Exercises

**Exercise 1.**

Usando la propiedad de que la integral de una suma es la suma de las integrales, tenemos

$$\int (2x^3 - 3\operatorname{sen} x + 5\sqrt{x}\,)\,dx = \int 2x^3\,dx - \int 3\operatorname{sen} x\,dx + \int 5\sqrt{x}\,dx$$

Usando la propiedad de que las constantes entran y salen del signo de integración, se tiene

$$\int (2x^3 - 3\operatorname{sen} x + 5\sqrt{x}\,)\,dx = 2\int x^3\,dx - 3\int \operatorname{sen} x\,dx + 5\int \sqrt{x}\,dx$$

Usando las fórmulas 1 y 3 de la tabla de integrales, tenemos

$$\int (2x^3 - 3\operatorname{sen} x + 5\sqrt{x}\,)\,dx = 2\frac{x^4}{4} - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{3/2}}{3/2}$$

Simplificando se tiene finalmente

$$\int (2x^3 - 3\operatorname{sen} x + 5\sqrt{x}\,)\,dx = \frac{x^4}{2} + 3\cos x + \frac{10x^{3/2}}{3} + c$$

Exercise 1

**Exercise 2.**

Usando la propiedad de que la integral de una suma es la suma de las integrales, tenemos

$$\int \left( \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx = \int 3x^{-1/3}\, dx + \int \frac{1}{2} x^{-1/2}\, dx + \int x^{5/4}\, dx$$

Usando la propiedad de que las constantes entran y salen del signo de integración, se tiene

$$\int \left( \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx = 3 \int x^{-1/3}\, dx + \frac{1}{2} \int x^{-1/2}\, dx + \int x^{5/4}\, dx$$

Usando la fórmula 1 de la tabla de integrales, tenemos

$$\int \left( \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx = 3\frac{x^{2/3}}{2/3} + \frac{1}{2}\frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{x^{9/4}}{9/4}$$

Simplificando se tiene finalmente

$$\int \left( \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx = \frac{9x^{2/3}}{2} + x^{1/2} + \frac{4x^{9/4}}{9} + c$$

Exercise 2

**Exercise 3.**

Usando la propiedad de que si $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ entonces

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + c$$

y la fórmula 2 de la tabla de integrales, se tiene

$$\int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln|x+3| + c$$

Exercise 3

# Solutions to Quizzes

**Solution to Quiz:**

$$\int 5a^2x^6\,dx = 5a^2\int x^6\,dx = 5a^2\frac{x^7}{7} + c = \frac{5}{7}a^2x^7 + c$$

∎

**Solution to Quiz:**

$$\begin{aligned}
\int (6x^2 + 8x + 3)\, dx &= \int 6x^2\, dx + \int 8x\, dx + \int 3\, dx \\
&= 6\int x^2\, dx + 8\int x\, dx + 3\int\, dx \\
&= 6\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + 3x + c \\
&= 2x^3 + 4x^2 + 3x + c
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Solution to Quiz:**

$$
\begin{aligned}
\int x(x+a)(x+b)\,dx &= \int (x^3+(a+b)x^2+abx)\,dx \\
&= \int x^3\,dx + \int (a+b)x^2\,dx + \int abx\,dx \\
&= \int x^3\,dx + (a+b)\int x^2\,dx + ab\int x\,dx \\
&= \frac{x^4}{4} + (a+b)\frac{x^3}{3} + ab\frac{x^2}{2} + c \\
&= \frac{1}{4}x^4 + \frac{a+b}{3}x^3 + \frac{ab}{2}x^2 + c
\end{aligned}
$$

■

**Solution to Quiz:**

Aplicando la fórmula 12 de la tabla de integrales se tiene

$$\int \frac{1}{x^2+7}\,dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{x}{\sqrt{7}} + c$$

■

**Solution to Quiz:**

Tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx &= \int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{(2+x^2)(2-x^2)}}\,dx \\ &= \int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2+x^2}\sqrt{2-x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,dx\end{aligned}$$

Aplicando las fórmulas 15 y 16 de la tabla de integrales se tiene

$$\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx = \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{2}} - \ln|x+\sqrt{x^2+2}| + c$$

■

**Solution to Quiz:**

Tenemos que

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \int \sec^2 x\,dx - \int dx$$

Aplicando la fórmula 5 de la tabla de integrales se tiene

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c$$

■