

SAI 1112042 Introducción al Cálculo

Temas:

Reglas de la aritmética y de los signos para los números.

Regla de la balanza: al despejar o simplificar o transformar una expresión que tiene un operador de relación como $=, \neq, <, >, \geq, \leq$, se debe aplicar lo mismo a ambos lados del operador y esto no altera la relación de la expresión, porque **como en una balanza de pesas, si quita o se agrega de ambos lados las mismas pesas se mantiene el equilibrio.**

Por ejemplo:

Para determinar c o sea despejarla de la ecuación: $c - 2 + 4 + 8 = 4$.

La idea es dejar de un lado solo a c , se tiene por la regla de la balanza que quitar

$-2 + 4 + 8$, lo cual se logra con $-2-4-8$ y lo importante es hacerlo de ambos lados para mantener la relación y hacer un despeje correcto:

$$(+2-4-8)+c-2+4+8=4+(+2-4-8).$$

Simplificando se obtiene: $c = -6$.

Conceptos básicos de conjuntos.

Los conjuntos son colecciones o agrupaciones de elementos bien definidos (o sea que se pueden identificar sin lugar a dudas) y se denotan por medio de dos convenciones:

1) Por extensión: {lista de elementos} donde las llaves encierran a la lista de elementos y la lista de elementos son objetos o sustantivos bien definidos. Por ejemplo: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. La expresión $A =$ conjunto permite darle nombre a un conjunto. Por ejemplo: $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ permite escribir D y se entiende que se refiere al conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

2) Por regla: Se tiene un conjunto dado y conocido más una proposición. Por ejemplo sea D y la proposición número par, tal conjunto se escribe $\{x \in D | x \text{ es número par}\}$.

Lo podemos nombrar como $P = \{x \in D | x \text{ es número par}\}$ (se lee P es el conjunto de los elementos de D tal que el elemento es un número par) y en este caso calculando sus elementos se obtiene el conjunto por extensión como $P = \{2, 4, 6, 8\}$.

Los conjuntos de números son:

Conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$

Conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$

Conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ y } q > 0\}$. Los que tienen mantiza finita o infinita repetitiva.

Conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, donde los números reales se identifican con todos los puntos de la recta numérica.

Conjunto de los números irracionales $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Los que tienen mantiza infinita y no repetitiva.

Reglas de la aritmética y de los signos para los números.

El conjunto de los números reales se denota con el símbolo $\mathbb{R}$.

$\in$ este símbolo significa pertenencia.

Sean $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ (se lee sean los a, b, c, d, p, q que pertenecen al conjunto de los números reales, o sea, las variables a, b, c, d, p, q consisten de valores o números reales que incluyen a los enteros, los racionales o fracciones y los números irracionales como $\sqrt{2}$).

Las operaciones de suma (+) y producto o multiplicación (*) cumplen:

Cerradura bajo la suma: $a + b$ es un número real, o sea, $a + b \in \mathbb{R}$

Cerradura bajo el producto: $a * b$ es un número real, o sea, $a * b \in \mathbb{R}$

(Nota a veces se omite $*$ y se escribe solamente ab).

Conmutatividad de la suma: $a + b = b + a$

Conmutatividad del producto o multiplicación (*): $a * b = b * a$

Asociatividad de la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$

(Se puede sumar de derecha a izquierda o de izquierda a derecha y da el mismo resultado)

Asociatividad del producto: $(a * b) * c = a * (b * c)$

(Se puede multiplicar de derecha a izquierda o de izquierda a derecha y da el mismo resultado)

Distribución de la suma bajo el producto: $(a + b) * c = a * c + b * c$,

Nota: Para $(a + b)c$ se debe realizar $a + b$ y multiplicar por c ,

o bien, sumar los productos $a * c + b * c$.

La otra versión equivalente es $c*(a+b) = c*a + c*b$. Ambas formas de la distribución son importantes porque permiten factorizar. Note que los productos y divisiones tienen preferencia a menos que se cambie por medio de los paréntesis. Así para resolver $c*(a+b)$ primero se realiza la suma de $a+b = a+b$ y luego el producto. Pero para la forma equivalente $c*a + c*b$, primero se realizan los productos y después la suma.

Reglas de los signos:

- 1) $(+)(-) = (-)(+) = -$
- 2) $(+)(+) = +$
- 3) $(-)(-) = +$

O en forma de tabla:

*	+	-
+	+	-
-	-	+

Se tienen que aprender junto con las tablas de suma y multiplicación para facilitar y no cometer errores en los cálculos y desarrollos de respuesta.

Operaciones con números reales y expresiones matemáticas simples.

1) Resolver las expresiones mediante la regla de la balanza y el álgebra, antes de usar aproximaciones y la calculadora.

2) Al simplificar y calcular se debe considerar la regla de los signos.

3) Las operaciones con números reales deben considerar la agrupación de términos por común denominador.

Nota: ningún divisor puede ser 0, porque la división entre 0 no está definida.

$$b\frac{p}{q} = \frac{bq+p}{q}$$

$$\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

NOTA: La notación entero fracción a veces se confunde con un producto:

$$b\frac{p}{q} = \frac{bq+p}{q} \neq (b)\frac{p}{q} = b\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{b}{1}\right)\frac{p}{q} = \frac{bp}{1q} = \frac{bp}{q}.$$

Por ejemplo: $3\frac{1}{2} = \frac{3*2+1}{2} = \frac{7}{2} \neq 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} = (3)\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

4) Aplicar correctamente las reglas de los exponentes y radicales ($b > 0$):

$$(b^p)(b^q) = b^{p+q}$$

$$\frac{1}{b^p} = b^{-p}$$

$$\sqrt[p]{b^p} = b^{\frac{p}{p}}$$

5) $\max(a, b, c, d, \dots)$ es el valor mayor de la lista y $N = \min(a, b, c, d, \dots)$ es el valor menor de la lista.

6) Potencias enteras de -1: $(-1)^0 = 1, (-1)^1 = -1, (-1)^2 = 1, (-1)^3 = -1, \dots$

7) Manejo de potencias negativas: $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$. En general para $x \neq 0$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

8) Expresiones equivalentes entre potencias y radicales: $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$.

9) Potencias racionales con la misma base: $a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{t}{r}} = a^{\frac{n}{m} + \frac{t}{r}} = a^{\frac{nr+mt}{mr}}$, ya que la

Suma de fracciones es: $\frac{n}{m} + \frac{t}{r} = \frac{nr+mt}{mr}$.

10) Ejemplos de números reales irracionales (mantiza infinita y no es periódica):

e es la base de los logaritmos naturales y es conocido, $e \approx 2.7183\dots$

π es el factor que relaciona la circunferencia con el radio de la misma, $\pi \approx 3.1415\dots$

$\sqrt{2} = 1.4142\dots$ es la diagonal de un triángulo rectángulo de lados de largo 1.

11) Notación de números reales. Punto fijo se escribe la parte entera punto y los dígitos de la mantiza: 3,122,300.09 (para números grandes se usa la coma para separar).

Notación científica o de punto flotante: escribe la parte entera punto, los dígitos de la mantiza

y se escala mediante un factor de la base correspondiente. Se usa la base 10 en el caso de los números decimales o sea los que usan la base 10. Por ejemplo:

$$3,122,300.09 = 3.12230009 \times 10^6. \text{ Otro ejemplo: } 0.00001123 = 1.123 \times 10^{-5}.$$

12) La notación de los números racionales. El valor exacto de un número racional es su expresión algebraica como división de enteros, o sea p/q donde p es un entero positivo o negativo y q es un número entero positivo distinto de cero. En la notación de punto fijo de los números reales a los números racionales les ocurre que pueden tener mantiza fija finita o bien mantiza infinita y periodica. A la parte periodica se coloca una raya arriba para indicar que se repite infinitamente. Por ejemplo: -1.5 corresponde con $\frac{3}{2}$; $0.01\overline{6} = 0.16666666\ldots$ que corresponde con el $\frac{1}{60}$. Para pasar un número racional en la notación de punto fijo y mantiza periodica se utiliza multiplicar por un factor que deje después del punto a la mantiza periodica.

Así por ejemplo:

Sea el número $107.0\overline{545}$.

Paso 1) $x = 107.0\overline{545}$.

En este caso conviene multiplicar por 10 para dejar el periodo repetitivo después del punto decimal. Sea $y = 10x = 1,070.\overline{545}$

Con el factor 1,000 se tiene:

$$1000y = 1000 * 1070.545\overline{545} = 1070545.\overline{545}.$$

Ahora $1,000y - y = 999y$ y del otro lado

$$1000y = 1070545.\overline{545}$$

$$-y = -1070.\overline{545}$$

$$(1000 - 1)y = -1070$$

$$999y = 1070545 - 1070 = 1069475$$

$$\text{Despejando } y = \frac{1069475}{999} = \frac{1069475}{999} = 1070.545\overline{545}.$$

$$\text{Como } y = 10x, \text{ despejando } x = y \frac{1}{10} = \frac{1069475}{999} \frac{1}{10} = \frac{1069475}{9990} = \frac{213895}{1998} = 107.0545545545545\overline{5} = 107.0\overline{545}$$

Cuando se realizan simplificaciones de expresiones se tienen fórmulas conocidas que ayudan a obtener una expresión equivalente más sencilla.

$$\text{Diferencia de cuadrados: } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$$\text{Note que } (a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2.$$

Una aplicación de la diferencia de cuadrados es en los procesos de simplificación y se usa en la eliminación de divisores con raíces cuadradas, o sea en el procesos de racionalización.

$$\frac{1}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a+b}}{a-b^2}. \text{ Se tiene ya que: } (\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}) = a - b^2 \text{ y el factor } \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}} = 1. \text{ O sea, } \frac{1}{\sqrt{a-b}} \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{a+b}}{a-b^2}.$$

De forma similar se tienen

$$\frac{1}{a-\sqrt{b}} = \frac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$$