

TEMAS

Límite en un punto.

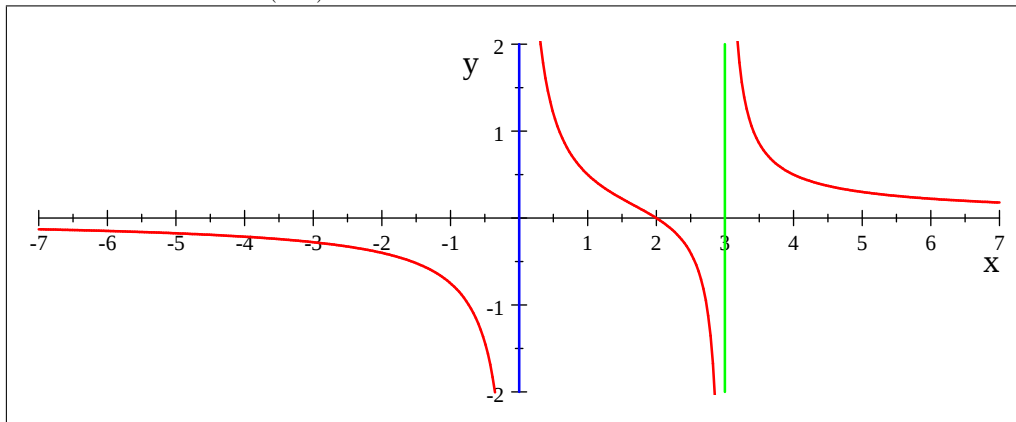
Notación.

Sea v un valor real dado.

$x \rightarrow v^-$ significa que nos acercamos a v por la izquierda.

$x \rightarrow v^+$ significa que nos acercamos a v por la derecha.

Un esbozo de $j(x) = \frac{x-2}{x(x-3)}$ es



De la gráfica se obtiene que su rango es $\mathbb{R}$.

La línea azul corresponde al punto de discontinuidad esencial $x_0 = 0$.

La línea verde corresponde al punto de discontinuidad esencial $x_3 = 3$.

Tales líneas son las asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 3$ respectivamente.

En la grafica de j observe que se tiene lo siguiente:

Cuando $x \rightarrow 0^-$ la función $j(x) \rightarrow -\infty$ (se lee tiende a menos infinito).

Cuando $x \rightarrow 0^+$ la función $j(x) \rightarrow \infty$ (se lee tiende a infinito).

Cuando $x \rightarrow 3^-$ la función $j(x) \rightarrow -\infty$ (se lee tiende a menos infinito).

Cuando $x \rightarrow 3^+$ la función $j(x) \rightarrow \infty$ (se lee tiende a infinito).

En el caso de la grafica de j observe que se tiene lo siguiente:

Cuando $x \rightarrow 0^-$ la función $j(x) \rightarrow -\infty$ (se lee tiende a menos infinito).

Cuando $x \rightarrow 0^+$ la función $j(x) \rightarrow \infty$ (se lee tiende a infinito).

Lo cual dijimos significa que como los límites son diferentes la función es discontinua en 0 (que es una discontinuidad fija o esencial de la función j).

Para escribir los anterior se usa la notación de límites, o sea

$\lim_{x \rightarrow 0^-} j(x) = -\infty$, se lee el límite cuando x tiende a cero por la izquierda es que la función $j(x)$ "toma" el valor menos infinito.

Por otro lado.

Definición. Una función es continua en un punto, cuando los limites laterales de la función en el punto dado son iguales y diferentes de $-\infty$ o $+\infty$ (Porqué $-\infty$ o $+\infty$ no son numeros reales finitos). Y se dice que la función es continua en ese punto.

Por ejemplo.

Para $j(x) = \frac{x-2}{x(x-3)}$ y el punto $x = 1$, se tiene por la izquierda y la derecha:

1^-	1^+
$j(0.9) = 0.5820$	$j(1.1) = 0.4306$
$j(0.99) = 0.5075$	$j(1.01) = 0.4925$
$j(0.999) = 0.5007$	$j(1.001) = 0.4992$
$\vdots$	$\vdots$
$j(1^-) = 0.5 = \frac{1}{2}$	$j(1^+) = 0.5 = \frac{1}{2}$

O sea,

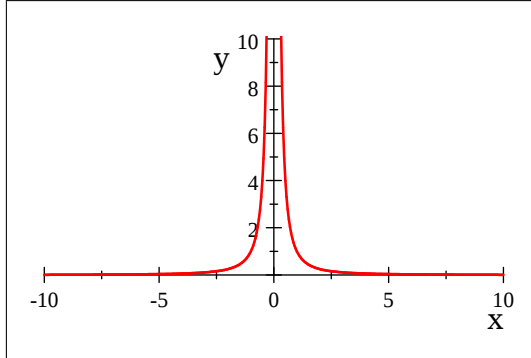
$\lim_{x \rightarrow 1^-} j(x) = 0.5$ (ver columna izquierda) y $\lim_{x \rightarrow 1^+} j(x) = 0.5$ (ver columna derecha).

Como son iguales se dice que la función es continua en el punto $x = 1$ y se escribe:
 $\lim_{x \rightarrow 1} j(x) = \frac{1}{2}$ (note que 1 aparece sin el exponente - o +, que indican lateralidad).

Nota: El concepto de continuidad no incluye ∞ y $-\infty$.

Por ejemplo. Sea $h(x) = \frac{1}{x^2}$.

Su esbozo gráfico de color rojo es:



Note que h es una función continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en 0, que es el único punto donde no se puede evaluar, porque no se puede dividir con $x = 0$, sin embargo se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

O sea los límites laterales son iguales, pero se trata de ∞ que no es número real finito y por tanto no es continua en $x = 0$.