

En esta clase se tratan las desigualdades: d) $|ax + b| \leq k$, e) $|ax + b| \geq k$ para el problema de determinar el intervalo donde se cumple cada una.

Función valor absoluto

La función valor absoluto, consiste en tomar el argumento de la función y transformarlo en un valor positivo o cero. Su definición es una función seccionada para los dos casos de que el argumento sean positivos o cero o bien sea negativo, en este ultimo caso lo multiplica por (-1) para volverlo positivo. La definición de la función valor absoluto es:

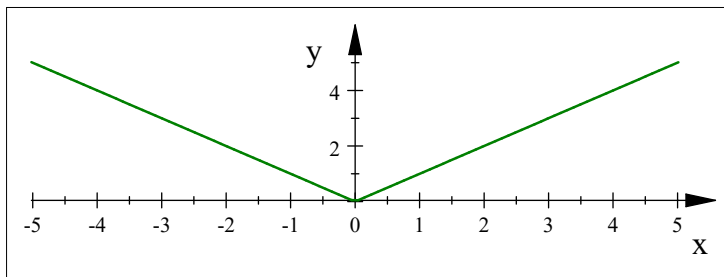
1) $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ y su regla dada por dos casos o secciones es:

$$2) |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Note que el dominio de la función valor absoluto es $\mathbb{R}$ y su rango es $[0, \infty)$.

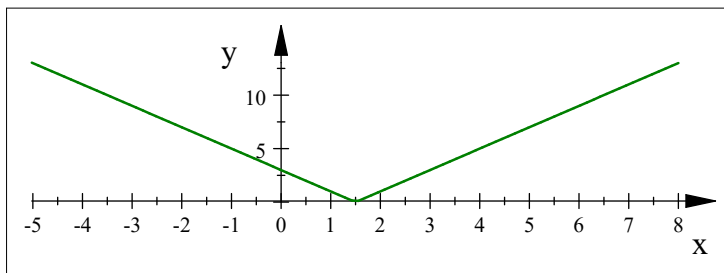
Ejemplos: $|5| = 5$, $|-3\pi| = 3\pi$, $\left| \frac{-3(8)}{2} + 3\pi \right| = 12 - 3\pi$, etc.

Se puede interpretar como que le quita lo negativo (o sea el signo $-$) a un número y siempre da un valor positivo o cero. La gráfica de $|x|$ se muestra por las líneas verdes.



Cuando se aplica a una recta, esta se refleja sobre el eje X. Por ejemplo:

$f(x) = |-2x + 3|$, su gráfica en color verde es



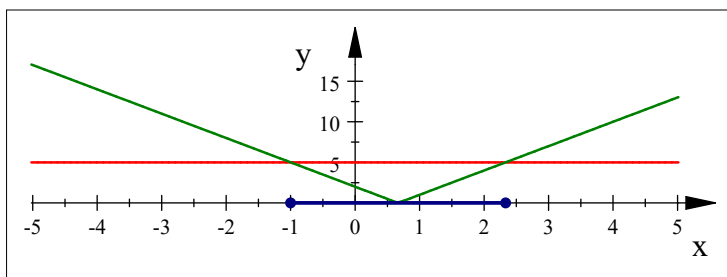
Note que las desigualdades de esta clase son casos particulares de la desigualdad a) $ax + b \leq cx + d$ donde para una de las rectas se considera la recta constante $y = k$.

Problema: determinar el intervalo donde se cumple: d)

$|ax + b| \leq k$.

Una interpretación geométrica del problema: se trata de determinar el intervalo en el eje X donde los valores x de $f(x) = |ax + b|$ (del valor absoluto de la recta $ax + b$) están por abajo de la recta constante ($y = k$).

Sea $|-3x + 2|$ (aparece en verde) y $k = 5$ (aparece en rojo)



El intervalo solución es la línea azul.

Método de solución algebraico:

- 1) Se deben evaluar los casos a) $ax + b \geq 0$ y b) $-(ax + b) \geq 0$.
- 2) Al combinar a) con k , se debe resolver $ax + b \leq k$ y despejar x .
- 3) Al combinarlo b) con k , resolver $-(ax + b) \leq k$ y despejar x .
- 4) El intervalo solución es la intersección de los intervalos de los casos 2) y 3).

NOTAS: El caso a) corresponde a los valores positivos o cero de la recta $ax + b$ y no se le cambia el signo. El caso b) corresponde a los valores negativos o cero de la recta $ax + b$ y se le cambia el signo porque la función valor absoluto transforma lo negativo en positivo.

Ejemplo

Dada la expresión: $|-3x + 2| \leq 5$, determinar el intervalo donde se cumple.

Como se trata de la función valor absoluto se tiene:

$$|-3x + 2| = \begin{cases} -3x + 2 \geq 0 & \text{a) Si } -3x + 2 \geq 0 \\ -3x + 2 < 0 & \text{b) Si } -(-3x + 2) < 0 \end{cases}$$

Se tienen dos rectas, ambas deben pasar por debajo de $y = 5$.

a) Se parte de $-3x + 2 \geq 0$ y ≤ 5 .

Se tiene el problema de determinar el intervalo donde se cumple: $-3x + 2 \leq 5$.

Despejando x por la regla de la balanza, del lado izquierdo los terminos con la variable y del lado derecho los valores (solo se requiere sumar -2):

$-3x + 2 + (-2) \leq 5 + (-2)$, o sea $-3x \leq 3$, se multiplica por $(-\frac{1}{3})$ en ambos lados y como es negativo se invierte la desigualdad $\leq$: se tiene $-3x(-\frac{1}{3}) \leq 3(-\frac{1}{3})$.

Finalmente se tiene $x \geq -1$. El intervalo es $[-1, \infty)$.

b) $-(-3x + 2) \geq 0$ y ≤ 5 .

Se tiene el problema de determinar el intervalo donde se cumple: $-(-3x + 2) \leq 5$, o sea $3x - 2 \leq 5$.

Despejando x por la regla de la balanza, del lado izquierdo los terminos con la variable y del lado derecho los valores (solo se requiere sumar 2):

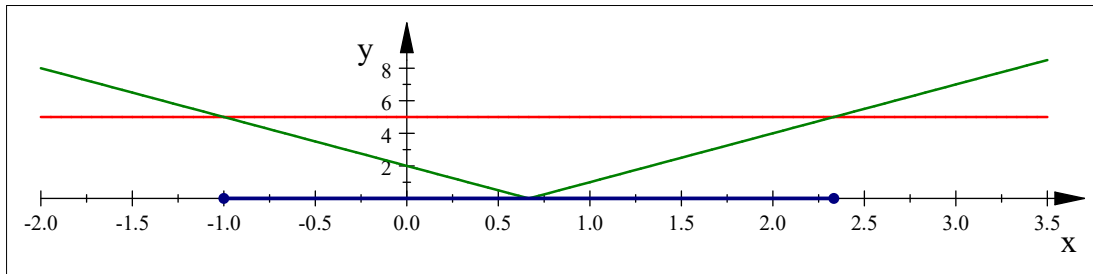
$3x - 2 + (2) \leq 5 + (2)$, o sea $3x \leq 7$, se multiplica por $(\frac{1}{3})$ en ambos lados: $3x(\frac{1}{3}) \leq 7(\frac{1}{3})$.

Se tiene $x \leq \frac{7}{3}$. Por lo que el intervalo es $(-\infty, \frac{7}{3}]$.

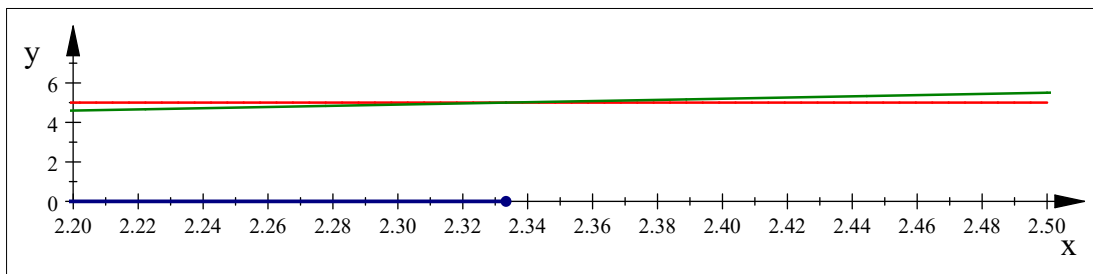
Finalmente, el intervalo solución es la intersección de los intervalos de los casos anteriores: $[-1, \infty) \cap (-\infty, \frac{7}{3}] = [-1, \frac{7}{3}]$.

Interpretación por medio de las gráficas de las funciones.

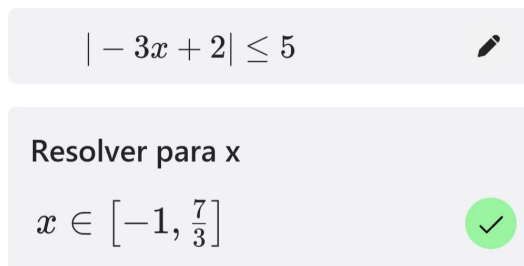
Las rectas positivas del problema son a) $-3x + 2$ (recta verde del lado izquierdo) y b) $3x - 2$ (recta verde del lado derecho), la recta constante $y = 5$ (de color rojo) y el intervalo solución $[-1, \frac{7}{3}]$ (recta azul sobre el eje X):



Note que $7/3 = 2.\bar{3}$



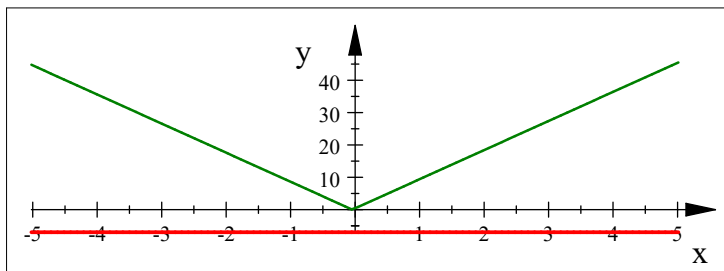
Usando PhotoMath: se obtiene el mismo intervalo de solución.



Ejemplo

Dada la expresión: $|9x + \frac{2}{5}| \leq -7$, determinar el intervalo donde se cumple.

Por medio de la gráfica se tiene:

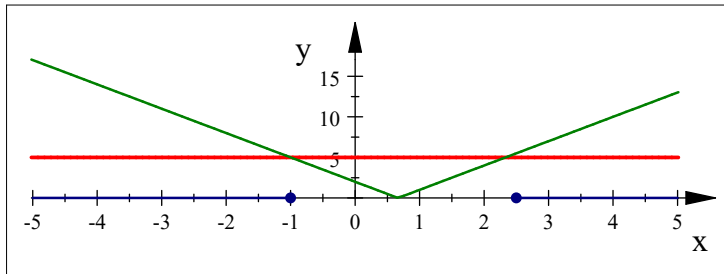


La solución es ϕ (conjunto vacío).

Siguiente caso: problema: determinar un intervalo donde se cumple e) $|ax + b| \geq k$.

Una interpretación geométrica del problema: se trata de determinar el intervalo en el eje X donde los valores $y = |ax + b|$ (del valor absoluto) están por arriba de la recta ($y = k$).

Sea $|-3x + 2|$ (aparece en verde) y $k = 5$ (aparece en rojo)



Ejemplo

Dada la expresión: $|-3x + 2| \geq 5$, determinar el intervalo donde se cumple.

Respuesta.

Como se trata de la función valor absoluto se tiene:

$$|-3x + 2| = \begin{cases} -3x + 2 \geq 0 & \text{a) Si } -3x + 2 \geq 0 \\ -3x + 2 < 0 & \text{b) Si } -(-3x + 2) < 0 \end{cases}$$

En el caso a) se tiene $-3x + 2 \geq 0$ y ≥ 5 .

Es decir, $-3x + 2 \geq 5$. Se tiene que despejar x .

$-3x + 2 + (-2) \geq 5 + (-2)$, se tiene

$-3x \geq 3$. Multiplicación por $(-\frac{1}{3})$ a ambos lados: $-3x(-\frac{1}{3}) \geq 3(-\frac{1}{3})$.

Se tiene $x \leq -1$ y el intervalo es $(-\infty, -1]$.

En el caso b) se tiene $-(-3x + 2) \geq 0$ y ≥ 5 .

Es decir, $-(-3x + 2) \geq 5$. Se tiene que despejar x .

$3x - 2 \geq 5$, se tiene $3x - 2 + (2) \geq 5 + (2)$,

$3x \geq 7$. Multiplicando por $(\frac{1}{3})$: $3x(\frac{1}{3}) \geq 7(\frac{1}{3})$.

Se tiene $x \geq \frac{7}{3}$ y el intervalo es $[\frac{7}{3}, \infty)$.

El intervalo resultante es la unión de los intervalos de los casos a y b:

$(-\infty, -1] \cup [\frac{7}{3}, \infty)$.

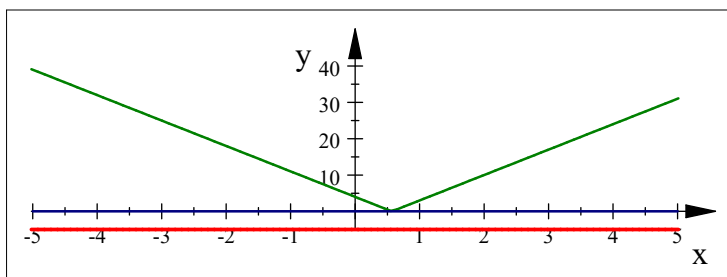
En resumen el método de resolución consiste en:

- 1) Se deben evaluar los casos a) $ax + b \geq 0$ y b) $-(ax + b) \geq 0$.
- 2) Al combinarlo con k , resolver $ax + b \geq k$ y despejar x .
- 3) Al combinarlo con k , resolver $-(ax + b) \geq k$ y despejar x .
- 4) El intervalo solución es la unión de los intervalos de los casos 2) y 3).

Ejemplo

Dada la expresión: $|7x - 4| \geq -5$, determinar el intervalo donde se cumple.

Sea $|7x - 4|$ (aparece en verde) y $k = -5$ (aparece en rojo)



De la gráfica la solución es $\mathbb{R}$.

Respuesta.

El intervalo solución es $\mathbb{R}$, porque $|7x - 4| \geq 0$ para cualquier x , o sea siempre es $\geq a - 5$.

Ejemplo

Dada la expresión $|x - 2| \geq 5$, determinar el intervalo donde se cumple.

Respuesta.

1) Por tratarse de la función valor absoluto se deben evaluar los casos donde el argumento cumpla: a) $x - 2 \geq 0$, por tanto $|x - 2| = x - 2$ y $x - 2$ es lo que se sustituye y b) $(x - 2) < 0$, por tanto $|x - 2| = -(x - 2)$ y $-(x - 2)$ es lo que se sustituye. En el caso b) el argumento es negativo y por eso se le debe multiplicar por (-1) para que sea positivo.

2) Al combinarlo con 5, resolver $x - 2 \geq 5$ y despejar x .

Se tiene: $x \geq 7$. El intervalo es $[7, \infty)$.

3) Al combinarlo con 5, resolver $-(x - 2) \geq 5$ y despejar x .

Se tiene: $-(x - 2) = -x + 2 \geq 5$. Despejando x ,

$-3 \geq x$. El intervalo es $(-\infty, -3]$.

4) El intervalo solución es la unión de los intervalos de los casos 2) y 3) y es $(-\infty, -3] \cup [7, \infty)$.

Verificación.

Sea $|x - 2|$ (aparece en verde) y $k = 5$ (aparece en rojo).

El intervalo solución $(-\infty, -3] \cup [7, \infty)$ (aparece en azul).

