

TEMAS

Funciones polinomiales. Función Racional, división de polinomios y puntos fijos y removibles.

Funciones polinomiales y racionales.

Funciones polinomiales

Una función polinomial corresponde con las expresiones llamadas polinomios, lo cuales tienen varios monomios de la forma $a_n x^n$ donde a_n es un número real (coeficiente) y x es la variable que toma valores reales.

La expresión general es $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$.

El grado del polinomio es el exponente del monomio mayor.

Ejemplo $p_1(y) = -2 + \frac{2}{3}y + 4y^3$.

Es de grado 3 y tiene los coeficientes $a_0 = -2, a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = 0, a_3 = 4$.

Los polinomios de grado n tienen a lo más n raíces reales.

Nota. El Teorema fundamental de Algebra dice que tiene exactamente n raíces en los números complejos.

Note que si se tienen números reales distintos $r_0, r_1, \dots, r_n$ se puede construir un polinomio factorizado como $(x - r_0)(x - r_1) \cdots (x - r_n)$.

Donde el monomio de mayor grado es x^n y monomio de grado 0 es $(-1)^n r_0 r_1 \cdots r_n$.

O sea si un polinomio tiene n raíces reales se puede factorizar en factores y tiene n raíces. Sin embargo, los polinomios de grado par, por ejemplo los de grado 2, pueden no tener raíces reales. Por eso el Teorema Fundamental del Algebra cuando se aplica que los polinomios de grado n de números reales tienen a lo más n raíces reales. (Nota: en los números complejos tienen exactamente n raíces complejas).

Los polinomios de grado n impar, siempre tienen al menos una raíz real porque si x es muy grande $p(x)p(-x) < 0$. Hay un cambio de signo y los polinomios son funciones continuas y por tanto tiene al menos una raíz.

Por otro lado los polinomios de grado n par, podrían no tener ninguna raíz real, o una de multiplicidad 2 [son factores de la forma $(x - r_1)^2$] o al menos 2 raíces reales.

Siempre es posible, después de encontrar una raíz, factorizar por división a un polinomio dado para tratar de determinar sus raíces. O sea:

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n}{x - r_1} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} \text{ donde}$$

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1})(x - r_1) =$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n.$$

Las raíces de los polinomios son los ceros, o sea los x_i tales que $p(x_i) = 0$.

Ejemplo. Sea $g(z) = -3 + z - 4z^3$, notemos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Los ceros se obtienen de $-3 + z - 4z^3 = 0$. Note que $z_1 = -1$ es una raíz o sea un cero de g .

$$g(-1) = -3 + (-1) - 4(-1)^3 = -3 - 1 + 4 = -4 + 4 = 0.$$

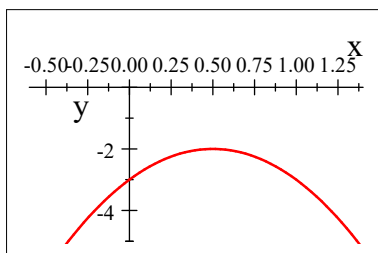
La gráfica de $g(z) = -3 + z - 4z^3$ (verde) es

Los puntos de discontinuidad removibles son aquellos que corresponde con las raices iguales del divisor y del numerador.

Por ejemplo, factorizando los polinomios de la función f se tiene:

$$\frac{x^2-1}{-3+x-4x^3} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(-4x^2+4x-3)}$$

Note que $-4x^2 + 4x - 3$ es un polinomio cuadrático sin raices reales. O sea es una parabola que abre hacia abajo y no curza el eje X .



Por otro lado de la factorización se tiene:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(-4x^2+4x-3)} = \frac{x-1}{-4x^2+4x-3}.$$

Por tanto $x = -1$ es un punto de discontinuidad removible (desaparece por simplificación) y como $-4x^2 + 4x - 3$ no tiene raices reales, la división por este polinomio no tiene restricciones y el dominio de la función f es $\mathbb{R}$.

La nueva formula de f es $f(x) = \frac{x-1}{-4x^2+4x-3}$

Ahora los ceros corresponden al numerador igual a 0.

En este ejemplo para f se tiene un único cero en $x = 1$.

Cuando el divisor de una función racional tiene una raíz que no se puede simplificar, se tiene una discontinuidad fija o esencial:

En resumen para el ejemplo de $f(x) = \frac{x^2-1}{-3+x-4x^3}$.

El divisor es $-3 + x - 4x^3 = (x + 1)(-4x^2 + 4x - 3)$ tiene un cero en $x_1 = -1$.

Esto sugiere antes de la factorización y simplificación que el dominio de f es $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

El numerador es $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ sus ceros son $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$.

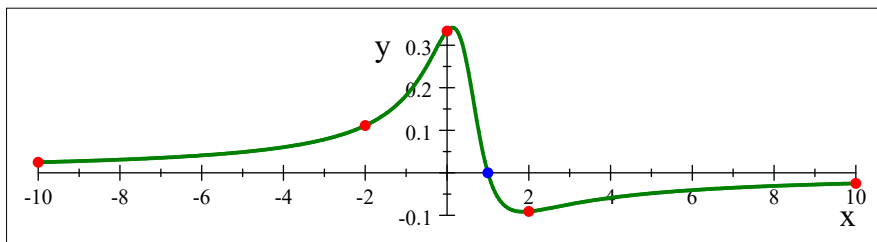
$$\text{Reescribiendo } f(x) = \frac{x^2-1}{-3+x-4x^3} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(-4x^2+4x-3)} = \frac{x-1}{-4x^2+4x-3}.$$

Note que se quito $x_1 = -1$ es decir se trata de una discontinuidad removible.

Por tanto el dominio de f es $\mathbb{R}$.

Y el cero de f es en $x_3 = 1$.

La gráfica de $f(x) = \frac{x-1}{-4x^2+4x-3}$ (verde), su única raíz en $x = 1$ (punto azul) es



La siguiente tabla son puntos de la función f que se muestran en rojo.

$f(-10) = \frac{11}{443}$	$f(10) = -\frac{3}{121}$
$f(-2) = \frac{1}{9}$	$f(2) = -\frac{1}{11}$
$f(0) = \frac{1}{3}$	

Ejemplo 1.

Sea $h(x) = \frac{1}{x}$.

Determinar sus puntos de discontinuidad fijos y removibles, su dominio, rango y realizar un esbozo.

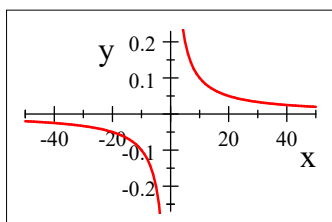
RESPUESTA.

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

Es una función racional del cociente del polinomio constante 1 y el divisor es el polinomio x .

Como no se pueden simplificar, se tiene que $x = 0$ es una raíz del divisor y es un punto de discontinuidad fijo o esencial.

Un esbozo de $f(x) = \frac{1}{x}$ (rojo)



Se tiene $f: (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

O sea $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 2.

$$\text{Sea } j(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 3x}$$

Determinar sus puntos de discontinuidad fijos y removibles, sus ceros, su dominio, su rango y realizar un esbozo.

RESPUESTA.

Se factorizan los polinomios numerador: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$,

y divisor: $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x + 1)(x - 3)$.

Las raíces del divisor son $-1, 0, 3$, o sea los puntos de discontinuidad.

Se sustituyen las factorizaciones y se simplifica:

$$j(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x+1)(x-3)} = \frac{x-2}{x(x-3)}.$$

Como se cancela el factor $(x + 1)$, el punto $x_1 = -1$ es una discontinuidad removible.

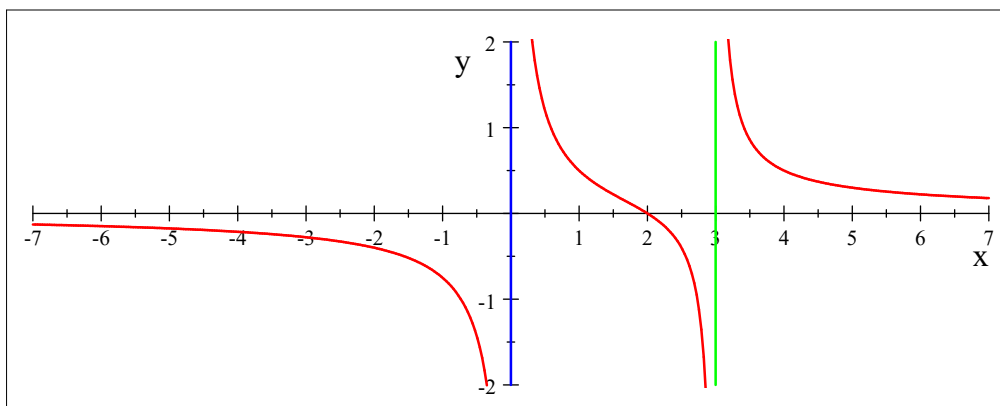
Mientras que $x_0 = 0$ y $x_2 = 3$ son discontinuidades fijas.

La raíz del polinomio numerador ($x_3 = 2$) es una raíz de la función j .

La versión simplificada es $j(x) = \frac{x-2}{x(x-3)}$.

Por tanto el dominio de j es $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$

Un esbozo de j es



De la gráfica se obtiene que su rango es $\mathbb{R}$.

La línea azul corresponde al punto de discontinuidad esencial $x_0 = 0$.

La línea verde corresponde al punto de discontinuidad esencial $x_3 = 3$.

Tales líneas son las asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 3$ respectivamente.