

**TEMAS**

Límites de Funciones trigonométricas.

Para calcular límites se usan dos aproximaciones especiales para ángulos muy pequeños:

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$

Las cuales auxilian en el cálculo de los límites trigonométricos, ya que:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \approx \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\theta} = 1.$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \approx \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}\theta^2)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\theta^2}{\theta} = \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta = 0.$$

Por ejemplo:

Determinar los límites:

a)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^5 \theta}{\theta^2}.$

b)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sec(\theta).$

RESPUESTA de a)

Por medio de la aproximación del seno para ángulos pequeños se tiene:

a)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^5 \theta}{\theta^5} \approx$  a)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^5}{\theta^5} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1.$

RESPUESTA de b)

Usando la equivalencia de la sec y el coseno:

b)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sec(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\theta)}.$

Por medio de la aproximación del coseno para ángulos pequeños se tiene:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\theta)} \approx \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\theta^2}.$$

Note que el divisor se puede calcular:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 - \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2}\theta^2 = 1 - 0 = 1.$$

Por tanto  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\theta^2} = \frac{1}{1} = 1.$

O sea,  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sec(\theta) = 1.$

Fórmulas trigonométricas:

Suma de cuadrados

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Suma de ángulos:

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b).$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

Doble del ángulo:

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a).$$

(usando la suma de cuadrados)