2º Examen Parcial de Temas Selectos de Ingeniería Física

Alejandro Kunold

Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco

(Dated: 5 de julio de 2017)

Problema 1: Un electrón se encuentra inicialmente en el estado cuántico

$$\left|\psi\left(0\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-z\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|+z\right\rangle . \tag{1}$$

En ese instante se enciende un campo magnético en la dirección de y y el electrón interactúa con él a través del hamiltoniano de Zeeman

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_y . \tag{2}$$

Estudia la evolución del espín del electrón llevando a cabo las tareas de los siguientes incisos:

1. Escribe $\left|\psi\left(0\right)\right\rangle$ en la base de $\hat{S}_y$ (1 punto).
2. Aplica el operador de evolución $U = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right)$ al estado obtenido en el inciso anterior y calcula el estado del electrón en cualquier instante t, es decir, calcula $\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$ (2 puntos).
3. Expresa el estado del inciso anterior en la base de $\hat{S}_z$ (1 punto).
4. Calcula el valor esperado de la proyección del espín a lo largo de z es decir calcula $\left\langle \psi\left(t\right) \middle| \hat{S}_z \middle| \psi\left(t\right)\right\rangle$ (2 puntos).

Problema 2: Demuestra que el operador

$$\hat{T}\left(\delta p\right) = 1 + i\frac{\hat{x}\delta p}{\hbar}, \tag{3}$$

produce traslaciones infinitesimales en los estados de momento, es decir

$$\hat{T}\left(\delta p\right)\left|p\right\rangle = \left|p+\delta p\right\rangle . \tag{4}$$

Para esto sigue los siguientes pasos:

1. Multiplica por $\hat{p}$ el lado izquierdo de la ecuación anterior y demuestra que

$$\hat{p}\hat{T}\left(\delta p\right)\left|p\right\rangle = \left(\left[\hat{p},\hat{T}\left(\delta p\right)\right] + \hat{T}\left(\delta p\right)\hat{p}\right)\left|p\right\rangle . \tag{5}$$

   (1 punto)

2. Calcula el conmutador $\left[\hat{p},\hat{T}\left(\delta p\right)\right]$ de la ec. (5) y sustituye el resultado en esa misma ecuación (1 punto).
3. Demuestra que el inciso anterior da por resultado

$$\hat{p}\hat{T}\left(\delta p\right)\left|p\right\rangle = \left(p+\delta p\right)\hat{T}\left(\delta p\right)\left|p\right\rangle . \tag{6}$$

   Sugerencia: Nota que puedes agregar algo de orden δp^2 ya que la traslación es infinitesimal y cualquier término de este orden es despreciable en comparación a lo demás. (2 puntos)

4. Finalmente, compara el resultado de la ec. (6) con

$$\hat{p}\left|p\right\rangle = p\left|p\right\rangle \tag{7}$$

   y demuestra (4) (1 punto).

Problema 3: La función de onda del estado de más baja energía de una partícula en una caja de potencial infinito de longitud L está dada por

$$\psi\left(x\right) = \left\langle x \middle| \psi\right\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), & 0 \leq x \leq L, \\ 0 & 0 > x > L. \end{cases} \tag{8}$$

Encuentra la función de onda $\psi\left(p\right) = \left\langle p \middle| \psi\right\rangle$ en la representación del momento (3 puntos).