

TEMAS

Recomiendo revisar el libro de texto. Cálculo de una variable, George B. Thomas, 12 ed., Pearson. sección 1.3 Funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas.

Desplazamientos verticales y horizontales, reflexiones, elongaciones y contracciones de la gráfica de una función.

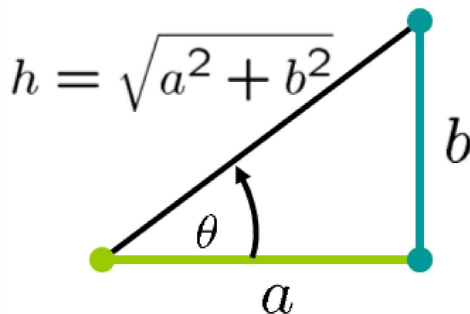
Funciones trigonométricas. Funciones periódicas. Amplitud, periodo, traslación.

Una función es periódica si existe un valor $T > 0$ (se toma el más pequeño) tal que $f(x) = f(x + T)$.

Nota: significa que se repite después del periodo T .

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas que se repiten cada 2π radianes, o sea cada vuelta de un círculo unitario.

Se definen con base en un triángulo rectángulo, como el siguiente:



Seno: $\sin(\theta) = \frac{b}{h}$; Coseno $\cos(\theta) = \frac{a}{h}$; Tangente: $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$;

Cotangente: $\cot(\theta) = \frac{a}{b}$; Secante: $\sec(\theta) = \frac{h}{a}$; Cosecante: $\csc(\theta) = \frac{h}{b}$

NOTE: $\sin(\theta) = \frac{1}{\csc(\theta)}$; $\cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)}$; $\tan(\theta) = \frac{1}{\cot(\theta)}$.

Ángulos notables:

0 grados: $\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$

30 grados: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

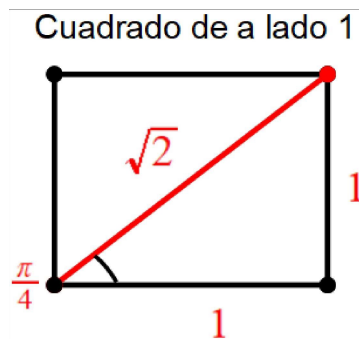
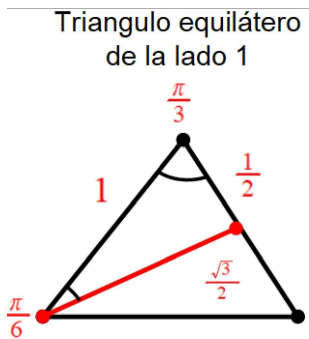
45 grados: $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

60 grados: $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

90 grados: $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

$\sqrt{2}$

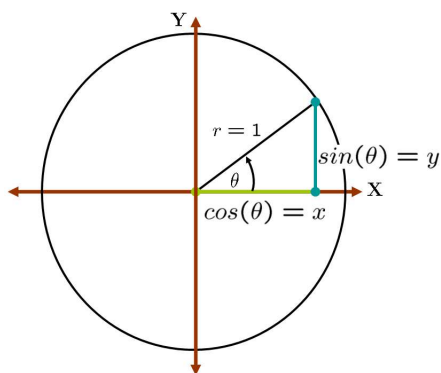
Los valores se obtienen de la siguientes figuras:



Todas las medidas angulares deben ser en radianes, ya que estos relacionan de forma natural la distancia sobre la circunferencia como el ángulo.

Las funciones seno y coseno definidas por medio del círculo trigonométrico.

En particular para una circunferencia de radio 1, se tiene:

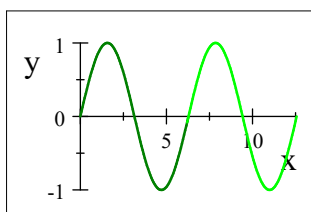


El dominio natural es todos los reales.

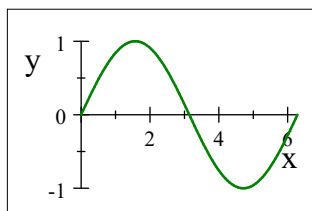
El dominio del primer ciclo se puede considerar como $[0, 2\pi]$.

O sea: $\sin(x) = \sin(2\pi + x)$. El periodo es 2π .

$\sin(x)$ es verde oscuro y $\sin(2\pi + x)$ es verde claro

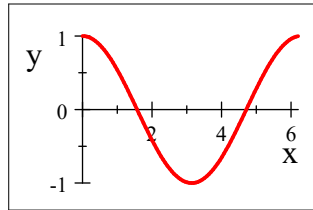


Las graficas de las funciones trigonométricas en $[0, 2\pi]$.

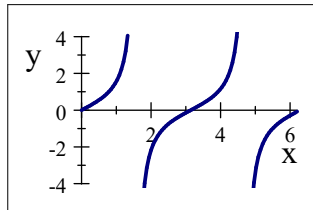


seno(verde)

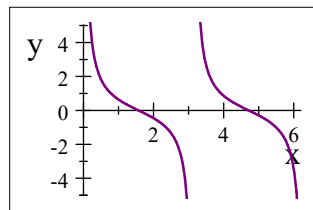
coseno (rojo)



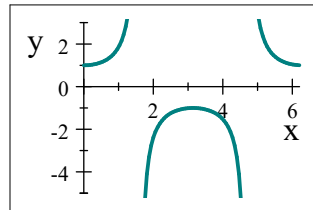
tangente(azul)



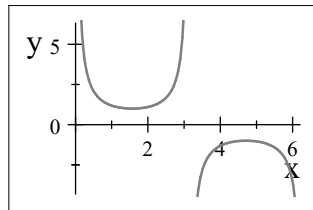
cotangente(purpura)



secante(verde azul)



cosecante(gris)



NOTAS:

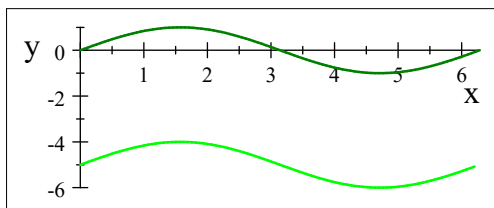
Desplazamientos verticales y horizontales, reflexiones, elongaciones y contracciones de la gráfica de una función.

Un desplazamiento vertical o traslación vertical de una función consiste en sumar un valor a la función: $f(x) + T$.

Por ejemplo: Sea $f(x) = \sin(x)$,

Para trasladarla verticalmente a -5 se le suma, o sea $f(x) - 5$.

En verde oscuro se tiene $f(x) = \sin(x)$ (verde oscuro) y en verde claro: $f(x) - 5$.

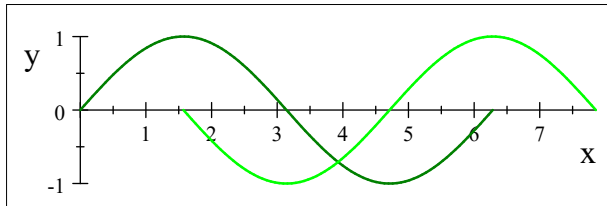


Un desplazamiento horizontal o traslación horizontal de una función consiste en sumar un valor al argumento de una función: $f(x - h)$.

Por ejemplo: Sea $f(x) = \sin(x)$.

Para trasladarla horizontalmente $\frac{\pi}{2}$ se toma $\sin(x + \frac{\pi}{2})$.

En verde oscuro se tiene $f(x) = \sin(x)$ (verde oscuro) y en verde claro: $f(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.



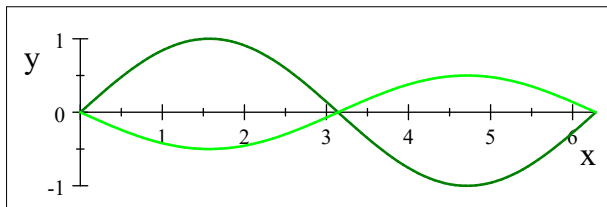
Para las reflexiones, elongaciones y contracciones se obtienen multiplicando por un factor.

Cuando el factor es negativo, se obtiene una reflexión. Cuando en valor absoluto es mayor a 1 se obtiene una amplificación o elongación y cuando en valor absoluto es menor a 1 se obtiene una contracción o disminución de la amplitud.

Por ejemplo: Sea $f(x) = \sin(x)$,

Para una contracción y reflexión por -0.5 se toma $-0.5 \sin(x)$.

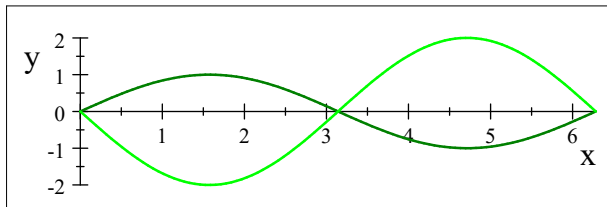
En verde oscuro se tiene $f(x) = \sin(x)$ (verde oscuro) y en verde claro: $-0.5f(\frac{\pi}{2}) = -0.5 \sin(x)$.



Por ejemplo: Sea $f(x) = \sin(x)$,

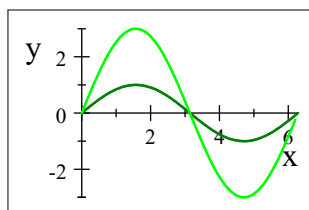
Para una elongación de 2 se toma $2 \sin(x)$.

En verde oscuro se tiene $f(x) = \sin(x)$ (verde oscuro) y en verde claro: $2f(\frac{\pi}{2}) = 2 \sin(x)$.



Todo lo anterior se usa para facilitar la graficación de las funciones trigonométricas.

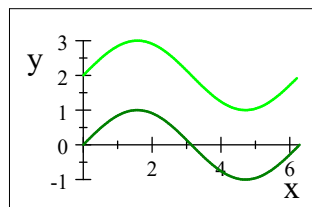
Para las funciones periodicas la amplitud es un factor $\neq 0$, que la multiplica para amplificar, reducir e invertir (<0).



Por ejemplo $3 \sin(x)$ (verde claro) Note que $3 \sin(x)$ cambia la amplitud de $\sin(x)$ de $[-1, 1]$ a $[-3, 3]$.

La amplitud de $3 \sin(x)$ es 3.

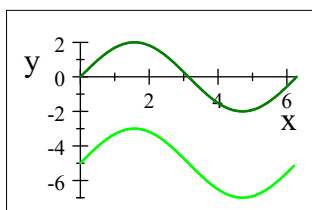
Una traslación es un número distinto de cero que se suma a la función.



Por ejemplo $\sin(x) + 2$ (verde claro)

Entonces graficar $2 \sin(x) - 5$ se puede hacer por pasos:

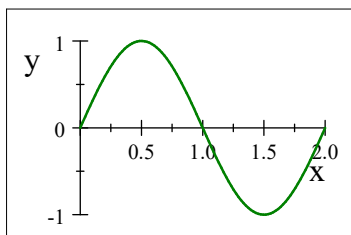
En verde oscuro se tiene $2 \sin(x)$ (verde oscuro) y luego se traslada -5 que es el resultado en verde claro.



NOTA:

La multiplicación del ángulo por π , cambia la escala del eje X .

Es comodo porque la gráfica del seno ($\sin(\pi x)$) es ahora en el intervalo $[0, 2]$.



Para obtener la amplitud ($|A|$), el periodo ($|B|$), el corrimiento (C) y la traslación (D) se usa la fórmula general de sinusoides:

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

Por ejemplo:

Determinar la amplitud ($|A|$), el periodo ($|B|$), el corrimiento (C) y la traslación (D) de la función:

$$h(x) = -3 \sin(3\pi x + 1) - 2$$

RESPUESTA.

Los parámetros A y D son directos.

Para el periodo y corrimiento se requiere igualar los argumentos de la función dada y de la formula de los sinusoides.

$$3\pi x + 1 = \frac{2\pi}{B}(x - C).$$

$$\text{Desarrollando el lado derecho se tiene } \frac{2\pi}{B}(x - C) = \frac{2\pi}{B}x - \frac{2\pi}{B}C.$$

O sea se tiene la igualdad de dos polinomios lineales:

$$3\pi x + 1 = \frac{2\pi}{B}x - \frac{2\pi}{B}C.$$

Y para que sean iguales se requiere la igualdad de sus coeficientes:

$$\text{Para } x : 3\pi = \frac{2\pi}{B}. \text{ Despejando } B = \frac{2}{3}.$$

Para el termino independiente: $1 = -\frac{2\pi}{B}C$. Despejando $C = -\frac{1}{2\pi}B$, sustituyendo B , se tiene:

$$C = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{3\pi}.$$

Comprobación de que B y C son los coeficientes: $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} \left(x - \left(-\frac{1}{3\pi} \right) \right) = 3\pi x + 1$. O sea se obtiene el polinomio del argumento de h .

Reescribiendo h se tiene:

$$h(x) = -3 \sin \left(\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} \left(x - \left(-\frac{1}{3\pi} \right) \right) \right) - 2.$$

Por tanto la amplitud $|A| = 3$, el periodo $|B| = \frac{2}{3}$, el corrimiento $C = -\frac{1}{3\pi}$ y la traslación $D = -2$.

Para calcular límites se usan dos aproximaciones especiales para ángulos muy pequeños:

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

Las cuales tienen como consecuencias en el cálculo de los límites trigonométricos siguientes:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \approx \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\theta} = 1.$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \approx \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}\theta^2)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\theta^2}{\theta} = \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta = 0.$$

Por ejemplo:

Determinar los límites:

$$\text{a) } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^5 \theta}{\theta^2}.$$

$$\text{b) } \lim_{\theta \rightarrow 0} \sec(\theta).$$

RESPUESTA de a)

Por medio de la aproximación del seno para angulos pequeños se tiene:

$$\text{a) } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^5 \theta}{\theta^5} \approx \text{a) } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^5}{\theta^5} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1.$$

RESPUESTA de b)

Usano la equivalencia de la sec y el coseno:

$$\text{b) } \lim_{\theta \rightarrow 0} \sec(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

Por medio de la aproximación del coseno para angulos pequeños se tiene:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\theta)} \approx \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\theta^2}.$$

Note que el divisor se puede calcular:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 - \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2}\theta^2 = 1 - 0 = 1.$$

Por tanto $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\theta^2} = \frac{1}{1} = 1.$

O sea, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sec(\theta) = 1.$

Fórmulas trigonométricas:

Suma de cuadrados

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Suma de ángulos:

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Doble del ángulo:

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a).$$

(usando la suma de cuadrados)

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1.$$